Metodi Variazionali – Lezione 14

Titolo nota 27/03/2020

Problemi ellittici lineari (2ª parte)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

L operatore uniformemente ellittico

$Lu = -\operatorname{div}\left[A(x)\nabla u\right] + q(x)u$

dove sono dati $q \in L^\infty(\Omega)$ e $A(x) = \left[a_{ij}(x)\right]_{1\le i,j\le N}$ con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ t.c.

$a_{ij} = a_{ji}$

$\exists \alpha > 0$ t.c. $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \ge \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$ e per q.o. $x \in \Omega$

Lemma (sul risolvente)

Supponiamo $q \ge 0$ q.o. Allora $\forall f \in L^2(\Omega)$

$\exists!$ soluz. debole di (P) $\begin{cases} Lu = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ cioè

$\exists!\, u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ t.c. $\int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot\nabla h + q(x)uh\right]dx = \int_\Omega fh\,dx$

$\forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$

Inoltre, posto $R(f) = u$ = unica soluz. debole di (P), si ha che $R : L^2(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$ è un operatore lineare e continuo, cioè $\exists C > 0$ t.c.

$\|u\|_{W_0^{1,2}} \le C \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2(\Omega)$ essendo $u = R(f)$.

A volte si scrive L^{-1} al posto di R.

Ad es. $(-\Delta)^{-1}(f)$ = unica soluz. debole di $\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

Dim. Idea: riconosco e affronto (P) come problema variazionale cioè trovo un funzionale F i cui punti critici sono le soluz. di (P). Quindi studiamo un problema di minimo per F.

Fissata $f \in L^2(\Omega)$

Sia $F : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ il funzionale così definito

$$F(u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot\nabla u + q(x)u^2\right]dx}_{Q(u)} - \underbrace{\int_\Omega fu\,dx}_{T(u)}$$

La norma standard in $W_0^{1,2}(\Omega)$ è $\|u\|_{W_0^{1,2}} = \|\nabla u\|_{L^2}$

Con tale norma $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio riflessivo.

- F continua in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$F(u) = \int_\Omega \mathcal{L}(x, u, \nabla u)\, dx$$

$$\mathcal{L}(x, u, \xi) = \frac{1}{2}(A(x)\xi)\cdot\xi + q(x)u^2 - f(x)u \qquad \begin{matrix} x \in \Omega \\ u \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N \end{matrix}$$

$\mathcal{L}$ verifica le condizioni di Carathéodory

$$\exists C > 0 : |\mathcal{L}(x, u, \xi)| \le C\left(1 + u^2 + |\xi|^2\right) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{R}\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

- F convesso

$$F(u) = \frac{1}{2}\varphi(u) - T(u)$$

T è lineare $\Rightarrow -T$ lineare $\Rightarrow -T$ convesso

φ convesso perché $A(x)$ simmetrica, (semi-) definita positiva e $q(x) \ge 0$ q.o.

- F coercivo cioè $F(u) \to \infty$ se $\|u\|_{W_0^{1,2}} \to \infty$

Per la uniforme ellitticità

$$F(u) \ge \frac{1}{2}\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2 dx - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

$$\overset{\substack{q \ge 0 \\ \text{Poincaré}}}{\ge} \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - C\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\|u\|_{W_0^{1,2}}\left(\|u\|_{W_0^{1,2}} - C\|f\|_{L^2}\right) \longrightarrow \infty$$

se $\|u\|_{W_0^{1,2}} \to \infty$ perché $\alpha > 0$.

$\Longrightarrow$ $\inf_{W_0^{1,2}} F$ ha soluzione cioè $\exists u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

t.c. $F(u) = \inf_{W_0^{1,2}} F$

$\mathcal{L}(x, u, \xi)$ verifica le ipotesi buone affinché esistano

$\frac{\partial F}{\partial h}(u)$ = derivata direzionale di F in u lungo ogni direzione $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$\Longrightarrow$ u verifica Eulero-Lagrange debole cioè

$$\int_\Omega \left[\nabla_\xi \mathcal{L}(x,u,\nabla u)\cdot \nabla h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x,u,\nabla u) h \right] dx = 0 \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$(1) \quad \int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot \nabla h + (q(x)u - f) h \right] dx = 0 \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

cioè u è soluz. debole di (P).

Unicità: se u_1 e u_2 sono soluz. deboli di (P) allora $u = u_1 - u_2$ risolve $\begin{cases} Lu = 0 & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ cioè $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot \nabla h + q(x) u h \right] dx = 0 \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Prendo $h = u$ e trovo

$$0 \le \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot \nabla u + q(x) u^2 \right] dx \overset{h=u}{=} 0$$

$$\Rightarrow \|\nabla u\|_{L^2} = 0 \quad \text{cioè} \quad \|u\|_{W_0^{1,2}} = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Dunque $R : L^2(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$ è ben definito

$R(f)$ = unica soluz. debole di (P).

R è lineare (verifica immediata).

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot \nabla u + q(x) u^2 \right] dx \overset{h=u \text{ in } (1)}{=} \int_\Omega f u \, dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \overset{\text{Poincaré}}{\le} C \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$\|u\|_{W_0^{1,2}} = \|\nabla u\|_{L^2} \le \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^2} \qquad \square$$

($R(f) = u$)

Finora si è trovato che $\exists$ una successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di autovalori ($\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ con $\lambda_n \to \infty$) e una corrispondente successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ di autofunzioni $\begin{cases} L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n & \text{in } \Omega \\ \varphi_n = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ e $\{\varphi_n\}$ è una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$.

Con questi strumenti studiamo il problema non omogeneo $(*)$ $\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

con Ω e L come all'inizio, $\lambda \in \mathbb{R}$ fissato e $f \in L^2(\Omega)$ data.

Teorema (alternativa di Fredholm)

(A) Caso λ non autovalore. Allora $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ u soluz. debole di (*).

(B) Caso λ autovalore. Il pb. (*) ha soluz. se e solo se f è L^2-ortogonale all'autospazio associato a λ cioè
$$\int_\Omega f\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \text{ autofunzione relativa a } \lambda.$$
In tal caso (*) ha infinite soluzioni della forma $u = v + \varphi$ dove v è una particolare soluz. di (*) e φ è una qualunque autofunz. relativa a λ.

Dim. **Step 1** Non è restrittivo assumere $q \geq 0$ q.o.

Infatti
$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{L}u = (\lambda + \|q\|_\infty)u + f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$
dove $\tilde{L}u = Lu + \|q\|_\infty u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \tilde{q}(x)u$
con $\tilde{q}(x) = q(x) + \|q\|_\infty \geq 0$ q.o.
Inoltre λ è autovalore per L in $W_0^{1,2}(\Omega)$ se e solo se $\lambda + \|q\|_\infty$ lo è per $\tilde{L}$.

Step 2 Definisco in $W_0^{1,2}(\Omega)$ un prodotto interno "ad hoc"

Lemma Supponiamo $q \geq 0$ q.o. Allora
$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left[(A(x)\nabla u) \cdot \nabla v + q(x) u v \right] dx$$
è un prodotto interno in $W_0^{1,2}(\Omega)$ che induce la topologia (forte) standard di $W_0^{1,2}(\Omega)$, cioè posto $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, $\exists \alpha, \beta > 0$ t.c.
$$(2) \quad \alpha \|u\|_{W_0^{1,2}} \leq \|u\| \leq \beta \|u\|_{W_0^{1,2}} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Infatti $\langle u, v \rangle$ è ben definita in $W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$ lineare in u, e in v, simmetrica ($\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$)

perché $A(x)$ è simmetrica, definita positiva perché lo è $A(x)$ e $q \geq 0$ q.o. Inoltre (2) segue dall'uniforme ellitticità + $q \geq 0$ e da Poincaré.

Step 3 Costruisco una base hilbertiana in $W_0^{1,2}(\Omega)$ rispetto al nuovo prodotto interno.

Osservo che, avendo preso $q \geq 0$, $\lambda_n > 0$ $\forall n$

Definisco $u_n = \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ φ_n autofunzione relativa a λ_n

$\begin{cases} L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n & \Omega \\ \varphi_n = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ cioè $\varphi_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega [A(x)\nabla\varphi_n \cdot \nabla h + q(x)\varphi_n h]\,dx = \lambda_n \int \varphi_n h\,dx \quad \forall h \in W_0^{1,2}$$

cioè $\begin{cases} \varphi_n \in W^{1,2}(\Omega) \\ \langle \varphi_n, h \rangle = \lambda_n \int_\Omega \varphi_n h\,dx \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$ (3)

$\{u_n\}$ è un sistema ortonormale

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \overset{(3) \text{ con } h=\varphi_m}{=} \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \underbrace{\int_\Omega \varphi_n \varphi_m\,dx}_{\delta_{nm}} = \delta_{nm}$$

$\overline{\text{span}\{u_n\}} = W_0^{1,2}(\Omega)$?

$\Updownarrow$

l'unica funzione $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$ t.c. $\langle u_n, h \rangle = 0$ $\forall n$ è $h = 0$?

Sì perché $0 = \langle u_n, h \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_\Omega \varphi_n h\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Essendo $\{\varphi_n\}$ base hilbertiana di $L^2(\Omega)$ segue $h = 0$.

Step 4 Il pb (*) $\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ equivale ad un sistema algebrico lineare infinito-dim.

u sol. debole di (*) $\iff \langle u, h \rangle = \int_\Omega (\lambda u + f) h\,dx \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$\iff \langle u, u_n \rangle = \int_\Omega (\lambda u + f) u_n\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Essendo $f \in L^2(\Omega)$ e $\{\varphi_n\}$ base hilbertiana di $L^2(\Omega)$

$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \varphi_n$ con $\alpha_n = \int_\Omega f\varphi_n\,dx$ $\left(\text{so che } \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^2 < \infty\right)$

Inoltre $\langle u, u_n\rangle = \langle u_n, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\langle \varphi_n, u\rangle = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}\int_\Omega \varphi_n u\,dx$

Quindi

u sol. debole di $(*) \iff \sqrt{\lambda_n}\int_\Omega \varphi_n u\,dx = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_n}}\int_\Omega u\varphi_n\,dx + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\alpha_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\iff (\lambda_n - \lambda)\int_\Omega \varphi_n u\,dx = \alpha_n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

$\iff \underbrace{\frac{\lambda_n-\lambda}{\sqrt{\lambda_n}}\langle u_n, u\rangle = \alpha_n \quad \forall n.}_{(\#)}$

Step 5

Caso (A) λ non è autovalore, cioè $\lambda \neq \lambda_n \ \forall n$.

Prendo $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n u_n$ con $c_n = \alpha_n \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n - \lambda}$.

Tale u è ben definita in $W^{1,2}_0(\Omega) \iff \sum c_n^2 < \infty$

vero perché, essendo $\lambda_n \to \infty$, $c_n \sim \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} \le C\alpha_n$

Essendo $\sum \alpha_n^2 < \infty$ lo è anche $\sum c_n^2 < \infty$.

Tale u è sol. debole di $(*)$.

Unicità: Se u_1 e u_2 sono sol. deboli di $(*)$ allora $u = u_1 - u_2$ è sol. debole di $\begin{cases} Lu = \lambda u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

Essendo λ non autovalore, $u \equiv 0$ cioè $u_1 = u_2$.

Caso (B) $\exists\, \bar n \in \mathbb{N}$ t.c. $\lambda = \lambda_{\bar n}$.

Da $(\#)$ segue che se u è sol. di $(*)$ allora deve essere $\alpha_n = 0$ per quegli indici n t.c. $\lambda_n = \lambda$.

Cioè C.N. per l'esistenza è che $\int_\Omega f\varphi\,dx = 0$ $\forall \varphi$ autofunz. relative a λ.

Se ciò si verifica, la funzione $u = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \lambda_n\neq\lambda}} c_n u_n$ e $c_n = \frac{\alpha_n\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n - \lambda}$ è soluz. di $(*)$.

Se u_1 e u_2 sono soluz. deboli di (*) allora
$u = u_1 - u_2$ risolve $\begin{cases} Lu = \lambda u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

Essendo λ autovalore $u = \varphi$ = autofunzione. □

Caratterizzazione variazionale degli autovalori

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Teorema $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, L operatore ellittico come sopra.

Poniamo $Q(u) = \int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot \nabla u + q(x) u^2 \right] dx \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si ha che $\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2} \\ u \neq 0}} \frac{Q(u)}{\|u\|_{L^2}^2}$

Inoltre $\exists$ p.to di minimo dato da φ_1 = prima autofunzione.

Dim. Supponiamo $q \geq 0$ q.o. (Se no si considera $\widetilde{Q}(u) = Q(u) + \|q\|_\infty \int_\Omega u^2 dx$, si studia $\inf \frac{\widetilde{Q}(u)}{\|u\|_{L^2}^2}$ e si ottiene che $\inf \frac{\widetilde{Q}(u)}{\|u\|_{L^2}^2} = \lambda_1 + \|q\|_\infty$ e poi si deduce la conclusione per Q).

Chiamo $R(u) \underset{\text{def}}{=} \frac{Q(u)}{\|u\|_{L^2}^2} \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$.

e $\mu \underset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} R(u)$ — Devo provare che $\mu = \lambda_1$

e $R(\varphi_1) = \lambda_1$. Considero ancora il prodotto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left[(A(x)\nabla u)\cdot \nabla v + q(x) u v \right] dx$$

Si ha che $Q(u) = \langle u, u \rangle$

Ricordo che $\langle \varphi_1, h \rangle = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 h \, dx \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Prendo $h = \varphi_1$ $\quad Q(\varphi_1) = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2 dx = \lambda_1$.

e anche $R(\varphi_1) = Q(\varphi_1) = \lambda_1$.

$\mu = \inf R \leq R(\varphi_1) = \lambda_1$.

Resta da provare che $\mu \geq \lambda_1$. Studio il pb. $\inf R$.

<u>Step 1</u> $\inf_{\substack{u \in W_0^{1,2} \\ u \neq 0}} R(u) = \inf_{u \in M} Q(u)$

dove $M = \{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|_{L^2} = 1 \}$.

Per comodità chiamo $\tilde{\mu} = \inf_{u \in M} Q(u)$.

$\mu \leq \tilde{\mu}$ perché se $u \in M$ $R(u) = Q(u)$.
Siccome $R(u) = R(\alpha u)$ $\forall \alpha \neq 0$ si ha che
$\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ $R(u) = R\left(\frac{u}{\|u\|_{L^2}}\right) = Q\left(\frac{u}{\|u\|_{L^2}}\right) \geq \tilde{\mu}$.

$\Longrightarrow \mu \geq \tilde{\mu}$.

<u>Step 2</u> Studio $\inf_M Q$.

Sia $(u_n) \subset M$ t.c. $Q(u_n) \longrightarrow \tilde{\mu}$.
La succ. $(Q(u_n))$ è limitata in $\mathbb{R}$
Per l'uniforme ellitticità $\|\nabla u_n\|_{L^2} \leq$ cost $\forall n$.
cioè (u_n) è limitata in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

$\exists\, u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ t.c. a meno di sottosucc. $u_n \xrightarrow[w\text{-}W_0^{1,2}]{} u$

$\underset{\text{Rellich}}{\Longrightarrow}$ $u_n \longrightarrow u$ $s\text{-}L^2 \Longrightarrow \|u\|_{L^2} = \lim \|u_n\|_{L^2} = 1 \Rightarrow u \in M$

Inoltre $Q(u) \leq \liminf Q(u_n)$ perché $Q(u) = \|u\|^2$

$\tilde{\mu} \underset{\substack{\uparrow \\ u \in M}}{\leq} Q(u) \leq \liminf Q(u_n) = \lim Q(u_n) = \tilde{\mu}$

<u>Step 3</u> Il pto di min u di Q in M è autovettore con autovalore $\tilde{\mu} = \mu$.

So che $R(u) \overset{u \in M}{=} Q(u) = \inf_M Q = \tilde{\mu} = \mu = \inf R$.

u pto di min per R.

Fisso $h \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e definisco $f(t) = R(u+th)$ ben definita per $|t| < \delta$ con $\delta > 0$ piccolo perché $u + th \neq 0$ se $|t| < \delta$.

So che $f(0) = \min_{|t|<\delta} f(t)$

$\exists\, f'(0)$ perché $f(t) = \dfrac{Q(u) + 2t\langle u, h\rangle + t^2 Q(h)}{\|u\|_{L^2}^2 + 2t\int_\Omega uh\,dx + \|h\|_{L^2}^2}$

Risulta $f'(0) = 2\langle u, h\rangle - 2\mu\int_\Omega uh\,dx$

$Q(u) = \mu$, $\|u\|_{L^2} = 1$

$\Longrightarrow \quad \langle u, h\rangle = \mu\int_\Omega uh\,dx$

Fermat $f'(0) = 0$

Vero $\forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$. cioè u risolve $\begin{cases} Lu = \mu u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

e $u \neq 0$. $\Longrightarrow$ μ autovalore $\Longrightarrow \mu \geq \lambda_1$

(λ_1 più piccolo autovalore). $\square$

Oss. Ogni λ_n si caratterizza ricorsivamente

$$\lambda_n = \inf_{u \in X_n} \frac{Q(u)}{\|u\|_{L^2}^2} \quad \text{dove}$$

$n = 1 \quad X_n = W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$

$n > 1 \quad X_n = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : u \neq 0,\ \int_\Omega u\varphi_k\,dx = 0 \ \ \forall k = 1, \dots, n-1\}$.