Metodi variazionali – Lezione 16

Titolo nota 02/04/2020

Ulteriori proprietà di λ_1 = primo autovalore di $-\Delta$ e relative autofunzioni

1. Le autofunzioni di λ_1 hanno segno costante
2. λ_1 è un autovalore semplice
3. Le autofunzioni di λ_n con $n>1$ cambiano segno.

Strumento: principio del massimo
importante per studiare proprietà qualitative di soluz. di PDE.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

L operatore ellittico del 2° ordine del tipo

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \qquad (1)$$

con $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ e con queste proprietà:

- $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$
- $\exists \alpha > 0$ t.c. $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$ e q.o. $x \in \Omega$

In precedenza sono stati considerati operatori ellittici in forma di divergenza

$$Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u \qquad \text{con } A(x) = [a_{ij}(x)]_{1\leq i,j\leq N}$$

Sono un caso particolare di (1) con $b_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}$ quando $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, e $q(x) = c(x)$.

Gli operatori di Schrödinger sono della forma

$$Lu = -\Delta u + q(x)u$$

($q(x)$ potenziale).

Vedremo il principio del max debole e forte per operatori di Schrödinger ma valgono più in generale

per operatori ellittici come (1).

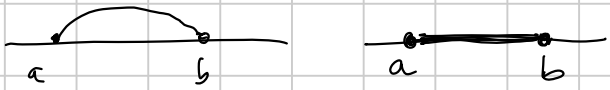
Idea di base: data $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$$\left.\begin{array}{l} Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{u \geq 0 \text{ in } \Omega}_{\text{principio del max debole}}$$

inoltre $\underbrace{u > 0 \text{ in } \Omega \text{ oppure } u \equiv 0 \text{ in } \Omega}_{\text{principio del max forte.}}$

Es $N = 1$ $\Omega = (a,b)$ $Lu = -u''$

$$\begin{cases} Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u'' \leq 0 \text{ in } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$



In entrambi i casi $u \geq 0$ in (a,b) e il max è assunto in (a,b).

$Lu \leq 0$

def. Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ che verifichi $Lu \geq 0$ in Ω (cioè $Lu(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$) si dice soprasoluzione

$Lu(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$ sottosoluzione.

Perché valgano le implicazioni generali scritte sopra occorrono ipotesi aggiuntive di segno su $c(x)$ in L e su $q(x)$ per operatori di Schrödinger.

Teorema 1 (principio del max debole)

$Lu = -\Delta u + q(x)u$ con $q \in L^\infty(\Omega)$.

Supponiamo $q \geq 0$ in Ω. Allora:

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq 0 \text{ su } \partial\Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow u \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Osservazioni: 1) Vale più in generale per operatori ellittici della forma (1) con $c(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

2) Vale una versione generale per sottosoluzioni

Supponiamo $q \geq 0$ in Ω - Allora

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ Lu \leq 0 \text{ in } \Omega \\ u \leq 0 \text{ su } \partial\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow u \leq 0 \text{ in } \Omega$$

(principio del minimo - forma debole).

Dim. Supponiamo all'inizio $Lu > 0$ in Ω cioè $Lu(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$. Per assurdo $\exists x_0 \in \Omega$ dove $u(x_0) < 0$.



$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in \Omega \text{ dove } u(\bar{x}) = \min_{\overline{\Omega}} u < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow Lu(\bar{x}) = -\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\bar{x})}_{\geq 0} + \underbrace{q(\bar{x})}_{\geq 0}\underbrace{u(\bar{x})}_{< 0} \leq 0 \quad \lightning$$

Ora considero il caso generale $Lu \geq 0$ in Ω.

Perturbo u in modo da sfruttare quanto già provato.

$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon\varphi(x)$ con $\varepsilon > 0$ e $\varphi(x)$ opportuna funzione, $\varphi \geq 0$ in Ω scelta in modo tale che

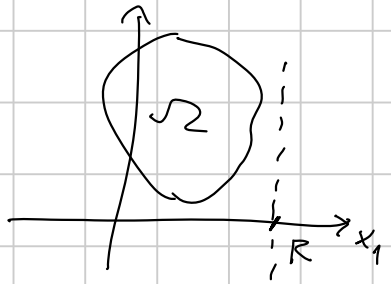
$Lu_\varepsilon > 0$ in Ω, $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} \geq 0 \underset{1^a \text{ parte}}{\Longrightarrow} u_\varepsilon \geq 0$ in Ω

cioè $u \geq -\varepsilon\varphi$ in Ω - Poi si passa al limite $\varepsilon \to 0$.

e si deduce $u \geq 0$ in Ω.

Costruzione di φ:

$\exists R \in \mathbb{R}$ t.c. $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < R\}$



Definisco $\varphi(x) = e^{\mu R} - e^{\mu x_1}$

con $\mu > 0$ opportuno (x_1 = prima componente di $x \in \mathbb{R}^N$).

$x \in \overline{\Omega} \Rightarrow x_1 \leq R \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$

In particolare $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = (u + \varepsilon\varphi)|_{\partial\Omega} \geq 0$

(perché $u|_{\partial\Omega} \geq 0$ e $\varphi|_{\partial\Omega} \geq 0$ e $\varepsilon > 0$).

$$L u_\varepsilon = L u + \varepsilon L\varphi \geq \varepsilon\left(-\Delta\varphi + q(x)\varphi\right)$$

$\uparrow$ $Lu \geq 0$ in Ω

$$\Delta\varphi(x) = -\mu^2 e^{\mu x_1}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi + q(x)\varphi &= \mu^2 e^{\mu x_1} + q(x)\left(e^{\mu R} - e^{\mu x_1}\right) \\ &= e^{\mu x_1}\left(\mu^2 - q(x)\right) + q(x) e^{\mu R} \\ &\geq e^{\mu x_1}\left(\mu^2 - q(x)\right) \geq e^{\mu x_1}\left(\mu^2 - \|q\|_\infty\right) \\ &> 0 \quad \text{se} \quad \mu^2 > \|q\|_\infty . \end{aligned}$$

Con tale scelta di μ si ottiene $Lu_\varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ in Ω.
Per la prima parte della dim. $u_\varepsilon \geq 0$ in Ω $\forall \varepsilon > 0$
cioè $u(x) \geq -\varepsilon\varphi(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon > 0$. Prendo $\varepsilon \to 0$
e trovo $u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$. □.

Teorema 2 (principio del max forte)

$Lu = -\Delta u + q(x)u$ con $q(x) \in L^\infty(\Omega)$

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
$Lu \geq 0$ in Ω
$u \geq 0$ in Ω

$\Longrightarrow$ $u > 0$ in Ω oppure $u \equiv 0$ in Ω.

Oss. Stesse considerazioni fatte dopo il teorema 1.
1) analogo risultato per L del tipo (1).
2) principio del min forte (con $\leq$ al posto di $\geq$).

dim. Chiamo $\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$.
Se $\Omega_+ = \emptyset$ allora $u \equiv 0$ in Ω.
Resta da provare che se $\Omega_+ \neq \emptyset$ allora $\Omega_+ = \Omega$.
Infatti Ω_+ è aperto (ovvio perché $\Omega_+ = u^{-1}((0,\infty))$, $(0,\infty)$ continua aperto)
e Ω_+ è chiuso in Ω (da dimostrare).
Essendo Ω connesso segue che $\Omega_+ = \Omega$.
Per provare che Ω_+ è chiuso si dimostrano:

① Se $x_0 \in \Omega_+$ allora $B_R(x_0) \subset \Omega_+$ dove $R = \text{dist}(x, \partial\Omega)$
cioè $u(x) > 0 \quad \forall x \in B_R(x_0)$.



② Se $(x_n) \subset \Omega_+$ e $x_n \to x \in \Omega$ allora $x \in \Omega_+$
($\Rightarrow \Omega_+$ è chiuso in Ω.)

Dimostro ② - Se $x_n \to x$ allora $\underbrace{\text{dist}(x_n, \partial\Omega)}_{R_n} \longrightarrow \underbrace{\text{dist}(x, \partial\Omega)}_{R}$

So che $R > 0$ perché $x \in \Omega$

Quindi $|x_n - x| < R_n$ per n suff. grande perché $|x_n - x| \to 0$
mentre $R_n \to R > 0$. Dunque $x \in B_{R_n}(x_n) \subset \Omega_+$ cioè $u(x) > 0$.
cioè $u \in \Omega_+$. (① ↑)

Dimostro ①. So che $u(x_0) > 0$.

Per continuità $\exists\, r > 0$ t.c. $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega_+$



Chiamo $A = B_R(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$

verifico che $u > 0$ in A.

A tale scopo utilizzo il principio del max debole fondando l'operatore
$\tilde{L} = -\Delta + \tilde{q}$ con $\tilde{q}(x) = q(x) + \|q\|_\infty \geq 0$
e una funzione $v = u - \delta\varphi$ con $\delta > 0$ costante
e $\varphi(x)$ opportuna funzione > 0 in A. Mi serve

Ⓐ $\tilde{L}v \geq 0$ in A

Ⓑ $v|_{\partial A} \geq 0$

Da Ⓐ e Ⓑ via teorema 1 segue che $v \geq 0$ in A
cioè $u \geq \delta\varphi$ in $A \Longrightarrow u > 0$ in A
($\varphi > 0$ in A)

La funzione $\varphi(x)$ è data da $\varphi(x) = e^{-\mu|x-x_0|^2} - e^{-\mu R^2}$
Per $x \in B_r(x_0)$ si ha $\varphi(x) > 0$ $\mu > 0$ opportuno.
Le costanti $\delta > 0$ e $\mu > 0$ vanno scelte in modo da

garantisce (A) e (B).

Calcolo $\Delta\varphi = \operatorname{div}\left(\nabla\left(e^{-\mu|x-x_0|^2}\right)\right) =$

$= \operatorname{div}\left[e^{-\mu|x-x_0|^2}(-2\mu(x-x_0))\right]$

$= -2\mu\left\{\nabla\left(e^{-\mu|x-x_0|^2}\right)\cdot(x-x_0) + e^{-\mu|x-x_0|^2}\operatorname{div}(x-x_0)\right\}$

$= 4\mu^2 e^{-\mu|x-x_0|^2}(x-x_0)\cdot(x_0-x_0) - 2\mu N e^{-\mu|x-x_0|^2}$

$= e^{-\mu|x-x_0|^2}\left[4\mu^2|x-x_0|^2 - 2\mu N\right]$

$$\tilde{L}v = \tilde{L}(u-\delta\varphi) = \underbrace{Lu + \|q\|_\infty u}_{\tilde{L}u} - \delta\underbrace{\left(-\Delta\varphi + \tilde{q}\varphi\right)}_{\tilde{L}\varphi}$$

$$\geq \delta e^{-\mu|x-x_0|^2}\left[4\mu^2\underbrace{|x-x_0|^2}_{\geq r^2} - 2\mu N \underbrace{-\tilde{q}(x)}_{\geq -\|\tilde{q}\|_\infty \geq -2\|q\|_\infty}\right] + \underbrace{\delta\tilde{q}(x)e^{\mu R^2}}_{\geq 0}$$

$Lu \geq 0$ in Ω, $u \geq 0$ in Ω

$x \in A$

$$\tilde{L}v \geq \delta e^{-\mu|x-x_0|^2}\left[4\mu^2 r^2 - 2\mu N - 2\|q\|_\infty\right] > 0$$

se prendo $\mu > 0$ t.c. $[\dots] > 0$.

$\exists\, \mu > 0$ t.c. $\tilde{L}v(x) > 0 \quad \forall x \in A$. cioè vale (A)

Avendo fissato μ, verifico (B) cioè controllo $v|_{\partial A}$

$\partial A = \partial B_R(x_0) \cup \partial B_r(x_0)$.

Su $\partial B_R(x_0)$ $\varphi(x) = 0$ e $v(x) = u(x) \geq 0$

Su $\partial B_r(x_0)$ $\varphi(x) = e^{-\mu r^2} - e^{-\mu R^2}$ e $u(x) \geq \min_{\partial B_r(x_0)} u = \alpha > 0$

Quindi $r > 0$ t.c. $u > 0$ in $\overline{B_r(x_0)}$. Quindi

$$v(x) = u(x) - \delta\varphi(x) \geq \alpha - \delta\left(e^{-\mu r^2} - e^{-\mu R^2}\right) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

$x \in \partial B_r(x_0)$

se fisso $\delta > 0$ sufficientem. piccolo. Dunque (B) vale.

Si procede e si conclude come descritto sopra. □

Applicazioni:

Teorema Sia λ_1 il primo autovalore di $-\Delta$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$

Allora (1) ogni autofunzione relativa a λ_1 ha segno costante. Inoltre (2) λ_1 è autovalore semplice

(cioè il relativo autospazio ha dim 1).

Dim ① Uso la caratterizz. variazionale di λ_1

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$ quoziente di Rayleigh.

Sia $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ autofunzione. Allora

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla h \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi h \, dx \qquad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

In particolare con $h = \varphi$ $\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi^2 dx$.

$\Rightarrow$ φ è punto di minimo $\Rightarrow$ anche $|\varphi|$ è punto di minimo (perché $|\varphi| \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $|\nabla|\varphi|| = |\nabla\varphi|$ q.o.).

$\Rightarrow$ $|\varphi|$ è un'autofunzione relativa a λ_1.

So che $|\varphi| \in C^\infty(\Omega)$ - Si può dimostrare che se $\partial\Omega$ è regolare allora $|\varphi| \in C(\bar\Omega)$ - Quindi $|\varphi|$ risulta soluz. classica di $\begin{cases} -\Delta|\varphi| = \lambda_1 |\varphi| & \text{in } \Omega \\ |\varphi| = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

In particolare $-\Delta|\varphi| \geq 0$ in Ω - Possiamo applicare il principio del max forte da cui si deduce che $|\varphi| > 0$ in Ω oppure $|\varphi| \equiv 0$ in Ω (caso escluso perché se no $\varphi \equiv 0$ ma φ autofunzione e quindi $\varphi \not\equiv 0$). Dunque $|\varphi(x)| > 0 \ \forall x \in \Omega$ cioè φ non si annulla mai in Ω.

② Siano φ e $\tilde\varphi$ due autofunzioni relative a λ_1.

Considero $u(x) = \varphi(x) - \alpha\tilde\varphi(x)$ con α così scelto fisso $x_0 \in \Omega$ e prendo $\alpha = \frac{\varphi(x_0)}{\tilde\varphi(x_0)}$ (ben definito perché per ① $\tilde\varphi(x_0) \neq 0$). Tale u verifica

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

invita $u(x_0) = \varphi(x_0) - \alpha \tilde{\varphi}(x_0) = 0$ per la scelta di α.
Dunque u non può essere autofunzione (perché u si annulla in x_0). $\Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow \varphi = \alpha \tilde{\varphi}$
Cioè λ_1 è autovalore semplice. □

Teorema Le autofunzioni relative a λ_n con $n > 1$ devono cambiare segno ovvero se il problema

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha soluzione allora $\lambda = \lambda_1$.

Dim. Sia λ un autovalore per cui (P) ha una soluzione classica u. Tale u verifica

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = \lambda \int_\Omega u h \, dx \qquad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Scelgo $h = \varphi_1 > 0$ autofunzione relativa a λ_1.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 \, dx = \lambda \int_\Omega u \varphi_1 \, dx \qquad (*)$$

Essendo φ_1 autofunz. relativa a λ_1 vale che $\int_\Omega \nabla \varphi_1 \cdot \nabla h \, dx = \lambda_1 \int_\Omega h \varphi_1 \, dx \quad \forall h \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Ora prendo $h = u$ e trovo che $\int_\Omega \nabla \varphi_1 \cdot \nabla u \, dx = \lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1 \, dx \qquad (**)$

Da $(*)$ e $(**)$ deduco che

$$\lambda \int_\Omega u \varphi_1 \, dx = \lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1 \, dx$$

Essendo $u > 0$ e $\varphi_1 > 0$ in Ω, $\int_\Omega u \varphi_1 \, dx > 0$

Pertanto $\lambda = \lambda_1$. □