Metodi variazionali – Lezione 17

Titolo nota 03/04/2020

Osservazione

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + q(x)u$ operatore unif. ellittico

$$R(u) = \frac{\int_\Omega [(A(x)\nabla u)\cdot \nabla u + q(x)u^2]\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx} \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}$$

← quoziente di Rayleigh

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ u\neq 0}} R(u)$$ formula di Rayleigh.

λ_1 = autovalore principale.

$\exists\ \varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}$ t.c. $R(\varphi_1) = \lambda_1$.

$$\lambda_2 = \inf\{R(u) : u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ u\neq 0,\ \int_\Omega u\varphi_1\,dx = 0\}$$

$\exists\ \varphi_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}$ $\int_\Omega \varphi_1\varphi_2\,dx = 0$ t.c. $R(\varphi_2) = \lambda_2$.

φ_2 autofunzione relativa a λ_2.

$\lambda_2 \geq \lambda_1$ – Non può essere $\lambda_2 = \lambda_1$ – Altrimenti essendo λ_1 semplice $\exists\ \alpha\in\mathbb{R}$ t.c. $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$ –

$0 = \int_\Omega \varphi_1\varphi_2\,dx \Longrightarrow \alpha = 0$ ↯ perché $\varphi_2 \neq 0$.

Dunque $\lambda_1 < \lambda_2$ (ciò esprime il fatto che λ_1 è semplice)

$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$

Completo la discussione sul principio del max con:

Teorema (lemma di Hopf)

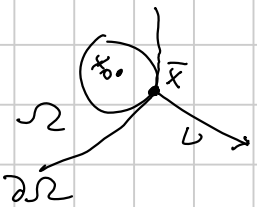
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$Lu = -\Delta u + q(x)u$ con $q \in L^\infty(\Omega)$

Sia $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ t.c. $Lu(x) \geq 0$ $\forall x\in\Omega$ e $u > 0$ in Ω – Sia $\bar x \in \partial\Omega$ dove

1) $u(\bar x) = 0$
2) in $\bar x$ vale la proprietà di sfera interna, cioè

$\exists\, x_0 \in \Omega$, $R > 0$ t.c. $B_R(x_0) \subset \Omega$
e $\bar{x} \in \partial B_R(x_0)$

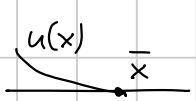


quindi $R = \text{dist}(x_0, \partial\Omega) = |\bar{x} - x_0|$

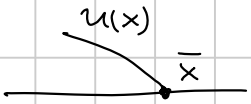
3) $\exists\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^-} \dfrac{u(\bar{x}+\varepsilon\nu) - u(\bar{x})}{\varepsilon}$

dove $\nu = \dfrac{\bar{x} - x_0}{|\bar{x} - x_0|}$

Allora $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}) < 0$



No



Sì

<u>Osservazioni</u> ① Il lemma di Hopf vale più in generale per operatori ellittici. ② Si può rinunciare a chiedere che $\exists \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x})$ - In tal caso la tesi è che

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^-} \frac{u(\bar{x}+\varepsilon\nu) - u(\bar{x})}{\varepsilon} < 0$$

③ La proprietà di sfera interna riguarda la geometria del dominio



Esempio di dominio t.c. non vale la proprietà di sfera interna in $\bar{x}$.

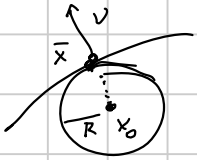
Se Ω è un dominio con $\partial\Omega \in C^2$ allora vale la proprietà di sfera interna in ogni punto di $\partial\Omega$.

<u>dim</u>. Ripendo la dim del principio del max forte.
Si considera una funzione ausiliaria

$$v(x) = u(x) - \delta\varphi(x) \quad \text{con } \varphi(x) = e^{-\mu|x-x_0|^2} - e^{-\mu R^2}$$

$\exists\, \delta > 0,\ \mu > 0$ t.c. $v(x) > 0\ \ \forall x \in B_R(x_0)$.

$$\frac{u(\bar{x}+\varepsilon\nu) - u(\bar{x})}{\varepsilon} = \frac{u(\bar{x}+\varepsilon\nu)}{\varepsilon} \leq \frac{\delta\varphi(\bar{x}+\varepsilon\nu)}{\varepsilon} = (*)$$



$u(\bar{x}) = 0$

$\bar{x} + \varepsilon\nu \in B_R(x_0)$
$u(\bar{x}+\varepsilon\nu) > \delta\varphi(\bar{x}+\varepsilon\nu)$
$\varepsilon < 0$

$\bar{x} \in \partial B_R(x_0)$
$\varphi(\bar{x}) = 0$

$$(*) = \delta\ \frac{\varphi(\bar{x}+\varepsilon\nu) - \varphi(\bar{x})}{\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon < 0 \text{ con } |\varepsilon| < R.$$

Passo al limite $\varepsilon \to 0^-$ e trovo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x}) \leq \delta\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\bar{x}) = \delta\ \nabla\varphi(\bar{x}) \cdot \nu = \delta\left[-2\mu e^{-\mu|\bar{x}-x_0|^2}(\bar{x} - x_0)\right] \cdot \nu$$

$$= -2\delta\mu\, e^{-\mu|\bar{x}-x_0|^2}\,|\bar{x}-x_0| < 0. \qquad \square$$

$\nu = \frac{\bar{x}-x_0}{|\bar{x}-x_0|}$

Disuguaglianza di Rayleigh-Faber-Krahn.

Un problema di acustica

Rayleigh in "The theory of Sound" (1877) afferma che tra tutte le membrane della stessa area e con le stesse proprietà fisiche, quella circolare ha la frequenza principale più bassa.



Modellizzazione matematica

L'onda è il grafico di una funzione $z = u(x,y)$ che deve risolvere

$$(P)\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

La frequenza principale è data da $\sqrt{\lambda}$.

Per quali λ tale problema ha soluz?

Per quali domini Ω si ha che il corrispondente $\lambda = \lambda(\Omega)$ è più basso?

Sappiamo già che se (P) ha sol. deve essere

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_1(\Omega) =$ autovalore principale di $L = -\Delta$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$

<u>Teorema</u> $\forall$ dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ si ha che $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$ dove Ω^* è la palla di $\mathbb{R}^N$ con la stessa misura di Ω.
(disuguaglianza di Rayleigh-Faber-Krahn).

<u>Oss</u>. Si può riformulare così: fissato $\alpha > 0$

$$\inf\{\lambda_1(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ dominio limitato}, |\Omega| = \alpha\} =$$

$$= \lambda_1(\Omega^*) \quad \text{con } \Omega^* = B_R \text{ t.c. } |\Omega^*| = \alpha.$$

($|\Omega|$ misura di Lebesgue N-dim di Ω.)

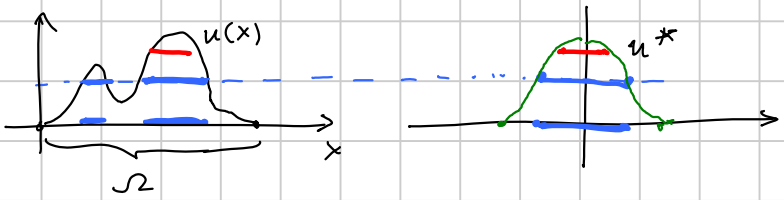
È un problema di ottimizzazione di forma, in cui la classe di minimizzazione è un insieme di domini di $\mathbb{R}^N$ (e non di funzioni).

Per dimostrare RFK si utilizzano:

- caratterizz. variazionale di λ_1
- teoria della simmetrizzazione di Schwarz (riarrangiamenti sferici decrescenti).

Teoria della simmetrizzazione di Schwarz.

Idea: associo ad ogni $u: \Omega \to \mathbb{R}$ un'altra funzione $u^*: \Omega^* \to \mathbb{R}$ radialm. simetrica e equimisurabile.



Notazioni: dato un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^N$
poniamo $|E| = m(E)$ = misura di Lebesgue N-dim di E
E^* = palla di centro 0 e con $|E^*| = |E|$
Se E è aperto E^* = palla aperta, se E chiuso, E^* = palla chiusa

Sia $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato
supponiamo u continua in $\overline{\Omega}$, $u \geq 0$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$.
Ω^* = palla di centro 0 e $|\Omega^*| = |\Omega|$



Fissato $x \in \overline{\Omega^*}$ considero la palla massimale $\overline{B}_R$ che contiene x cioè con $R = |x|$.
Prendo gli insiemi di sopralivello $\{u \geq t\} = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) \geq t\}$
con $|\{u \geq t\}| \geq |B_R|$
$|\{u \geq t_1\}| < |B_R|$ mentre $|\{u \geq t_2\}| > |B_R|$.

Chiamo $I_x = \{ t \geq 0 : \underbrace{|\{u \geq t\}| \geq |B_R|}_{\text{equivale a } \{u \geq t\}^* \supset B_R} \}$
cioè $x \in \{u \geq t\}^*$ = simmetrizzato di $\{u \geq t\}$.

Definiamo $u^*(x) = \sup I_x$
$= \sup \{ t \geq 0 : x \in \{u \geq t\}^* \}$.

La funzione $u^* : \overline{\Omega^*} \longrightarrow (0, \infty)$ si chiama riarrangiamento sferico decrescente di u -

Osserv. La def. si estende al caso di funzioni $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabili, Ω dominio qualunque. Bisogna chiedere che $|\{u \geq t\}| < \infty \ \forall t > 0$ (si dice che u decade all'infinito).
Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ senza chiedere $u \geq 0$, si prende $|u|$ e si costruisce u^* rispetto a $|u|$.

La funzione u^* verifica:

a) u^* radialm. simmetrica cioè
$x_1, x_2 \in \Omega^*$ con $|x_1| = |x_2| \Longrightarrow u^*(x_1) = u^*(x_2)$.

b) u^* decrescente rispetto a $|x|$ cioè
$x_1, x_2 \in \Omega^*$ con $|x_1| \leq |x_2| \Longrightarrow u^*(x_1) \geq u^*(x_2)$.

c) equimisurabilità: $|\{u^* \geq t\}| = |\{u \geq t\}| \quad \forall t > 0$.

Proprietà utili del riarrang. sferico decrescente

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato
$u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ u misurabile con $u \geq 0$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$ e sia $u^* : \overline{\Omega^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ il suo riarrang. sferico decrescente -

1) Se u è continua in $\overline{\Omega}$ allora u^* è continua in $\overline{\Omega^*}$
Inoltre $u^*|_{\partial\Omega^*} = 0$.

2) $\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^*} u^*$

3) Date $u, v : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ con le proprietà precedenti e dette u^* e v^* i rispettivi riarrang. sferici decres.
allora $\int_{\Omega} uv \, dx \leq \int_{\Omega^*} u^* v^* \, dx$ (Hardy - Littlewood).

4) Fissato $p \in (1, \infty)$ se $u \in L^p(\Omega)$ allora $u^* \in L^p(\Omega^*)$

e $\int_\Omega u^p dx = \int_{\Omega^*} (u^*)^p dx$

5) Fissato $p \in [1, \infty)$ se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\overset{u \geq 0}{\vee}$ allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \quad \text{(Polya - Szegö)}.$$

6) Se u è lipschitz. in $\overline{\Omega}$ anche u^* lo è in $\overline{\Omega^*}$ con la stessa costante di Lipschitz.

osservazioni su 5) – Essendo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, esiste un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ t.c. $u(x) = 0 \ \forall x \notin \Omega$
Dunque u^* è ben definito in $\overline{\Omega^*}$ e possiamo estenderlo a 0 fuori da $\overline{\Omega^*}$ (l'estensione è continua perché $u^*|_{\partial\Omega^*} = 0$). Inoltre per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ $\exists \nabla u^*(x)$ perché u^* è radialm. simm. e decrescente – In generale se $g(r)$ è monotona ($r \in \mathbb{R}$) allora $\exists g'(r)$ per q.o. r. Inoltre se $f(x) = g(|x|)$ allora $\nabla f(x) = g'(|x|)\frac{x}{|x|}$ per gli x t.c. $\exists g'(|x|)$ –

Riferimento bibliografico: Bandle, Isoperimetric inequalities and Applications.

Ai nostri scopi serviranno solo le proprietà 4) e 5).

Dimostrazione della disug. di RFK.

Fisso un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^N$ e chiamo Ω^* = palla aperta centrata in 0 con $|\Omega^*| = |\Omega|$.

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} \qquad \text{idem per } \lambda_1(\Omega^*).$$

Essendo $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $W_0^{1,2}(\Omega)$, $\exists (u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ $u_n \neq 0$ t.c. $R(u_n) \longrightarrow \lambda_1(\Omega)$

dove $R(u) = \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$ –

Anche la succ. $(|u_n|)$ è minimizzante perché

$|\nabla |u_n|| = |\nabla u_n|$ q.o. e quindi

$$\frac{\int_\Omega |\nabla |u_n||^2 dx}{\int |u_n|^2 dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx}{\int u_n^2 dx} \longrightarrow \lambda_1(\Omega).$$

In generale $|u_n| \in C_c(\Omega)$ ma non è detto che sia C^∞. Regolarizzo $|u_n|$ per convoluzione -
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \varepsilon_n > 0$ t.c. $\varphi_{\varepsilon_n} * |u_n| = v_n$ t.c.

$$\int_\Omega (\varphi_{\varepsilon_n} * |u_n|)^2 dx \geq \int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{1}{n}$$

(possibile perché $\varphi_\varepsilon * |u_n| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} |u_n|$ in L^2).

e anche $\int_\Omega |\nabla (\varphi_{\varepsilon_n} * |u_n|)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla |u_n||^2 dx + \frac{1}{n}$

(possibile perché $\nabla(\varphi_\varepsilon * |u_n|) = \varphi_\varepsilon * (\nabla |u_n|) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \nabla |u_n|$ in L^2).

Chiamo $v_n = \varphi_{\varepsilon_n} * |u_n|$. Si ha che

$$R(v_n) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{n}}{\int_\Omega u_n^2 dx - \frac{1}{n}}, \quad \begin{array}{l} v_n \in C_c^\infty(\Omega) \\ v_n \geq 0 \text{ in } \Omega \end{array}$$

Considero ora $v_n^* =$ riarrang. sferico decrescente di v_n.

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq R(v_n^*) = \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla v_n^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*} (v_n^*)^2 dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^*|^2 dx}{\int_{\Omega^*} (v_n^*)^2 dx} \leq$$

$$\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx}{\int_\Omega v_n^2 dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx}{\int_\Omega v_n^2 dx} = R(v_n)$$

$\uparrow$ 4) e 5)

$$\Longrightarrow \lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{n}}{\int_\Omega u_n^2 dx - \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda_1(\Omega). \qquad \square$$