Metodi variazionali – Lezione 18

Titolo nota 05/04/2020

Il principio del massimo – Result dell'autovalore principale

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$L = -\Delta + q$ dove $q \in L^\infty(\Omega)$ $\quad (Lu = -\Delta u + q(x)u)$

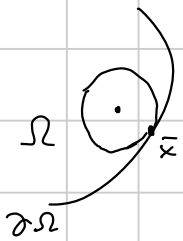
Supponiamo $q \geq 0$ in Ω.

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega) \\ Lu(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \\ u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \qquad (PM)$$

Inoltre se $u \not\equiv 0$ allora $u(x) > 0 \ \forall x \in \Omega$ $\quad (PM+)$

Inoltre

$$\forall\, \bar x \in \partial\Omega \text{ t.c.} \left\{\begin{array}{l} u(\bar x) = 0 \\ \text{vale la proprietà di sfera interna in } \bar x \\ \exists\, \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar x) \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(\bar x) < 0 \qquad (Hopf)$$



(PM), $(PM+)$, $(Hopf)$ si possono enunciare anche per operatori ellittici più generali della forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

con $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, uniforme ellitticità e $c(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$.

<u>Qs</u> Possiamo indebolire l'ipotesi $q \geq 0$ in Ω?
(o $c \geq 0$ in Ω).

Sì in termini dell'autovalore principale

Considero solo operatori di Schrödinger $L = -\Delta + q$

denoto $\lambda_1(q)$ = primo autovalore di $-\Delta+q$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Vale che

$$\lambda_1(q) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q(x) u^2)\, dx}{\int_\Omega u^2\, dx}$$

formula di Rayleigh

(PM), (PM+), (Hopf) valgono ancora se anziché chiedere $q \geq 0$ in Ω si assume $\lambda_1(q) > 0$.

Serve chiedere in più che $u \in W^{1,2}(\Omega)$ $\left(\Longleftrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty\right)$ (condizione in generale non garantita da $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$). Tale ipotesi extra su u è relativamente blanda.

Osservazione Se $q \geq 0$ in Ω allora $\lambda_1(q) > 0$ perché $\lambda_1(q) \geq \inf_{\substack{W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} > 0$.

Ci possono essere funzioni $q \in L^\infty(\Omega)$ che cambiano segno t.c. $\lambda_1(q) > 0$.

L'ipotesi $\lambda_1(q) > 0$ è più debole e non equivalente a chiedere $q \geq 0$ in Ω.

Vogliamo provare:

Teorema (principio del max)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato

$L = -\Delta + q$ con $q \in L^\infty(\Omega)$ t.c. $\lambda_1(q) > 0$.

Allora vale

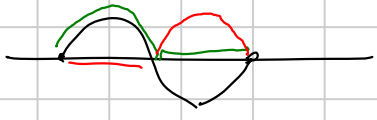
$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega) \\ Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow u \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Premesse utili (sugli spazi di Sobolev).

Data una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ denoto

$u^- = -\min\{u, 0\} = \frac{1}{2}(|u| - u)$ parte negativa di u

$u^+ = \max\{u, 0\} = \frac{1}{2}(|u| + u)$ parte positiva di u



Vale che $u = u^+ - u^-$ e $|u| = u^+ + u^-$.

Inoltre $u^- u^+ = 0$

Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ allora $|u| \in W^{1,2}(\Omega)$

(segue da un teorema di Stampacchia: se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitz allora $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(G \circ u) = G'(u)\nabla u$) si applica con $G(t) = |t|$.

↑ esiste q.o. ← Teorema di Rademacher

$u \in W^{1,2}(\Omega) \Longrightarrow u^\pm \in W^{1,2}(\Omega)$. Inoltre

$$\int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega (u^+)^2 dx + \int_\Omega (u^-)^2 dx$$

$$\nabla u^+ \cdot \nabla u^- = 0 \quad \text{q.o.} \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx$$

<u>def.</u> Una soprasoluz. debole di $L = -\Delta + q$ è una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ t.c.

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla h + q(x) u h) dx \geq 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega) \quad h \geq 0$$

In tal caso scrivo $Lu \geq 0$ in Ω in senso debole.

Inoltre u verifica $u|_{\partial\Omega} \geq 0$ in senso debole se $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

<u>Lemma</u> Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$. Allora

$$\begin{cases} Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \geq 0 \end{cases} \text{ in senso classico} \Longrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \text{ in senso debole.}$$

<u>dim.</u> $\forall h \in C_c^\infty(\Omega)$ $h \geq 0$ si ha che

$$0 \le \int_\Omega (Lu)h\,dx = \int_\Omega (-\Delta u + q(x)u)h\,dx$$

$$= -\int_{\partial\Omega} h\,\nabla u\cdot\nu\,d\sigma + \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla h + q(x)uh)\,dx$$

$=$ ↑ thm divergenza

$\int_{\partial\Omega} = 0$ perché $h=0$ su un intorno di $\partial\Omega$

$\Longrightarrow Lu \ge 0$ in Ω in senso debole.

So che $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ e $u(x) \ge 0 \ \forall x \in \partial\Omega$

$\Longrightarrow u^- \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ e $u^-(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega$.

$\Longrightarrow u^- \in W^{1,2}_0(\Omega)$ (cfr. thm. IX.17 e successiva osservazione 20 in Brezis, Analisi funzionale).

Dunque $u|_{\partial\Omega} \ge 0$ in senso debole ☐

Teorema (principio del max per soluz. deboli).

Sia $q \in L^\infty(\Omega)$ t.c. $\lambda_1(q) > 0$. Vale che

$$\left.\begin{array}{l} u \in W^{1,2}(\Omega) \\ Lu \ge 0 \text{ in } \Omega \text{ in senso debole} \\ u \ge 0 \text{ su } \partial\Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow u \ge 0 \text{ q.o. in } \Omega.$$

dim. So che $\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla h + q(x)uh)\,dx \ge 0 \ \forall h \in C^\infty_c(\Omega), h \ge 0$.

Dato che $C^\infty_c(\Omega)$ è denso in $W^{1,2}_0(\Omega)$ otteniamo

$$\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla h + q(x)uh)\,dx \ge 0 \quad \forall h \in W^{1,2}_0(\Omega),\ h \ge 0.$$

So che $u^- \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Prendo $h = u^-$

$$0 \le \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla u^- + q(x)\,u\,u^-)\,dx =$$

$$= \int_\Omega [\nabla(u^+ - u^-)\cdot\nabla u^- + q(x)(u^+ - u^-)u^-]\,dx =$$

$= $ ↑ $u = u^+ - u^-$

$\nabla u^+ \cdot \nabla u^- = 0$ q.o. $u^+u^- = 0$

$$= \int_\Omega (-|\nabla u^-|^2 - q(x)(u^-)^2)\,dx$$

$$\leq -\lambda_1(q) \int_\Omega (u^-)^2 dx \qquad \left(\lambda_1(q) \leq R(u^-)\right)$$

$\uparrow$ formula di Rayleigh; $\lambda_1(q) \geq 0$; $\int_\Omega (u^-)^2 dx \geq 0$

$$\Longrightarrow \int_\Omega (u^-)^2 dx = 0 \quad \text{cioè} \quad u^- = 0 \text{ q.o. in } \Omega \quad \text{cioè} \quad u \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega$$

□

dim del principio del max quando $\lambda_1(q) > 0$

u soprasol. classica $\Longrightarrow$ ($u \in W^{1,2}(\Omega)$, lemma) u sopras. debole $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (teorema) $u \geq 0$ q.o. in Ω $\Longrightarrow$ ($u \in C(\Omega)$) $u(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$.

□

Applicazione: regolarità fino al bordo delle soluzioni deboli del problema dell'estremo armonica nella palla

Teorema

Ω palla aperta di $\mathbb{R}^N$ centrata in 0

Data $g \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ sia u una soluz. debole di (P) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ cioè $u \in W^{1,2}(\Omega)$

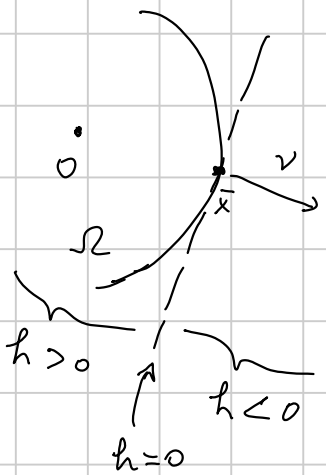
verifica $\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \, dx = 0 \quad \forall h \in C_c^\infty(\Omega) \\ u - g \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$

Allora u è q.o. uguale ad una soluz. classica di (P) cioè $\exists\, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sol. classica di (P) e t.c. $u = v$ q.o.

Dim. Abbiamo già visto (teorema di Caccioppoli-Weyl) che a meno di cambiare u su un insieme di misura nulla $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u(x) = 0 \ \forall x \in \Omega$.

Resta da provare che u si estende con continuità su $\bar{\Omega}$ e $u = g$ su $\partial\Omega$.

Strumenti: • principio del max per soprasoluz. deboli
• metodo delle barriere.



$\bar{x} \in \partial\Omega$

$$\nu = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$$

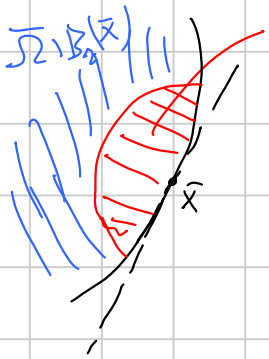
$$h(x) \underset{\text{def.}}{=} (\bar{x} - x)\cdot \nu$$

$h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \qquad C^\infty(\mathbb{R}^N)$

$h(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$

$h(\bar{x}) = 0.$

Fisso $\varepsilon > 0$. Essendo g continua in $\bar{x}$, $\exists r > 0$ t.c. $|g(x) - g(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in B_r(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$



$B_r(\bar{x}) \cap \bar{\Omega}$

Siccome $\bar{\Omega} \setminus B_r(\bar{x}) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : h(x) > 0\}$ e $\bar{\Omega} \setminus B_r(\bar{x})$ è compatto e h è continua

$$\Longrightarrow \inf_{\bar{\Omega} \setminus B_r(\bar{x})} h > 0$$

$\Longrightarrow \exists \mu > 0$ t.c. $\mu h(x) > 2\|g\|_\infty \quad \forall x \in \bar{\Omega} \setminus B_r(\bar{x})$

Introduco le funzioni barriera:

$$\varphi(x) = g(\bar{x}) - \frac{\varepsilon}{2} - \mu h(x)$$
$$\psi(x) = g(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2} + \mu h(x)$$

Osservo che $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

<u>Step 1</u> $\quad \varphi \le g \le \psi$ in $\bar{\Omega}$

<u>Step 2</u> $\quad \varphi \le u \le \psi$ in Ω (si usa il principio del max per sopra sol. deboli).

<u>Step 3</u> $\quad \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in \Omega}} u(x) = g(\bar{x})$

dimostro Step 1. $\varphi \le g \le \psi$ in $\bar{\Omega}$ equivale a $|g(x) - g(\bar{x})| \le \frac{\varepsilon}{2} + \mu h(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$.

in $\overline{\Omega} \cap B_r(\bar{x})$ $\quad |g(x) - g(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu h(x)$

in $\overline{\Omega} \setminus B_r(\bar{x})$ $\quad |g(x) - g(\bar{x})| \leq 2\|g\|_\infty \leq \mu h(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \mu h(x)$.
($x \in \overline{\Omega} \setminus B_r(\bar{x})$)

Dimostro Step 2

Chiamo $v = u - \varphi$ e $w = \psi - u$.

Essendo φ e ψ lineari $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$ in $\mathbb{R}^N$.

Dato che u è armonica in Ω anche v e w sono armoniche in Ω — in particolare $\Delta v = 0$ in Ω e $\Delta w = 0$ in Ω in senso debole.

Voglio provare che $v \geq 0$ in Ω in senso debole.
cioè $v^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

$$0 \leq v^- = (u-\varphi)^- = \big[(u-g)+(g-\varphi)\big]^- \leq (u-g)^- + (g-\varphi)^-$$
($(\alpha+\beta)^- \leq \alpha^- + \beta^-$)

$u - g \in W_0^{1,2}(\Omega) \Longrightarrow (u-g)^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

$g - \varphi \geq 0$ puntualm. su $\partial\Omega$ (Step 1)

$g - \varphi \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$

Perciò $(g-\varphi)^-(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$
$(g-\varphi)^- \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ $\Longrightarrow (g-\varphi)^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$

Dunque $\underbrace{(u-g)^- + (g-\varphi)^-}_{\Phi} \in W_0^{1,2}(\Omega)$

Ho trovato che $v^- \in W^{1,2}(\Omega)$ verifica $0 \leq v^- \leq \Phi$

con $\Phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pertanto $v^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Ho ottenuto che

$-\Delta v \geq 0$ in Ω in senso debole
$v \geq 0$ su $\partial\Omega$
$\Longrightarrow v \geq 0$ q.o. in Ω

cioè $u \geq \varphi$ q.o. in Ω $\Longrightarrow$ (u continua in Ω) $u(x) \geq \varphi(x) \ \forall x \in \Omega$

Analogamente si prova che $w = \psi - u$ verifica

$w \geq 0$ q.o. in Ω e si ottiene $u(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Dunque $\varphi(x) \leq u(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in \Omega$

Step 3 Conclusione. So che $\forall x \in \Omega$

$$g(\bar{x}) - \frac{\varepsilon}{2} - \mu h(x) = \varphi(x) \leq u(x) \leq \psi(x) = g(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2} + \mu h(x)$$

cioè $|u(x) - g(\bar{x})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu h(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Siccome h è continua in $\bar{x}$ e $h(\bar{x}) = 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.c. $|\mu h(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in B_\delta(\bar{x})$

$$\Longrightarrow \quad |u(x) - g(\bar{x})| < \varepsilon \quad \forall x \in \Omega \cap B_\delta(\bar{x}).$$

cioè $\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in \Omega}} u(x) = g(\bar{x})$. □

Appendice sui riarrangiamenti sferici decrescenti

Teorema Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio limitato $u : \Omega \to [0, \infty)$ misurabile $u \in L^p(\Omega)$ e sia $u^* : \Omega^* \to [0, \infty)$ il suo riarrang. sferico decrescente Allora $u^* \in L^p(\Omega^*)$ e $\int_{\Omega^*} (u^*)^p \, dx = \int_\Omega u^p \, dx$

($1 \leq p < \infty$ fissato, Ω^* = palla aperta centrata in 0 con $|\Omega^*| = |\Omega|$).

Dim È basata sull'equimisurabilità:

$$|\{u \geq t\}| = |\{u^* \geq t\}| \quad \forall t > 0$$

($\{u \geq t\} = \{x \in \Omega : u(x) \geq t\}$)

Osservo che in generale data una funzione $f \geq 0$

$$\chi_{\{f \geq t\}}(x) = \chi_{[0, f(x)]}(t) \quad \forall t > 0 \qquad (*)$$

$$\chi_{\{f \geq t\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \geq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\chi_{[0, f(x)]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq f(x) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\int_\Omega u(x)^p \, dx = \int_\Omega \left(\int_0^\infty \chi_{[0, u(x)^p]}(t) \, dt \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_\Omega \chi_{\{u^p \geq t\}}(x) \, dx \right) dt$$

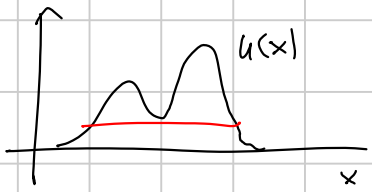
Fubini + (*)

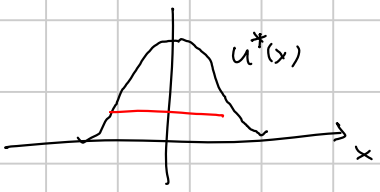
$$= \int_0^\infty |\{u^p \geq t\}| \, dt = \int_0^\infty |\{u \geq t^{1/p}\}| \, dt$$

Analogamente

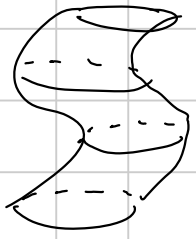
$$\int_{\Omega^*} u^*(x)^p \, dx = \int_0^\infty |\{u^* \geq t^{1/p}\}| \, dt$$

Equimisurabilità $\Longrightarrow$ tesi. $\square$





Si è usato il principio di Cavalieri: se, rispetto a un piano fissato, due solidi hanno tutte le sezioni della stessa area allora hanno lo stesso volume.





Disuguaglianza di Riesz-Sobolev:

$u, v, w : \Omega \to [0, \infty)$ $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $w \in L^r(\Omega)$

e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$ allora $\int_\Omega u \, (v * w) \, dx \leq \int_{\Omega^*} u^* \, (v^* * w^*) \, dx$

u^*, v^*, w^* rispettivamente sferici decrescenti di u, v, w.