Metodi variazionali – lezione 15

Titolo nota 30/03/2020

Esercizi proposti

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

Disuguaglianza di Poincaré: $\forall\, p \in [1, \infty)\ \exists\, C_p = C_p(\Omega)$ t.c.

$$\|u\|_{L^p} \le C_p \|\nabla u\|_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (P)$$

① Sia $L = -\Delta$ e sia λ_1 il primo autovalore di L in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Verificare che la miglior costante C_2 in (P) per $p=2$ è data da $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$.

② Fissato $p \in (1, \infty)$, si consideri il problema di minimo

$$\inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} = \mu_p \qquad (*)$$

a) Riconoscere che $\mu_p > 0$

b) Provare che $\exists\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \neq 0$ punto di minimo di $(*)$ e che tale φ può essere presa con $\int_\Omega |\varphi|^p dx = 1$ e $\int_\Omega |\nabla \varphi|^p dx = \mu_p$ – (Suggerimento: vedi dim sulla caratterizz. variazionale di λ_1). Inoltre provare che tale φ può essere presa ≥ 0. (Ricordare che se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ anche $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}|u| = \pm \frac{\partial u}{\partial x_i}$ q.o. Da ciò dedurre che se u è punto di minimo di $(*)$ anche $|u|$ lo è).

c) Posto $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx$ e $G(x) = \int_\Omega |u|^p dx$ $\left(u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ verificare che $\forall\, u, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\exists\, \frac{\partial F}{\partial h}(u) = p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla h \, dx$$

$$\exists\, \frac{\partial G}{\partial h}(u) = p \int_\Omega |u|^{p-2} u\, h \, dx$$

(Suggerimento: applicare i teoremi visti in generale

scrivendo $F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\,dx$ con $f(\xi) = |\xi|^p$ $(\xi \in \mathbb{R}^N)$

e $G(u) = \int_\Omega g(u)\,dx$ con $g(u) = |u|^p$ $(u \in \mathbb{R})$).

d) Poniamo $R(u) = \dfrac{F(u)}{G(u)}$ per $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$

Per b) $\exists\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ e t.c. $R(\varphi) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} R(u)$

e con $\|\varphi\|_{L^p} = 1$ $\|\nabla \varphi\|_{L^p}^p = \mu_R = R(\varphi)$

Fissata $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ poniamo $\rho(t) = R(\varphi + th)$

Osservare che $\rho(t)$ è ben definita $\forall\, |t| < \delta$ e

provare che esiste e calcolare $\rho'(t)$ (Hint: usare c)).

Dedurre che $\rho'(0) = 0$ e che φ è soluz. debole

di $\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi) = \mu_p \varphi^{p-1} & \text{in } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

cioè $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ t.c. $\forall\, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi \cdot \nabla h\,dx = \mu_p \int_\Omega \varphi^{p-1} h\,dx .$$

L'operatore differenziale $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ si chiama p-Laplaciano e si denota Δ_p - si osserva che per $p = 2$ $\Delta_p = \Delta$.

Proprietà di monotonia del 1° autovalore

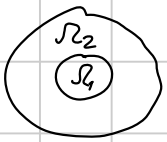
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

In generale se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tale u si estende in modo naturale su $\mathbb{R}^N$ ponendo

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega . \end{cases}$$

Si ha che $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^p dx = \int_\Omega |u|^p dx$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}|^p dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$



Siano Ω_1 e Ω_2 domini limitati in $\mathbb{R}^N$ $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Allora $W_0^{1,2}(\Omega_1) \subset W_0^{1,2}(\Omega_2)$ (via estensione naturale).

Sia L un operatore unif. ellittico in Ω_2 cioè

$$Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u$$

con $q \in L^\infty(\Omega_2)$ e $A(x) = [a_{ij}(x)]_{1\le i,j\le N}$ con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega_2)$

t.c. $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i,j)$ e $\exists \alpha > 0$ t.c. $\alpha|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$

per q.o. $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$

Poniamo $\varphi(u) = \int_{\Omega_2} (A(x)\nabla u)\cdot \nabla u \, dx$

Vale che

$$\lambda_1(\Omega_i) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega_i) \\ u \neq 0}} \frac{\varphi(u)}{\|u\|_{L^2}^2} \qquad (i = 1,2).$$

Allora $\lambda_1(\Omega_1) \ge \lambda_1(\Omega_2)$.

<u>Esercizio</u> Prendo $L = -\Delta$ e $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$

Fissati $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ sia $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}$

In particolare scriviamo $B_r = B_r(0)$.

Dimostrare che $\lambda_1(B_r(x_0)) = r^{-2}\lambda_1(B_1)$

(Suggerimento: data una funzione $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e fissati $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ poniamo $\tilde{u}(x) = u(x_0 + rx)$

Si ha che $u \in W_0^{1,2}(B_r(x_0)) \iff \tilde{u} \in W_0^{1,2}(B_1)$

con $\int_{B_1} \tilde{u}^2 dx = r^{-N}\int_{B_r(x_0)} u^2 dx$, $\int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 dx = r^{2-N}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 dx$).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

Fissiamo $A(x) = [a_{ij}(x)]_{1\le i,j\le N}$ con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

come sopra.

Date $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ siano $L_i u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q_i(x)u$ $(i = 1,2)$

e poniamo $\lambda_1(q_i)$ = primo autovalore relativo all'operatore ellittico L_i $(i = 1,2)$.

Se $q_1 \le q_2$ q.o. allora $\lambda_1(q_1) \le \lambda_1(q_2)$

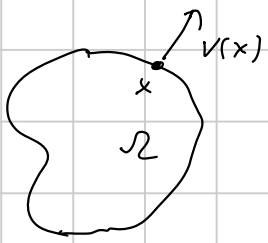
Segue subito dalla caratterizz. variazionale

$$\lambda_1(q_i) = \inf_{\substack{u \in W^{1,2}_0(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega [(A(x)\nabla u)\cdot \nabla u + q_i(x) u^2]\,dx}{\|u\|^2_{L^2}} \qquad (i=1,2)$$

Osservazioni sul problema di Neumann

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u$



$\nu = \nu(x)$ normale esterna in x a $\partial\Omega$

$$(N) \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \Omega \\ \underbrace{(A(x)\nabla u)\cdot \nu = 0}_{\text{condizione di Neumann}} & \partial\Omega \end{cases}$$

$f \in L^2(\Omega)$ data.

Serve che Ω dominio regolare cioè $\partial\Omega$ varietà differenziabile t.c. $\forall x \in \partial\Omega$ $\exists$ $\nu(x)$ normale esterna

Oss. Se $A(x) = I$ oppure se $A(x) = \alpha(x) I$ con $\alpha > 0$ allora la cond. di Neumann è $\nabla u \cdot \nu = 0$ su $\partial\Omega$

cioè $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial\Omega$

$\leftarrow$ derivata normale esterna

def. Supponiamo $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ — Una soluz. classica (o forte) di (N) è una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e t.c. $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + q(x)u = \lambda u(x) + f(x)$ $\forall x \in \Omega$

$(A(x)\nabla u(x))\cdot \nu(x) = 0$ $\forall x \in \partial\Omega$ (derivate classiche)

def (senza più regolarità C^1 su a_{ij}). Una soluz. debole di (N) è una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ t.c.

$$(1) \quad \int_\Omega [(A(x)\nabla u)\cdot \nabla h + q(x) u h]\,dx = \int_\Omega (\lambda u + f) h\,dx \quad \forall h \in W^{1,2}(\Omega)$$

Oss. La condizione di Neumann si legge nel fatto che lo spazio in questione è tutto $W^{1,2}(\Omega)$. Infatti:

Proposizione (supponiamo $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$) Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una soluz. debole e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ allora u è sol. classica.

dim. Avendo assunto $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ si ha che

$$\forall h \in C^1(\bar\Omega): \int_\Omega (A(x)\nabla u)\cdot \nabla h\, dx = \int_{\partial\Omega} [(A(x)\nabla u)\cdot \nu] h\, d\sigma - \int_\Omega [\operatorname{div}(A(x)\nabla u)] h\, dx$$

(segue dal teorema della divergenza applicato al campo $F(x) = h(x)[A(x)\nabla u(x)]$).

Prendendo $h \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_{\partial\Omega} [(A(x)\nabla u)\cdot \nu] h\, d\sigma = 0$ perché $h = 0$ in (un intorno di) $\partial\Omega$

Da (1) segue che $\int_\Omega [-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u] h\, dx = \int_\Omega (\lambda u + f) h\, dx$

vale $\forall h \in C_c^\infty(\Omega)$.

Da un lemma di annullamento vale $Lu = \lambda u + f$ in Ω puntualmente q.o. e essendo $u \in C^2$, vale $\forall x \in \Omega$.

Ora prendiamo $h \in C^1(\bar\Omega)$, si ha che

$$\underbrace{\int_\Omega [-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u] h\, dx}_{I} + \int_{\partial\Omega} [(A(x)\nabla u)\cdot \nu] h\, d\sigma = \underbrace{\int_\Omega (\lambda u + f) h\, dx}_{II}$$

Sappiamo che $I = II$. Resta $\int_{\partial\Omega} [(A(x)\nabla u)\cdot \nu] h\, d\sigma = 0$ $\forall h \in C^1(\bar\Omega)$. Per una versione adattata del lemma di annullamento si ottiene $(A(x)\nabla u)\cdot \nu = 0$ q.o. su $\partial\Omega$ (rispetto alla misura superficiale). Essendo $u, a_{ij} \in C^1(\bar\Omega)$ si ottiene $[A(x)\nabla u(x)]\cdot \nu(x) = 0$ $\forall x \in \partial\Omega$. □

Osservazione importante In $W^{1,2}(\Omega)$ non vale la disug. di Poincaré (perché $W^{1,2}(\Omega)$ contiene le funzioni costanti). Si assume

$$\exists \beta > 0 \text{ t.c. } q(x) \geq \beta \text{ q.o.} \qquad (q)$$

Conviene munire $W^{1,2}(\Omega)$ di un prodotto interno adattato all'operatore $Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u$

così definito

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (A(x)\nabla u)\cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) u v \, dx$$

Tale prodotto interno induce su $W^{1,2}(\Omega)$ la topologia (forte) standard cioè quella della norma $\|u\|_{W^{1,2}} = \sqrt{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx}$

Si ottiene da (q) che $\exists\ c_1, c_2 > 0$ t.c.

$$c_1 \|u\|_{W^{1,2}} \le \|u\| \le c_2 \|u\|_{W^{1,2}} \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega),$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Vale il teorema di decomp. spettrale e l'alternativa di Fredholm con $W^{1,2}$ al posto di $W^{1,2}_0$.

Il caso del Laplaciano

$$(N) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Si osservi che $q \equiv 0$. Per il problema agli autovalori

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$\lambda = 0$ è un autovalore e le corrispondenti autofunz. sono le costanti.

In $W^{1,2}(\Omega)$ vale una versione della disug. di Poincaré:

$$\int_\Omega |u - [u]|^2 dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega)$$

dove $[u] = \text{media di } u = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\, dx = \fint_\Omega u$

Poniamo $W^{1,2}_*(\Omega) = \{ u \in W^{1,2}(\Omega) : [u] = 0 \}$.

Si ha che $W^{1,2}_*(\Omega)$ è un sottospazio chiuso.

Ogni $u \in W^{1,2}(\Omega)$ si può scrivere in modo unico nella forma $u = c + v$ con $c \in \mathbb{R}$ e $v \in W^{1,2}_*(\Omega)$.

$c = [u]$ e $v = u - [u]$.

$\Rightarrow W^{1,2}(\Omega) = \mathbb{R} \oplus W^{1,2}_*(\Omega)$

↑ sottospazio delle funzioni costanti.

Lemma (sul risolvente per il pb. di Neumann di $-\Delta$)

$\forall f \in L^2(\Omega)$ con $[f] = 0$ $\exists!$ $u \in W^{1,2}_*(\Omega)$ soluz. debole di $\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ cioè $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = \int_\Omega f h \, dx$ $\forall h \in W^{1,2}(\Omega)$

Conseguenze (teorema di decom. spettrale).

Gli autovalori per $-\Delta$ con condiz. di Neumann sono

$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ con $\lambda_n \to \infty$ per $n \to \infty$

ed $\exists$ una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$ fatta di autofunz. per il pb. di Neumann.

+ alternativa di Fredholm.

Regolarità delle autofunzioni del laplaciano

Sia φ soluz. debole di $\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{in } \Omega \\ \text{Dirichlet/Neumann} & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Allora $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

dim. Passo ad un pb. su un dominio con una dimensione in più - definendo

$u(x,t) = \varphi(x) e^{\sqrt{\lambda} t}$ $\quad (x,t) \in \underbrace{\Omega \times (-1,1)}_{D} \subset \mathbb{R}^{N+1}$

Def. ok perché $\lambda > 0$.

Verifico che u è sol. debole di $\Delta u = 0$ in D

$\Longrightarrow$ $u \in C^\infty(D) \Longrightarrow \varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Caccioppoli-Weyl

(se potessi calcolare le derivate classiche

$\Delta u = \Delta_x [\varphi(x) e^{\sqrt{\lambda} t}] + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\varphi(x) e^{\sqrt{\lambda} t}] =$

$= e^{\sqrt{\lambda} t} \Delta_x \varphi(x) + \lambda e^{\sqrt{\lambda} t} \varphi(x) = 0$ perché $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$).

In forma debole: so che

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla h \, dx = \lambda \int_\Omega \varphi h \, dx \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega).$$

ora prendo $h \in C_c^\infty(\Omega \times (-1,1))$ e calcolo

$$\int_{\Omega\times(-1,1)} \nabla u \cdot \nabla h \, dx\, dt = \int_\Omega \left(\int_{-1}^{1} \left[e^{\sqrt{\lambda} t} \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x h + \underbrace{\sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} t} \varphi}_{\frac{\partial u}{\partial t}} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \right] dt \right) dx$$

Osservo che

$$\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{\lambda} t} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\, dt = \underbrace{\left[e^{\sqrt{\lambda} t} h(x,t) \right]_{t=-1}^{t=1}}_{=0} - \sqrt{\lambda} \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{\lambda} t} h(x,t)\, dt$$

perché $h(x,1) = h(x,-1) = 0$

$h(x,\cdot) \in C_c^\infty((-1,1))$.

$$\int_{\Omega\times(-1,1)} \nabla u \cdot \nabla h \, dx\, dt = \int_\Omega \left(\int_{-1}^{1} \left(e^{\sqrt{\lambda} t} \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x h - \lambda \varphi h \right) dt \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{\lambda} t} \underbrace{\left[\int_\Omega \left(\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x h - \lambda \varphi h \right) dx \right]}_{=0} dt = 0$$

perché $h(\cdot, t) \in C_c^\infty(\Omega)$

$\Longrightarrow$ u sol. debole di $\Delta u = 0$ in $\Omega \times (-1,1)$. $\square$