Metodi variazionali - Lezione 19

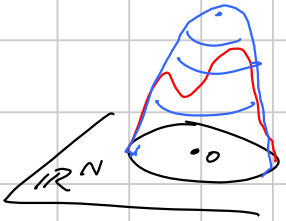
Titolo nota 05/04/2020

Ω palla aperta in $\mathbb{R}^N$ centrata in 0.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana (cioè lipschitz. sui compatti).

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ soluz. di

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$



Allora u è radialmente simmetrica e decresce rispetto a $|x|$, con $\frac{\partial u}{\partial r}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$.

Teorema elegante, dimostrato da Gidas, Ni, Nirenberg 1979

Strumenti utili per la dimostrazione
- principio del massimo per domini piccoli
- metodo dei piani mobili. (Alexandrov, 1956)

Teorema (principio del max per domini piccoli).
$\forall k > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato con $|\Omega| < \delta$ e $\forall q \in L^\infty(\Omega)$ con $\|q\|_\infty \le k$ vale che:

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega) \\ -\Delta u + q(x) u \ge 0 \quad \text{in } \Omega \\ u \gtrsim 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow u \gtrsim 0 \text{ in } \Omega.$$

Quindi se $u \not\equiv 0$ in Ω allora $u(x) > 0 \ \forall x \in \Omega$.

Il principio del max vale per operatori di Schrodinger $L = -\Delta + q$ in Ω se $|\Omega|$ è suff. piccola senza chiedere né che $q \gtrsim 0$ in Ω né $\lambda_1(q) > 0$.

Dim. Si utilizza la formula di Rayleigh e la disuguaglianza di Faber-Krahn. Denoto

$\lambda_1(\Omega, q)$ = primo autovalore di $L = -\Delta + q$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$

In particolare se $q \equiv 0$ scrivo $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega, 0)$.

Basta verificare che $\lambda_1(\Omega, q) > 0$. (si applica il principio del max visto nella lezione 18).

$$\lambda_1(\Omega, q) = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + q(x) u^2 \right) dx}{\int_\Omega u^2 dx} \geq$$

$$\geq \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \|q\|_\infty \int_\Omega u^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}$$

$$= \lambda_1(\Omega) - \|q\|_\infty \geq \lambda_1(\Omega) - k$$

$\forall\, q \in L^\infty$ con $\|q\|_\infty \leq k$.

Sia $R > 0$ t.c. $|\Omega| = |B_R|$. Per Faber-Krahn

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_R) = R^{-2} \lambda_1(B_1)$$

Osservo che $|B_R| = R^N |B_1|$. Quindi $R^N |B_1| = |\Omega|$.

$$\lambda_1(\Omega, q) \geq R^{-2} \underbrace{\lambda_1(B_1)}_{\text{costante positiva che dipende solo da } N} - k = C |\Omega|^{-\frac{2}{N}} - k > 0$$

se $|\Omega| < \delta$ per un opportuno $\delta > 0$ dipendente solo da k.

□

Dimostro il teorema di Gidas, Ni, Nirenberg

D'ora in poi $\Omega = B_R = \{ x \in \mathbb{R}^N : |x| < R \}$ $(R > 0$ fissato$)$.

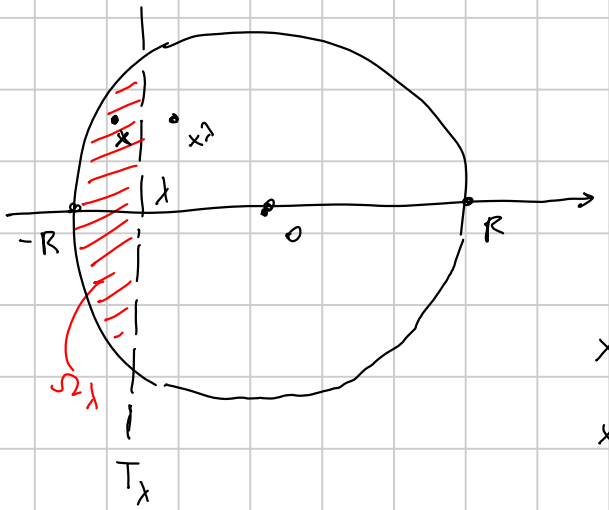
Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ soluz. di

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Lemma Denotato $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^N$ con $x' = (x_2, \dots, x_N)$ si ha che $u(x_1, x') = u(-x_1, x') \quad \forall x = (x_1, x') \in \Omega$ inoltre $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') < 0$ se $x_1 > 0$.

Dim. Introduco alcune notazioni

$\forall \lambda \in (-R, 0]$



$T_\lambda = \{ x \in \mathbb{R}^N : x_1 = \lambda \}$

$\Omega_\lambda = \{ x \in \Omega : x_1 < \lambda \}$

x^λ = simmetrico di x rispetto a T_λ

$x^\lambda = (2\lambda - x_1, x')$ se $x = (x_1, x')$

Definisco $w^\lambda(x) = u(x^\lambda) - u(x) \quad x \in \overline{\Omega_\lambda}$.

Voglio provare che $w^\lambda > 0$ in $\Omega_\lambda \quad \forall \lambda \in (-R, 0)$

cioè $$\boxed{u(2\lambda - x_1, x') > u(x_1, x') \ \forall (x_1, x') \in \Omega_\lambda} \quad (*)_\lambda$$

vale $\forall \lambda \in (-R, 0)$.

Se $(*)_\lambda$ vale $\forall \lambda \in (-R, 0)$ allora facendo $\lambda \to 0^-$ e trovo $u(-x_1, x') \geq u(x_1, x') \quad \forall x \in \Omega$ con $x_1 \leq 0$ (1)

Considero poi la funzione $v(x) = u(-x_1, x')$ e osservo che tale v verifica

$$\begin{cases} \Delta v + f(v) = 0 & \text{in } \Omega \\ v > 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

(si noti che Ω è simmetrico rispetto a x_1,

$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(-x_1, x') \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(-x_1, x')$

$\Rightarrow$ anche Δ è invariante rispetto a riflessioni).

Dunque $v(-x_1, x') \geq v(x_1, x') \quad \forall x \in \Omega$ con $x_1 \leq 0$

cioè $u(x_1, x') \geq u(-x_1, x') \quad \forall x \in \Omega$ con $x_1 \leq 0$. (2)

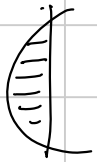
(1) e (2) $\Longrightarrow$ $u(x_1, x') = u(-x_1, x')$ $\forall x \in \Omega$ con $x_1 \le 0$

$\Longrightarrow u(x_1, x') = u(-x_1, x')$ $\forall x \in \Omega$.

ora dimostro che $(*)_\lambda$ vale $\forall \lambda \in (-R, 0)$.

$w_\lambda(x) = u(x^\lambda) - u(x)$ $\quad x \in \overline{\Omega_\lambda}$

Scrivo il problema verificato da w_λ.



$$\Delta w_\lambda(x) = \Delta u(x^\lambda) - \Delta u(x) = -f(u(x^\lambda)) + f(u(x))$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } u(x^\lambda) = u(x) \\ \dfrac{f(u(x)) - f(u(x^\lambda))}{u(x^\lambda) - u(x)} & \text{se } u(x^\lambda) \neq u(x) \end{cases} \Big[\underbrace{u(x^\lambda) - u(x)}_{w_\lambda(x)} \Big]$$

Definisco $q_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } u(x^\lambda) = u(x) \\ \dfrac{f(u(x)) - f(u(x^\lambda))}{u(x^\lambda) - u(x)} & \text{se } u(x^\lambda) \neq u(x) \end{cases}$

Dunque w_λ verifica

$$-\Delta w_\lambda + q_\lambda(x) w_\lambda = 0 \quad \text{in } \Omega_\lambda$$

Osservo che tutti i q_λ sono limitati uniformemente rispetto a λ. Infatti so che f è lipschitziana su $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$ intervallo ben definito e compatto perché $u \in C(\overline{\Omega})$.

$\exists k > 0$ t.c. $|f(s) - f(t)| \le k |s - t|$ $\forall s, t \in [-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$

$\Longrightarrow |q_\lambda(x)| \le k$ $\quad \forall x \in \overline{\Omega_\lambda}$ $\quad \forall \lambda \in (-R, 0)$.

Studio w_λ su $\partial\Omega_\lambda = \underbrace{\partial\Omega \cap \{x_1 < \lambda\}}_{\Gamma_\lambda} \cup (T_\lambda \cap \overline{\Omega})$



$w_\lambda(x) = u(x^\lambda) - u(x)$

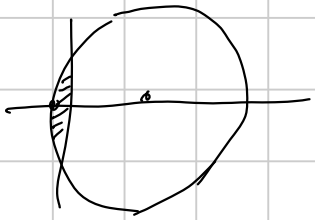
su $T_\lambda \cap \overline{\Omega}$ $\quad w_\lambda = 0$

$\forall x \in \Gamma_\lambda$ $\quad u(x) = 0$, $x^\lambda \in \Omega$ e $u(x^\lambda) > 0 \Longrightarrow w_\lambda > 0$ su Γ_λ

$w_\lambda \gneq 0$ su $\partial\Omega_\lambda$.

Dimostro che $(*)_\lambda$ $[w_\lambda > 0 \text{ in } \Omega_\lambda]$ vale per $\lambda \sim -R$.

Applico il principio del max per domini piccoli; in base al quale $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall D \subset \mathbb{R}^N$ dominio con $|D| < \delta$ $\forall q \in L^\infty(D)$ con $\|q\|_\infty \le k$ vale (PM).



$|\Omega_\lambda| \longrightarrow 0$ se $\lambda \to -R$.

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \lambda \in (-R, -R+\varepsilon)$ $|\Omega_\lambda| < \delta$.

Inoltre so che $\|q_\lambda\|_\infty \le k$. e w_λ verifica

$$\begin{cases} w_\lambda \in C^2(\Omega_\lambda) \cap C(\overline{\Omega_\lambda}) \cap W^{1,2}(\Omega_\lambda) \\ -\Delta w_\lambda + q_\lambda(x) w_\lambda = 0 \quad \text{in } \Omega_\lambda \\ w_\lambda \ge 0 \quad \text{su } \partial\Omega_\lambda \end{cases}$$

$\Longrightarrow w_\lambda \ge 0$ in $\Omega_\lambda \underset{w_\lambda \not\equiv 0}{\Longrightarrow} w_\lambda > 0$ in Ω_λ.

Dunque $(*)_\lambda$ vale $\forall \lambda \in (-R, R+\varepsilon)$.

Voglio spingere λ fino a 0 (metodo dei piani mobili)

Chiamo $\lambda_0 = \sup\{\lambda \in (-R, 0) : (*)_{\lambda'} \text{ vale } \forall \lambda' \in (-R, \lambda)\}$

Provo che $\lambda_0 < 0$. Per assurdo supponiamo $\lambda_0 < 0$ -

So che $(*)_\lambda$ vale $\forall \lambda \in (-R, \lambda_0)$

cioè $w_\lambda > 0$ in Ω_λ $\forall \lambda \in (-R, \lambda_0)$.

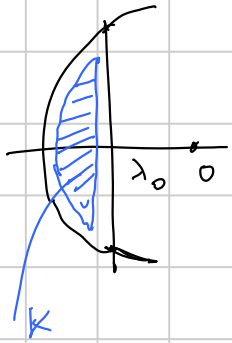
Prendo il limite $\lambda \to \lambda_0^-$ e trovo $w_{\lambda_0} \ge 0$ in Ω_{λ_0}.

Essendo $\lambda_0 < 0$ vale che

$$-\Delta w_{\lambda_0} + q_{\lambda_0}(x) w_{\lambda_0} = 0 \quad \text{in } \Omega_{\lambda_0}$$

$w_{\lambda_0}|_{\partial\Omega_{\lambda_0}} \ge 0$ e $\not\equiv 0$ perché $w_{\lambda_0}|_{\Gamma_{\lambda_0}} > 0$ essendo $\lambda_0 < 0$

$\Longrightarrow$ principio del max ($w_{\lambda_0} \ge 0$ in Ω_{λ_0}) o $\underbrace{w_{\lambda_0} \equiv 0}_{\text{escluso perché } w_{\lambda_0}|_{\Gamma_{\lambda_0}} > 0}$ oppure $w_{\lambda_0} > 0$ in Ω_{λ_0}



$\exists\ K \subset \Omega_{\lambda_0}$ K compatto
t.c. $|\Omega_{\lambda_0} \setminus K| < \frac{\delta}{2}$ ← dato dal principio del max per domini piccoli

$\min_K w_{\lambda_0} > 0$.

Per continuità $\exists \varepsilon > 0$ t.c. se $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ allora
$|\Omega_\lambda \setminus K| < \delta$ e $\min_K w_\lambda > 0$.

Applico il principio del max a w_λ relativamente al dominio $D_\lambda = \Omega_\lambda \setminus K$. So che

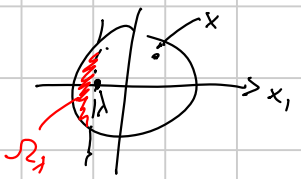
$$\left.\begin{aligned} -\Delta w_\lambda + q_\lambda(x) w_\lambda = 0 \quad &\text{in } D_\lambda \\ w_\lambda|_{\partial D_\lambda} \geq 0 \quad &\not\equiv \end{aligned}\right\} \Longrightarrow w_\lambda > 0 \text{ in } D_\lambda$$

$\Longrightarrow w_\lambda > 0$ in $K \cup D_\lambda = \Omega_\lambda$ vera $\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$.
$(*)_\lambda$ vale anche $\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ e dunque $\forall \lambda \in (-R, \lambda_0 + \varepsilon)$
in contraddizione con la def. di λ_0.

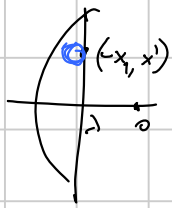
Dunque deve essere $\lambda_0 = 0$ cioè $(*)_\lambda$ vale $\forall \lambda \in (-R, 0)$.

Resta da provare che $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') < 0$ se $x_1 > 0$

Fisso $x \in \Omega$ con $x_1 > 0$
Chiamo $\lambda = -x_1 \in (-R, 0)$.



Ho provato in precedenza che $w_\lambda > 0$ in Ω_λ
$(-x_1, x') \in \partial\Omega_\lambda$



Posso applicare il Lemma di Hopf.

Infatti $w_\lambda(-x_1, x') = 0$
Vale la proprietà di sfera interna in $(-x_1, x')$
rispetto al dominio Ω_λ.

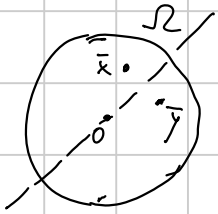
$$\exists\ \frac{\partial w_\lambda}{\partial \nu} = \frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big[u(2\lambda - x_1, x') - u(x_1, x')\Big]_{x_1 = \lambda}$$

$$= \Big[-\frac{\partial u}{\partial x_1}(2\lambda - x_1, x') - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x')\Big]_{x_1 = \lambda} = -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(\lambda, x')$$

$\xrightarrow[\text{Hopf}]{} -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(\lambda, x') < 0 \xrightarrow[u(x_1,x') = u(-x_1,x')]{\lambda = -x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') < 0$ ☒

Completo la dimostrazione del teorema.

Dimostro la radiale simmetria.



Fisso $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$ $\bar{x} \neq \bar{y}$ con $|\bar{x}| = |\bar{y}|$

Chiamo $\vec{n} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{|\bar{x} - \bar{y}|}$

$\exists$ R rotazione di $\mathbb{R}^N$ t.c. $R\vec{e}_1 = \vec{n}$ $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$

Considero $v(x) = u(Rx)$ che verifica

$$\begin{cases} \Delta v + f(v) = 0 & \text{in } \Omega \\ v > 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

(perché Ω è invariante per rotazioni e anche Δ).

Per il lemma $v(x_1, x') = v(-x_1, x')$ $\forall (x_1, x') \in \Omega$

cioè $u(Rx) = u\left(R\left(x - 2(\vec{e}_1 \cdot x)\vec{e}_1\right)\right) =$

$= u\left(Rx - 2(R\vec{e}_1 \cdot Rx) R\vec{e}_1\right)$ $\forall x \in \Omega$

Scrivendo $y = Rx$ ho che

$$u(y) = u\left(y - 2(\vec{n} \cdot y)\vec{n}\right) \quad \forall y \in \Omega$$

In particolare $y = \bar{x}$

$$u(\bar{x}) = u\left(\bar{x} - 2(\vec{n} \cdot \bar{x})\vec{n}\right)$$

Essendo $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ e $\vec{n} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{|\bar{x} - \bar{y}|}$ si trova che

$$\bar{x} - 2(\vec{n} \cdot \bar{x})\vec{n} = \bar{y}$$

Dunque $u(\bar{x}) = u(\bar{y})$ cioè u è radiale.

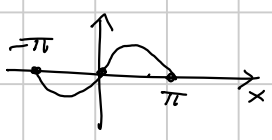
Infine $\frac{\partial u}{\partial r}(x) < 0$ perché u è radiale e $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ se $x_1 > 0$.

☒

Considerazioni finali

L'ipotesi $u > 0$ è essenziale

Controesempio in dim 1 $u(x) = \sin x$



verifica $u'' + u = 0$ in $(-\pi, \pi)$

e $u(\pm\pi) = 0$ ma u non è pari.

Anche chiedere $u \geq 0$ non è sufficiente.

Controesempio: $u(x) = 1 - \cos x$



$u \geq 0$

risolve $u'' + \underbrace{u - 1}_{f(u)} = 0$ in $(-2\pi, 2\pi)$

$u(\pm 2\pi) = 0$

u è pari ma non è radialm. decrescente.