MASTER in Mathematical and Physical Methods for Space Sciences

Università di Torino 2020-21

Corso: *Analytic Methods for the Space*

Modulo: *Controllo ottimo*

A. Bacciotti, Politecnico di Torino

# Prima Lezione

# IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI E L'EQUAZIONE DI EULERO

La moderna *Teoria del controllo ottimo* ha origine dal *Calcolo delle variazioni.* Di fatto, i problemi di ottimizzazione, che consistono nel minimizzare (o massimizzare) determinati tipi di funzioni, hanno grande interesse applicativo e sono sempre stati al centro dell'attenzione fin dalle origini del calcolo infinitesimale (se non addirittura della stessa matematica).

Un nuovo impulso si è avuto sulla metà di questo secolo con l'avvento dei calcolatori e l'affermazione della matematica discreta. Seguendo un'approccio abbastanza diverso da quello del calcolo delle variazioni, si sono sviluppate certe metodologie di grande importanza per le applicazioni belliche e industriali, quali la *Programmazione matematica lineare* e la *Programmazione dinamica*, che però avevano anch'esse come scopo ultimo quello di massimizzare o minimizzare determinate funzioni. Questi diversi filoni hanno contribuito alla fondazione della Teoria del controllo ottimo e trovano in essa un quadro di riferimento unitario.

La nostra esposizione di queste tematiche comincia con un'introduzione al Calcolo delle variazioni. E ciò non solo per meglio illustrare quale novità si apportano in seguito col punto di vista controllistico, ma anche perché questa teoria classica conserva tutt'oggi la sua validità in un'ampia gamma di applicazioni.

In questa prima lezione, ci limiteremo al problema di caratterizzare gli estremanti di un dato funzionale, con valori fissati nei punti terminali. Al centro del nostro studio si pone l'equazione di Eulero, la quale costituisce la condizione necessaria fondamentale cui devono soddisfare le soluzioni del nostro problema.

A titolo di esempio, tratteremo poi alcuni problemi classici, quali quello della minima area di rotazione e quello della brachistocrona. Concluderemo mostrando come il calcolo delle variazioni si adatti alla descrizione del problema di base della meccanica classica, e cioè allo studio del moto di un punto materiale sotto l'azione di forze conservative.

Ma prima di tutto, sarà opportuno fare qualche richiamo al problema della ricerca dei massimi e dei minimi delle funzioni di una o più variabili reali.

## Estremi di funzioni di più variabili

Sia data una funzione $f : \Omega \to \mathbf{R}$, dove $\Omega$ è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$, e sia $c$ un punto interno ad $\Omega$. Si dice che $f$ ha un *punto di minimo relativo* (o *locale*) in $c \in \Omega$ se esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in \Omega, \quad \|x - c\| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(c) \ .$$

Un'importante, ben nota condizione necessaria affinché $f$ abbia un punto di minimo in $c$ è data dalla seguente proposizione, di cui riportiamo, per comodità, anche un breve accenno di dimostrazione.

Proposizione 1

Se $f$ è differenziabile in $c$ e $f$ ha un punto di minimo relativo in $c$, allora

$$\nabla f(c) = 0 \ . \tag{1}$$

Dimostrazione

Sia $v \in \mathbf{R}^n$, $v \neq 0$. Se $f$ ha un punto di minimo in $c$, allora anche la restrizione

$$t \mapsto f(c + tv) = g(t)$$

ha un punto di minimo per $t = 0$. Ma $g$ è funzione di una sola variabile reale. Dunque si deve avere

$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = \langle \nabla f(c), v \rangle = 0$$

e l'asserto segue subito per l'arbitrarietà di $v$.

∎

Vogliamo sottolineare due aspetti della precedente dimostrazione:

- il ragionamento richiede che $v$ sia arbitrario, e si applica quindi solo se $c$ è interno al dominio $\Omega$
- il ragionamento fa uso di *incrementi direzionali*: ciò significa che il valore assunto da $f$ in $c$ viene confrontato con i valori assunti da $f$ nei punti vicini, che si ottengono spostandosi lungo le rette di equazione $c + tv$, $t \in \mathbf{R}$.

Ovviamente, si possono immaginare altri tipi di incrementi. Nella Proposizione 1, è possibile giungere alla conclusione limitandosi ad una famiglia di incrementi di tipo molto particolare, in quanto lo scopo è quello di stabilire una condizione necessaria. Diverso sarebbe il caso se si dovesse dimostrare una condizione sufficiente. Per esempio, se ci si limita ad incrementi direzionali si potrebbe essere portati a concludere che la funzione (di due variabili)

$$f(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^6$$

abbia un minimo per $x = y = 0$. Ma questo è falso, come si vede effettuando incrementi lungo la curva di equazione $y = x^2$. Questo esempio suggerisce la possibilità di definire nozioni di massimo e di minimo che dipendono dal tipo di incrementi consentiti. Simili distinzioni non hanno in genere grande interesse nel calcolo delle funzioni di più variabili, ma sono invece molto importanti, come vedremo, nel calcolo delle variazioni.

I punti $c$ in cui una funzione $f$ è differenziabile e $\nabla f(c) = 0$ si chiamano punti *stazionari* (o *estremali* o *critici*). Come noto (e come mostra anche l'esempio precedente), non sempre i punti stazionari sono effettivamente punti di minimo o di massimo.

Condizioni più precise, sia necessarie che sufficienti, affinché $f$ abbia in $c$ un punto di minimo, possano essere ottenute sotto l'ipotesi che $f$ ammetta derivate seconde continue. Posto $x = (x_1, \ldots, x_n)$, si definisce la matrice Hessiana $H_c^f$ nel punto $c$ come

$$H_c^f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(c) \end{pmatrix} .$$

Se $f \in C^2$, allora $H_c^f$ è simmetrica e quindi i suoi autovalori sono tutti reali.

<u>Proposizione 2</u>

Sia $f$ una funzione reale di classe $C^2(\Omega)$, e sia $c$ un punto interno ad $\Omega$.

Se $f$ ha un punto di minimo in $c$, allora gli autovalori di $H_c^f$ sono tutti maggiori o uguali a zero.

Se gli autovalori di $H_c^f$ sono tutti strettamente positivi, allora $f$ ha un punto di minimo in $c$.

∎

Le considerazioni appena richiamate per i punti di minimo valgono, con le ovvie modifiche, anche per i punti di massimo relativo. I punti di massimo o di minimo si dicono anche *punti di estremo* o *estremanti*. I valori che $f$ assume nei punti estremi si dicono semplicemente gli *estremi* di $f$.

La condizione (1) non è più necessaria per l'esistenza di un estremo quando si limita in qualche modo il dominio di $f$ (e quindi si limita l'arbitrarietà degli incrementi). Ciò accade in particolare nei punti della frontiera del dominio o quando siamo in presenza di vincoli. In questi casi, le informazioni che si ottengono risolvendo l'equazione (1) (e cioè quelle relative ai punti di estremo che appartengono all'interno del dominio) vanno integrate con altri tipi di considerazioni.

I punti in cui la funzione assume un valore estremo appartenente all'interno del dominio e in assenza di vincoli, si dicono anche *punti di estremo libero*: altrimenti si parla di *punti di estremo vincolato*.

## <u>Funzionali: estremi deboli ed estremi forti</u>

Veniamo adesso al Calcolo delle variazioni, il quale studia il problema di massimizzare o minimizzare funzioni reali che dipendono non da variabili reali, ma da altre funzioni. Più precisamente, nella sua versione base, il problema si enuncia nel modo seguente.

Sia $F(x, y, p) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una funzione definita su un aperto connesso $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ e ivi di classe $C^2$.

Siano inoltre assegnati quattro numeri $x_0, x_1, y_0, y_1$ con $x_0 < x_1$. Vogliamo trovare, tra tutte le funzioni $y = f(x)$ di classe $C^1$ sull'intervallo $[x_0, x_1]$ ([1]) tali che $(x, f(x), f'(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in [x_0, x_1]$, e tali che

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \tag{2}$$

quelle che rendono minimo (o massimo) il valore dell'integrale

$$J(f(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x), f'(x))\, dx \ . \tag{3}$$

Espressioni che assegnano un numero reale ad una funzione si dicono anche *funzionali*: estendendo la terminologia ricordata poco fa e relativa alle funzioni di variabili reali, funzioni che massimizzano o minimizzano (3) si diranno *estremanti*. Molto spesso si è interessati alla ricerca degli *estremanti assoluti* di un funzionale, ammesso che questi esistano. I metodi che svilupperemo in questa lezione si applicano agli *estremanti relativi*, ma questa non è una restrizione almeno fintanto che ci si interessa alle condizioni necessarie in quanto, ovviamente, ogni estremante assoluto è anche un estremante relativo.

Come vedremo nel seguito, si possono immaginare problemi più complicati, in cui l'integrando in (3) dipende da più funzioni o da derivate di ordine superiore. Si può anche pensare a problemi in cui vengono a mancare una (o entrambe) le condizioni (2). Infine, può darsi che la scelta di $f(x)$ non sia del tutto libera, ma assoggettata a qualche vincolo.

Per il momento tuttavia, ci limitiamo al problema nella versione base sopra enunciata.

Vediamo innanzi tutto tre esempi che giustificano la forma del funzionale (3) presa in considerazione.

Esempio 1 (Minima distanza)

Dati due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ del piano $xy$, trovare la curva di minima lunghezza che unisce $P_0$ e $P_1$. Si tratta quindi di un problema di minimo assoluto.

Supponendo $x_0 < x_1$, è ragionevole supporre che tale curva sia parametrizzabile come un grafico, e cioè

$$y = f(x) \ , \quad x \in [x_0, x_1] \ . \tag{4}$$

Come noto, la lunghezza è allora data da

([1]) Si ricorda che una funzione si dice di classe $C^1$ in $[x_0, x_1]$ se è continua in $[x_0, x_1]$, derivabile in $(x_0, x_1)$ e la sua derivata è continua ed estendibile con continuità su $[x_0, x_1]$.

$$J(f(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx\ . \tag{5}$$

Questo semplice esempio mostra che effettivamente l'integrando in (3) può dipendere dalla derivata della funzione incognita.

∎

Naturalmente, la soluzione al problema (5) è geometricamente ovvia. Non è invece ovvia la soluzione dei due problemi seguenti, entrambi molto interessati sia dal punto di vista storico che da quello delle applicazioni.

Esempio 2 (Area minima)

Dati i punti $x_0, x_1$, $y_0, y_1$ con $x_0 < x_1$, $y_0 < y_1$ positivi, consideriamo una funzione $y = f(x)$ tale che $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [x_0, x_1]$. Facendo ruotare il semipiano $\{(x, y) : y \geq 0\}$ intorno all'asse $x$, il grafico di $f$ descrive una superficie.

Il problema consiste nel trovare la funzione $y = f(x)$ per cui l'area della superficie risulta minima. Anche in questo caso, si tratta di un problema di minimo assoluto. A prima vista, potrebbe sembrare che la soluzione sia fornita dalla linea retta che unisce i punti $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$, ma ciò è falso. Supponiamo per esempio che sia $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $y_0 = y_1 = 1$. Se la soluzione fosse la linea retta, la superficie ottenuta per rotazione sarebbe un cilindro di area $A = 4\pi$. Consideriamo invece la curva che coincide con una semicirconferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1.

Per il secondo Teorema di Guldino, la superficie di rotazione generata ha un'area di misura $\tilde{A} = 2\pi(\pi - 2)$ ed è immediato verificare che $\tilde{A} < A$.

∎

Esempio 3 (Brachistocrona)

Dati due punti $P_0$ e $P_1$ con $x_0 < x_1$, $y_0 > y_1$, trovare la curva descritta da un punto materiale che, trovandosi in $P_0$ con velocità nulla e sotto l'azione di un campo di forze gravitazionali costante, raggiunge la posizione $P_1$ nel minimo tempo possibile.

Anche in questo caso è ragionevole pensare che la soluzione del problema possa essere parametrizzata come un grafico del tipo (4). Il funzionale da minimizzare prende la forma

$$J(f(\cdot)) = k \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{y_0 - f(x)}} dx$$

ove $k$ è una certa costante. Supponiamo infatti di avere scelto gli assi in modo che $x_0 = y_0 = 0$ e sia $y = f(x)$ la curva soluzione. Sia $t = T(x)$ il tempo impiegato dal punto materiale a spostarsi da $P_0$ ad un generico $P = (x, f(x))$, espresso in funzione di $x$. Il problema consiste nel minimizzare $T(x_1) = \displaystyle\int_0^{x_1} \frac{dT}{dx}(x)\, dx$.

Per valutare la derivata di $T(x)$ in un generico $\bar{x}$, consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{T(x) - T(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{1}{x - \bar{x}} \frac{\sqrt{(y - \bar{y})^2 + (x - \bar{x})^2}}{v(\bar{x})}$$

dove $v(x)$ indica il modulo della velocità per $x = \bar{x}$. Quest'ultimo può essere calcolato in base al principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}(v(\bar{x}))^2 = g\bar{y}$$

(la massa del punto materiale si suppone unitaria). Passando al limite per $x \to \bar{x}$, si ottiene

$$\frac{dT}{dx}(\bar{x}) = \frac{\sqrt{[f'(\bar{x})]^2 + 1}}{\sqrt{2gf(\bar{x})}} \ .$$

In tutto ciò, l'esistenza della derivata di $f$ e quindi anche di $T$ si considerano, è bene osservarlo, come dei presupposti.

Il problema della brachistocrona fu posto da Johann Bernoulli verso la fine del diciassettesimo secolo, ed è da esso che comincia la storia del Calcolo delle variazioni.

Si noti il carattere "improprio" dell'integrale da minimizzare.

∎

Torniamo adesso al caso generale, e supponiamo di aver individuato un'estremante $y = \varphi(x)$ del funzionale (3), che sia di classe $C^2$ sull'intervallo $[x_0, x_1]$, e che soddisfi alle condizioni nei punti terminali (2). Rispetto all'impostazione generale del problema proposta poc'anzi, il fatto di doversi qui restringere a estremanti di classe $C^2$ è dovuto a ragioni tecniche, e potrebbe essere evitato adottando un approccio più generale.

Per determinare le condizioni necessarie a cui $\varphi(x)$ deve soddisfare, possiamo tentare di procedere come nel caso delle funzioni di una o più variabili reali. Poiché non ci sono per il momento limitazioni alla scelta delle funzioni (a parte quelle ai punti terminali), possiamo andare a studiare come varia $J$ quando si varia "di poco" la curva di riferimento $\varphi(x)$. In generale, si chiama *variazione* una qualunque funzione $y = \delta(x) \in C^1$ tale che $\delta(x_0) = \delta(x_1) = 0$. Le variazioni giocano qui lo stesso ruolo giocato dagli incrementi nella teoria delle funzioni di una o più variabili reali. Naturalmente, se $\varphi(x)$ rappresenta un minimo del funzionale $J$, allora si avrà

$$J(\varphi(\cdot)) \leq J(\varphi(\cdot) + \delta(\cdot)) \tag{6}$$

per ogni variazione $\delta$ "sufficientemente piccola". Quest'ultima precisazione, da vedere in connessione con l'eventuale carattere locale dell'estremante, può essere interpretata in vari modi. Di fatto, si possono dare diverse nozioni di funzione estremante a seconda del criterio che si decide di adottare per valutare la distanza tra due grafici o, equivalentemente, la distanza di un grafico dell'asse delle ascisse. Ecco di seguito due possibilità.

Definizione 1

Si dice che $\varphi(x)$ è un *minimante* [*massimante*] *forte* per il funzionale $J$ se esiste $\varepsilon > 0$ tale che la (6) vale per tutte le variazioni $\delta(x)$ tali che

$$|\delta(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0, x_1] \ . \tag{7}$$

∎

La stima (7) è di fatto una stima nello spazio $C^0([x_0, x_1])$ dotato della norma della convergenza uniforme.

Definizione 2

Si dice che $\varphi(x)$ è un *minimante* [*massimante*] *debole* per il funzionale $J$ se esiste $\varepsilon > 0$ tale che la (6) vale per tutte le variazioni $\delta(x)$ tali che

$$(8) \qquad |\delta(x)| + |\delta'(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [x_0, x_1] \ .$$

∎

Anche la (8) si può interpretare come una stima in uno spazio normato. Si dimostra infatti che per lo spazio $C^1([x_0, x_1])$ delle funzione di classe $C^1$ sul chiuso $[x_0, x_1]$ l'espressione

$$\sup_{x_0 \le x \le x_1} |\delta(x)| \ + \sup_{x_0 \le x \le x_1} |\delta'(x)|$$

costituisce una norma. La differenza tra la (7) e la (8) è che in quest'ultima si richiede non solo che $\delta(x)$ sia piccola, ma che anche i valori assunti dalla sua derivata siano piccoli. Si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{n} \sin nx \ , \qquad x \in [0, 2\pi]$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, si può trovare $n$ tale che $|f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in [0, 2\pi]$. Tuttavia, qualunque sia $n > 1$ c'è un punto $\bar{x} \in [0, 2\pi]$ in cui

$$|f'(x)| = |\cos nx| = 1$$

(per esempio $\bar{x} = 0$). In altre parole, non si può rendere piccola contemporaneamente $|f(x)|$ e $|f'(x)|$. Le variazioni che soddisfano la (7) si dicono *variazioni forti*, mentre quelle che soddisfano la (8) si dicono *deboli*. Si intuisce allora che le variazioni che soddisfano alla prima definizione siano più di quelle che soddisfano alla seconda, e che quindi possano esistere estremanti deboli che non sono estremanti forti. È d'altra parte chiaro che:

Proposizione 3

Se $\varphi(x)$ è un estremante in senso forte per il funzionale (3), allora lo è anche in senso debole.

∎

Concludiamo questo paragrafo con un'ultima, ma importante osservazione. Poiché l'insieme $\Omega$ su cui $F$ è definita si suppone aperto, se $\varphi(x)$ è un estremante e $\varepsilon$ è sufficientemente piccolo allora $(x, \varphi(x) + \delta(x),\ \varphi'(x) + \delta'(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in [x_0, x_1]$, e per ogni variazione debole $\delta(x)$ soddisfacente alla (8).

L'equazione di Eulero

Siamo interessati a determinare una condizione necessaria affinché una funzione $\varphi(x)$ risulti un estremante per il funzionale $J$. A tal fine, possiamo lavorare sulla Definizione 2. Possiamo anche, se conveniente, indebolire ancora di più la nozione di estremo, limitandoci per esempio a variazioni "direzionali", ossia variazioni della forma

$$\varphi(x) + \alpha\delta(x) \tag{9}$$

dove $\delta(x)$ è stabilita una volta per tutte, e $\alpha$ è un parametro reale. Questo è molto simile a quello che si fa nel caso delle funzioni di più variabili reali. Di fatto, si rende la $J$ funzione dell'unica variabile reale $\alpha$.

Prima di andare avanti, osserviamo ancora che nel calcolo delle variazioni, le incognite sono funzioni proprio come nella teoria delle equazioni differenziali. Non è quindi sorprendente che le condizioni necessarie a cui perverremo siano rappresentate da equazioni differenziali.

Condizione necessaria affinché la funzione reale di variabile reale

$$\alpha \mapsto J(\varphi(\cdot) + \alpha\delta(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x))\, dx$$

abbia un estremo per $\alpha = 0$ (e cioè che $J$ possieda un estremante in corrispondenza della funzione $y = \varphi(x)$) è che la sua derivata si annulli. Procediamo al calcolo di questa derivata. Si osservi che, nelle ipotesi in cui ci siamo messi, sia l'integrando

$$g(x, \alpha) = F(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x))$$

che la sua derivata parziale rispetto ad $\alpha$, risultano essere funzioni continue per $x \in [x_0, x_1]$ e $\alpha \in (-1, 1)$. Sotto queste condizioni, come noto, si può portare la derivata sotto il segno di integrale. Conveniamo di indicare le derivate parziali di $F = F(x, y, p) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ come

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_p = \frac{\partial F}{\partial p} \ .$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x))\, dx \Big|_{\alpha=0} = \\ =& \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\alpha} F(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x)) \Big|_{\alpha=0} dx = \\ =& \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x))\delta(x) + F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))\delta'(x)\right]\, dx \ . \end{aligned}$$

Possiamo scrivere questo come somma di due integrali e integrare il secondo per parti. Si ricordi che abbiamo supposto $\varphi \in C^2$. Posto per comodità

$$Q(x) = F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \ , \tag{10}$$

si ha allora $Q \in C^1$ e

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} Q(x)\delta'(x)\,dx =& Q(x)\delta(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Q'(x)\delta(x)\,dx = \\ =& -\int_{x_0}^{x_1} Q'(x)\delta(x)\,dx\end{aligned}$$

in quanto $\delta(x_0) = \delta(x_1) = 0$ per ipotesi. Si arriva così alla conclusione che

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - Q'(x)\right]\delta(x)\,dx = 0 \tag{11}$$

e ciò vale comunque sia stata scelta la variazione di riferimento $\delta(x)$. Per andare avanti, abbiamo bisogno del seguente risultato, noto anche come *Lemma fondamentale del Calcolo delle variazioni.*

Lemma 1

Sia $h(x)$ una funzione continua su $[x_0, x_1]$. Se si verifica che

$$\int_{x_0}^{x_1} h(x)\delta(x)\,dx = 0$$

per ogni funzione $\delta \in C^1$ e tale che $\delta(x_0) = \delta(x_1) = 0$, allora $h(x) \equiv 0$.

Dimostrazione

Sia per assurdo, $h(\bar{x}) \neq 0$ per un certo $\bar{x} \in [x_0, x_1]$. Per fissare le idee, supponiamo anzi che $h(\bar{x}) > 0$, e che $\bar{x}$ sia interno all'intervallo. Per la permanenza del segno, esiste $\sigma > 0$ tale che

$$x_0 < \bar{x} - \sigma < \bar{x} + \sigma < x_1$$

e $h(x) > 0$ per ogni $x \in (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$.

Chiaramente, si può costruire una funzione $\delta(x)$ nulla fuori dall'intervallo $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$, positiva al suo interno e di classe $C^1$ (si può prendere per esempio $\delta(x) = (x-(\bar{x}-\sigma))^2(x-(\bar{x}+\sigma))^2$ per $x \in (\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$).

Ovviamente per tale $\delta$ si ha $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} h(x)\delta(x)\,dx > 0$ e ciò contraddice l'ipotesi.

L'applicazione che associa l'integrale $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} h(x)\delta(x)\,dx > 0$ alle date funzioni $h$, $\delta$ si può interpretare come un prodotto scalare. Il Lemma afferma dunque che se $h$ è ortogonale ad un insieme abbastanza grande di elementi dello spazio cui esso stesso appartiene, allora $h = 0$.

La dimostrazione è del tutto analoga se $h(\bar{x}) < 0$ ovvero se $\bar{x}$ coincide con uno degli estremi.

∎

Dal Lemma 1 e dalla (11) si deduce immediatamente che

$$F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - Q'(x) = 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in [x_0, x_1]$$

ovvero

$$F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \frac{d}{dx}\left[F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))\right] = 0 \ . \tag{12}$$

Riassumiamo le conclusioni cui siamo giunti fino a questo momento nel seguente teorema.

<u>Teorema 1</u>

Se $y = \varphi(x) \in C^2$ è un estremante del funzionale $J$ definito dalla (3) con le condizioni (2) allora necessariamente $\varphi(x)$ verifica l'equazione differenziale

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left[F_p(x, y, y')\right] = 0 \ . \tag{13}$$

∎

L'equazione (13) è nota come *equazione di Eulero*: in questo contesto, essa gioca lo stesso ruolo della condizione (1) nel problema della determinazione degli estremi locali liberi per le funzioni di più variabili reali. In particolare, osserviamo ancora una volta che la (13) è stata determinata come condizione necessaria cui deve soddisfare ogni estremante noto. Naturalmente nella pratica, quando si affronta lo studio di un funzionale del tipo (3), gli estremanti non sono noti, e il problema consiste anzi proprio nella loro determinazione.

Vediamo allora come si può procedere sfruttando l'informazione fornita dal Teorema 1. Il primo passo consisterà nell'impostare l'equazione differenziale (13) e cercare di trovarne tutte le soluzioni tali che

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi(x_1) = y_1 \ . \tag{14}$$

Scrivendo la (13) in maniera più esplicita si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p}(x, y, y') - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p}(x, y, y')y' - \frac{\partial^2 F}{(\partial p)^2}(x, y, y')y'' = 0 \tag{15}$$

da cui si vede che l'equazione di Eulero è un'equazione differenziale del secondo ordine, usualmente non lineare. È dunque naturale aspettarsi che l'integrale generale della (13) contenga due costanti arbitrarie. In linea di principio, le (14) sono quindi bastanti per determinare una soluzione. Tuttavia, va osservato che la (15) non è in forma normale e che le (14) non sono le usuali condizioni iniziali di un problema di Cauchy. Non vi è quindi nessuna garanzia che la (13) abbia, tenendo conto della (14), soluzione unica. Condizioni del tipo (14) sono note come *condizioni nei punti terminali* o *condizioni* al *bordo* o anche *condizioni ai limiti.*

Tra tutte le soluzioni trovate, si dovranno poi riconoscere quelle che rappresentano davvero degli estremanti. Poiché la (13) è in generale una condizione solo necessaria, non dobbiamo infatti aspettarci che tutte le sue soluzioni corrispondano effettivamente ai minimi o ai massimi del funzionale (3).

Le soluzioni della (13) si chiamano anche *funzioni stazionarie* o *estremali.*

## La funzione Hamiltoniana

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato il problema di trovare i minimi o i massimi assunti dal funzionale (3) al variare di $f$ in una classe di funzioni che siano sufficientemente regolari e che soddisfino alle condizioni nei punti terminali (2). Abbiamo provato che le soluzioni del nostro problema si trovano tra le soluzioni dell'equazione di Eulero (13). L'equazione di Eulero è un'equazione differenziale di ordine due, che si presenta, in generale, non in forma normale. In questo paragrafo mostreremo come l'equazione di Eulero si può trasformare in un sistema di due equazioni del primo ordine, in forma normale.

Cominciamo col ricordare che un'equazione del secondo ordine in forma normale

$$y'' = g(x, y, y')$$

si può trasformare in un sistema ricorrendo a nuove variabili $y_1 = y$ e $y_2 = y'$. In altre parole, la derivata prima della funzione incognita viene interpretata come una variabile ausiliaria, indipendente dalla funzione incognita stessa. L'equazione di Eulero però non è in forma normale. Ferma restando l'idea di base, che è quella di introdurre una variabile ausiliaria in sostituzione della derivata prima dell'incognita, dovremo procedere in una maniera un po' diversa. In particolare, la formula del cambiamento di variabile risulterà più complicata. Poniamo

$$q = F_p(x, y, p) \ . \tag{18}$$

Quest'ultima definisce una nuova variabile se e solo se risulta invertibile. In generale, ciò non sarà vero, e bisogna quindi introdurre un'ipotesi "ad hoc". Poiché la variabile che vogliamo rimpiazzare è la $p$, supporremo allora che esista una funzione $p = \Psi(x, y, q)$ di classe $C^1$ tale che

$$q = F_p(x, y, \Psi(x, y, q)) \qquad \forall x, y, q \ . \tag{19}$$

Una condizione sufficiente per l'esistenza di una $\Psi$ siffatta si ottiene imponendo, per esempio, che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x,y,p) \neq 0 \tag{20}$$

per ogni valore delle variabili $x$, $y$ e $p$. La (20) implica infatti che la funzione $p \mapsto F_p(x,y,p)$ è strettamente monotona e quindi invertibile qualunque siano $x$ e $y$.

Introduciamo la funzione

$$H(x,y,q) = q\Psi(x,y,q) - F(x,y,\Psi(x,y,q)) \ . \tag{21}$$

Calcoliamo le derivate parziali di $H$ rispetto a $q$ e $y$. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q} =& \Psi(x,y,q) + [q - F_p(x,y,\Psi(x,y,q))] \frac{\partial \Psi}{\partial q}(x,y,q) = \\
=& \Psi(x,y,q) \\
\frac{\partial H}{\partial y} =& - F_y(x,y,\Psi(x,y,q)) + \\
& + [q - F_p(x,y,\Psi(x,y,q))] \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y,q) = \\
=& - F_y(x,y,\Psi(x,y,q))
\end{aligned}$$

dove, in entrambi i casi, si è fatto uso della (19). Siamo ora in grado di enunciare il risultato principale di questo paragrafo.

Teorema 2

Una funzione $y = \varphi(x)$ è soluzione dell'equazione di Eulero relativa al funzionale (3) se e solo se posto, in conformità con la (10),

$$q = Q(x) = F_p(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \ , \tag{22}$$

la coppia $(\varphi(x), Q(x))$ è soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial q}(x,y,q) \\ \dfrac{dq}{dx} = - \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y,q) \ . \end{cases} \tag{23}$$

Dimostrazione

Sia $y = \varphi(x)$ una soluzione dell'equazione di Eulero. Ricordando la definizione di $\Psi$, la (22) equivale a

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \Psi(x, \varphi(x), Q(x)) \ . \tag{24}$$

Inoltre, derivando la (22) e tenendo conto dell'equazione di Eulero (13), si ha

$$\frac{dQ(x)}{dx} = F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \ .$$

Eliminando infine $\varphi'(x)$ si perviene alla

$$\frac{dQ(x)}{dx} = F_y(x, \varphi(x), \Psi(x, \varphi(x), Q(x))) \ . \tag{25}$$

Finalmente, richiamando le espressioni calcolate in precedenza per le derivate parziali di $H$, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx}(x) = \dfrac{\partial H}{\partial q}(x, \varphi(x), Q(x)) \\ \dfrac{dQ}{dx}(x) = -\dfrac{\partial H}{\partial y}(x, \varphi(x), Q(x)) \end{cases}$$

e ciò prova la prima affermazione del teorema.

Viceversa, se $y = \varphi(x)$ e $q = Q(x)$ sono soluzioni del sistema (23), allora devono valere la (24) e la (25). Ma la (24), come abbiamo già ricordato, è equivalente alla (22), derivando la quale si ottiene

$$\frac{dQ}{dx}(x) = \frac{d}{dx} F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \ .$$

Confrontando quest'ultima con la (25) si ottiene un'identità che coincide proprio con l'equazione d'Eulero.

∎

Il sistema (23) si dice in forma *Hamiltoniana*, e la funzione $H$ definita dalla (21) si chiama la *funzione Hamiltoniana* associata al funzionale (3).

La funzione $H$, quando non dipende esplicitamente da $x$, costituisce un integrale primo del sistema (23). Sia infatti $H = H(y, q)$, e sia $(\varphi(x), Q(x))$ una soluzione del sistema (23). Per ogni $x$, si ha

$$\frac{d}{dx} H(\varphi(x), Q(x)) = \frac{\partial H}{\partial y}\dot{\varphi} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

dove si è fatto uso delle (23). Ciò prova che $H(\varphi(x), Q(x)) =$ costante.

Abbiamo già osservato che la (18), nota anche come *trasformazione di Legendre*, può essere interpretata come un cambiamento di variabili (la funzione $\Psi$ ne definisce l'inversa). Il nostro problema può cioè essere trattato sia rispetto alle variabili $(y, p)$ che appaiono nell'equazione di Eulero, sia rispetto alle variabili $(y, q)$ che appaiono nel sistema (23). Queste ultime si dicono anche *variabili canoniche.*

## Esempi

In questo paragrafo, servendoci dell'equazione di Eulero, determineremo le funzioni estremali per i problemi classici introdotti poc'anzi, e cioè il problema della minima distanza, il problema della minima area di rotazione e quello della brachistocrona.

A) Minima distanza.

Si ha $F(x, y, p) = F(p) = (1 + p^2)^{1/2}$. L'equazione di Eulero prende la forma

$$\frac{d}{dx} F_p(y') = \frac{d}{dx}\frac{dF}{dp}(y') = 0$$

cioè

$$\frac{dF}{dp}(y') = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = A = \text{ costante }. \tag{37}$$

Non è difficile verificare che la funzione $p \mapsto \dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$ è crescente. Dalla (37) si deduce allora che $y' = B =$ costante.

B) Superficie di area minima.

Come sappiamo, il problema consiste nel trovare la curva di equazione $y = f(x) \geq 0$ che, ruotata intorno all'asse $x$, genera una superficie di area minima.

Per il teorema di Guldino, il problema si riduce a trovare il minimo del funzionale

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

dove $F(x, y, p) = F(y, p) = y\sqrt{1 + p^2}$. In questo caso, l'equazione di Eulero prende la forma

$$F(y, y') - F_p(y, y')y' = y\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = A = \text{ costante}$$

$$\text{ovvero} \quad y(1 + (y')^2) - y(y')^2 = A\sqrt{1 + (y')^2} \quad \text{da cui}$$

$$y = A\sqrt{1 + (y')^2}\ .$$

Poiché la formulazione stessa del problema ci porta a considerare solo funzioni non negative, possiamo da qui in avanti supporre $A \geq 0$. Inoltre, siccome $\sqrt{1 + (y')^2} \geq 1$, si osserva che la funzione incognita dovrà soddisfare la disuguaglianza $y \geq A$. Elevando al quadrato si ha

$$y^2 - A^2 = A^2(y')^2 \ .$$

Quest'ultima ammette una soluzione costante $y(x) = A$ che può essere trascurata. Abbiamo infatti già osservato in precedenza che soluzioni costanti non corrispondono certamente ai minimi assoluti cercati. Posto $y \neq A$, si deduce allora

$$\frac{(y')^2}{\dfrac{y^2}{A^2} - 1} = 1$$

ed estraendo la radice,

$$\frac{\pm y'}{\sqrt{\dfrac{y^2}{A^2} - 1}} = 1 \ .$$

Integrando per separazione di variabili, si trovano soluzioni della forma

$$y = A \cosh\left(\frac{x+B}{A}\right) \qquad \text{oppure} \qquad y = A \cosh\left(\frac{-x+B}{A}\right)$$

dove $B$ rappresenta una nuova costante, a seconda che si proceda utilizzando il segno $+$ oppure il segno $-$. In realtà, è sufficiente considerare una sola delle due funzioni, in quanto il coseno iperbolico è una funzione pari, e la scelta di $B$ è arbitraria.

I valori di $A$ e $B$ sono da determinarsi in base alle condizioni nei punti terminali. Supponiamo per esempio che $y_0 = y_1 = K$ e scriviamo $x_0 = -L$, $x_1 = L$ (il che si può sempre fare a meno di un cambiamento di coordinate). Si ha allora

$$K = A \cosh\left(\frac{B-L}{A}\right) = A \cosh\left(\frac{B+L}{A}\right) \ .$$

Usando ancora il fatto che il coseno iperbolico è una funzione pari, da questa segue necessariamente $B = 0$. Facciamo quindi la sostituzione $L = AC$. Il problema si riduce a risolvere, rispetto a $C$, l'equazione

(38) $$\frac{K}{L} C = \cosh C \ ,$$

ovvero trovare, in un piano di coordinate $(C, z)$, le intersezioni tra il grafico del coseno iperbolico e una retta per l'origine.

Per procedere nella discussione, conviene assumere come parametro l'angolo $\alpha = \operatorname{arctg}(K/L)$ formato dalla retta di equazione $z = (K/L)C$ con l'asse $C$. La posizione di tangenza tra il grafico della funzione $z = \cosh C$ e la retta si determina imponendo le condizioni

$$\begin{cases} \dfrac{K}{L}C = \cosh C \\ \dfrac{d}{dC}\left(\cosh C - \dfrac{K}{L}x\right) = \sinh C - \dfrac{K}{L} = 0 \ . \end{cases}$$

Eliminando $K$, si ottiene $\operatorname{tgh} C = 1/C$. Quest'ultima, risolta numericamente, porta ad un valore di $\alpha$ approssimativamente uguale a $56^o28'$. Se $\alpha$ è maggiore di tale valore si hanno due soluzioni della (38), e quindi due estremali della forma

$$y = \frac{L}{C}\cosh\frac{Cx}{L} \ . \tag{39}$$

Come vedremo in seguito, uno solo di questi, e precisamente quello che corrisponde al valore minimo di $C$, risulta essere effettivamente un estremante.

Si noti che l'angolo $\alpha$ dipende esclusivamente dall'ampiezza dell'intervallo e dalle condizioni assegnate nei punti terminali. Per avere soluzioni della forma (39), è quindi necessario che l'ampiezza dell'intervallo sia sufficientemente "piccola" rispetto all'altezza prestabilita nei punti terminali.

Al grafico della funzione (39) (in generale, al grafico di ogni curva parametrizzata per mezzo del coseno iperbolico) si dà il nome di *catenaria.* La stessa curva si ottiene infatti come soluzione del problema di trovare la forma assunta da una distribuzione filiforme di masse in un campo gravitazionale uniforme verticale (configurazione di minimo baricentro).

Quando la retta $z = KC/L$ non interseca il grafico della funzione $z = \cosh C$, allora non vi sono soluzioni dell'equazione di Eulero che siano di classe $C^1$ e che siano al tempo stesso compatibili con le condizioni nei punti terminali.

C) Brachistocrona.

Come abbiamo visto, in questo caso, a meno di certe costanti

$$F(x,y,p) = \sqrt{\frac{1+(p)^2}{y}} = F(y,p)$$

e poiché inizialmente $y = 0$, la funzione integranda presenta un asintoto per $x = 0$. Ciò nonostante, possiamo lo stesso applicare la teoria sviluppata in precedenza basandoci sul seguente ragionamento. Se $\varphi(x)$ è un estremante del problema originale sull'intervallo $[0, x_1]$, allora $\varphi(x)$ è chiaramente anche un estremante per lo stesso problema riformulato relativamente ad ogni intervallo $[\xi, x_1]$ (per ogni $\xi > 0$) e con le condizioni

$$y(\xi) = \varphi(\xi)\,, \qquad y(x_1) = y_1 \ .$$

L'equazione d'Eulero continua quindi ad essere una condizione necessaria di estremalità su tutti questi intervalli, e quindi in $(0, x_1]$. Per quanto riguarda l'estremo di sinistra, la condizione $y(0) = 0$ da imporre alle soluzioni dell'equazione di Eulero andrà poi sostituita, coerentemente, con una condizione del tipo $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$.

Tenendo conto della forma di $F$, l'equazione d'Eulero diventa

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = A = \text{ costante}$$

ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} = A \ .$$

Elevando al quadrato e passando ai reciproci, si ha

$$y(1+(y')^2) = \frac{1}{A^2} = 2C$$

dove $C$ è una nuova costante che sostituisce $A$. Quest'ultima non è integrabile elementarmente, ma se ne può trovare una soluzione in forma parametrica. Posto $y' = \operatorname{tg}\theta$, essa dà infatti

$$y = \frac{2C}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = 2C\cos^2\theta = C(1+\cos 2\theta)$$

che, derivando, ci dà a sua volta $\dfrac{dy}{d\theta} = -2C\sin 2\theta$. D'altra parte $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$ e quindi

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta} = \operatorname{cotg}\theta(-2C)\sin 2\theta = -4C\cos^2\theta$$

da cui

$$x = -4C\int \cos^2\theta \, d\theta = -2C\int (\cos 2\theta + 1)\, d\theta = B - 2C\theta - C\sin 2\theta \ .$$

Le costanti $C$ e $B$ sono da determinare in base alle condizioni nei punti terminali. In conclusione, si ha un estremante descritto parametricamente dalle funzioni

$$x = B - 2C\theta - C\sin 2\theta \quad , \quad y = C(1+\cos 2\theta)$$

che sono le equazioni di una *cicloide*.

## Il principio di Minima Azione

Una delle applicazioni esemplari del problema base del calcolo delle variazioni consiste nella deduzione di alcuni risultati fondamentali della Meccanica classica dal così detto *principio della minima azione* (principio di Hamilton). Consideriamo, per semplicità, il moto di una particella di massa $m$ con un solo grado di libertà in un campo di forze conservative. Indichiamo con $t$ il tempo, con $x$ la posizione della particella e con $-U(x)$ il potenziale del campo. Per l'ipotesi di conservatività, la forza $F$ agente sulla particella dipende solo dalla posizione ed è data da $F(x) = -\dfrac{dU}{dx}(x)$.

Supponiamo di conoscere gli istanti e le posizioni iniziali e finali del moto

$$x(t_0) = x_0 \ , \qquad x(t_1) = x_1 \ . \tag{40}$$

Il principio della minima azione afferma che il percorso seguito dalla particella coincide con quello che minimizza il valore del funzionale

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

dove $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$, rispetto a tutte le curve di classe $C^1$ che soddisfano le condizioni ai limiti (40). La funzione $\mathcal{L}$ si dice anche funzione *Lagrangiana*. Essa risulta la differenza di due termini: l'*energia potenziale* $U(x)$ e (con riferimento alla velocità della particella) l'*energia cinetica* $T(\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2$. A parte il differente significato dei simboli, il problema di determinare la traiettoria del moto si presenta quindi nella forma (3), (2). La traiettoria cercata si troverà allora tra le soluzioni dell'equazione di Eulero che, in questo caso, prende la forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, \dot{x}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) = 0 \qquad \text{e cioè} \qquad -\frac{dU(x)}{dx} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0,$$

da cui

$$m\ddot{x} = F(x) \ .$$

Si ritrova così l'*equazione di Newton* (secondo principio della meccanica classica) nel caso delle forze posizionali. Dall'equazione di Eulero si può anche dedurre il *principio di conservazione dell'energia* (o *Teorema delle forze vive).* A tal fine, calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t) = \\ =& \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\right]\dot{x}(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t) = \\ =& \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t)\right] \ ,\end{aligned}$$

avendo tenuto conto dell'equazione di Eulero. Possiamo allora scrivere, per ogni traiettoria del moto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) - \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) = \text{ costante.}$$

Quest'ultima espressione costituisce l'*energia totale* ed è data, per la definizione di $\mathcal{L}$, da $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = T(\dot{x}) + U(x)$.

Nel caso particolare in cui $U = 0$ (assenza di forze esterne) l'equazione di Eulero si riduce a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = 0 \qquad \text{e cioè} \qquad m\dot{x} = \text{costante}$$

che esprime il *principio della conservazione della quantità di moto.* Ma torniamo al caso generale. La quantità di moto $q = m\dot{x}$ si chiama anche *impulso* della particella. Ricordando quanto abbiamo fatto in precedenza, ci si accorge che $q$ coincide con la variabile introdotta al fine di trasformare l'equazione di Eulero in un sistema del primo ordine. In particolare, la *funzione Hamiltoniana* sarà data nel nostro caso da

$$H(x, q) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{m} + U(x)$$

(essa non è altro che l'energia totale espressa in funzione della posizione e degli impulsi) e le equazioni del moto, in forma Hamiltoniana, risultano essere

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial q} = \dfrac{q}{m} \\ \dot{q} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \ . \end{cases}$$

È immediato verificare l'equivalenza tra queste ultime e l'equazione di Newton. È anche immediato verificare che la funzione $H$ costituisce un integrale primo per questo sistema di equazioni. Da quanto abbiamo visto, segue in particolare che il moto della particella può essere descritto assegnando istante per istante la posizione e la velocità, ovvero la posizione e l'impulso. La posizione e l'impulso si identificano come le variabili canoniche del problema variazionale associato.

## Funzionali convessi

L'utilità delle condizioni necessarie risiede, come abbiamo visto, nella possibilità di caratterizzare attraverso di esse gli eventuali estremanti di un dato funzionale. Di per sé, tuttavia, nessuna condizione necessaria può garantire l'esistenza degli estremanti.

In questo paragrafo presenteremo una condizione sufficiente per l'esistenza di un estremante, che si basa più che su certe proprietà degli estremali trovati integrando l'equazione di Eulero, su una proprietà della funzione $F$ che definisce il funzionale (1).

Definizione 3

Si dice che la funzione $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ è *convessa* (rispetto alla coppia $(y, p)$) se, comunque si scelgano le terne $(x, y_1, p_1)$, $(x, y_2, p_2) \in \Omega$ si abbia

(41) $$F(x, y_1, p_1) - F(x, y_2, p_2) \geq F_y(x, y_2, p_2)(y_1 - y_2) + F_p(x, y_2, p_2)(p_1 - p_2) \ .$$

Se la disuguaglianza vale col segno invertito, la funzione $F$ si dirà *concava.*

∎

Il seguente teorema afferma, in sostanza, che nel caso di funzionali convessi o concavi l'equazione d'Eulero risulta essere condizione sufficiente, oltre che necessaria, per gli estremanti.

Teorema 3

Supponiamo che $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sia convessa (rispetto a $(y, p)$). Allora, ogni estremale $y = \varphi(x)$ soddisfacente le condizioni nei punti terminali (2) è un minimante forte assoluto del problema (3).

Analogamente, se $F$ è concava, allora $\varphi(x)$ risulta essere un massimante forte assoluto.

Dimostrazione

Facciamo la dimostrazione supponendo $F$ convessa. L'altro caso si tratta in modo del tutto analogo. Sia dunque $y = \varphi(x)$ una soluzione dell'equazione di Eulero, tale che

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \varphi(x_1) = y_1 \ . \tag{42}$$

Sia $y = f(x)$ una qualunque altra funzione ammissibile, e cioè tale che

$$(x, f(x), f'(x)) \in \Omega$$

per ogni $x \in [x_0, x_1]$ e

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad f(x_1) = y_1 \ . \tag{43}$$

Si ha

$$\begin{aligned} &F(x, f(x), f'(x)) - F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \geq \\ &\qquad \geq F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f(x) - \varphi(x)) + F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f'(x) - \varphi'(x)) \end{aligned}$$

per ogni $x \in [x_0, x_1]$. Integrando e ricordando la (13), si ha

$$\begin{aligned} J(f) - J(\varphi) \geq & \\ \geq & \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f(x) - \varphi(x)) + \\ & \quad + F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f'(x) - \varphi'(x))] \, dx = \\ = & \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{d}{dx} (F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f(x) - \varphi(x))) + \right. \\ & \quad \left. + F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f'(x) - \varphi'(x)) \right] dx = \\ = & \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} (F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f(x) - \varphi(x))) \, dx = \\ = & \, F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))(f(x) - \varphi(x)) \Big|_{x_0}^{x_1} = 0 \end{aligned}$$

in virtù delle (42), (43). In conclusione, $J(f) \geq J(\varphi)$ e l'asserto è provato.

∎

Si dice che una funzione $F$ è *strettamente convessa* se la (41) vale in senso stretto ogni volta che $(y_1, p_1) \neq (y_2, p_2)$. Non è difficile dimostrare che se $F$ è strettamente convessa, e se $\varphi_1$, $\varphi_2$ sono due minimanti, allora $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ per ogni $x \in [x_0, x_1]$ (la stessa conclusione vale, naturalmente, per i maggioranti se $F$ è strettamente concava). Si ha cioè un teorema di unicità degli estremanti.

# Esercizi

Esercizio 1

Scrivere e risolvere l'equazione di Eulero per i seguenti problemi di minimo

(a) $$\int_0^{\pi/2} ((y')^2 - y^2)\, dx \ , \qquad y(0) = 0 \ , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\int_0^1 ((y')^2 + 12xy)\, dx \ , \qquad y(0) = 0 \ , \quad y(1) = 1$$

Esercizio 2

Mostrare che il problema di minimizzare il funzionale

$$\int_0^1 (y^2 + x^2 y')\, dx$$

con le condizioni $y(0) = 0$, $y(1) = a$ può avere soluzioni solo se $a = 1$.

Esercizio 3

Calcolare gli estremali per i seguenti problemi di minimo:

(a) $$\int_{-1}^1 ((y')^2 + x)\, dx \quad \text{con} \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1$$

(b) $$\int_0^2 (y' + e^{y'})\, dx \quad \text{con} \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 3$$

(c) $$\int_0^1 (y + (y')^2)\, dx \quad \text{con} \quad y(0) = y(1) = 1$$

(d) $$\int_1^2 x^2 (y')^2\, dx \qquad \text{con} \quad y(1) = y(2) = 2$$

$$\text{e con} \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

(e) $$\int_0^1 y^2(1+y')^2\,dx \quad \text{con} \quad y(0)=0,\;\; y(1)=1$$

(f) $$\int_0^1 y(y')^2\,dx \quad \text{con} \quad y(0)=0,\;\; y(1)=4$$

(g) $$\int_{-4}^4 ((y')^4+yy'+y'+y)\,dx \quad \text{con} \quad y(-4)=y(4)=0$$

Esercizio 4

Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, gli estremali per il problema

$$\int_0^1 \left[ay^2+yy'+(y')^2\right]\,dx$$

nei casi seguenti: $y(0)=y(1)=0$ e $y(0)=y(1)=1$.

Esercizio 5

Dati i due problemi seguenti

(a) $$\int_0^1 \left[\frac{(y')^4}{4}+y\right]\,dx \text{ con } \quad y(0)=y(1)=1$$

(b) $$\int_0^1 \left[(y')^2e^x+y\right]\,dx \text{ con } \quad y(0)=0,\; y(1)=1$$

Scrivere la corrispondente funzione Hamiltoniana, il sistema Hamiltoniano equivalente all'equazione d'Eulero e risolverlo.

Esercizio 6

Si consideri la superficie di rotazione generata dal grafico di una funzione $y=f(x)$.

Supponiamo che tale superficie rappresenti il profilo di un solido che si muove nella direzione dell'asse $x$, in un mezzo che oppone una resistenza proporzionale al quadrato della componente normale della velocità in ciascun punto della superficie. Il problema di trovare $f(x)$ in modo che la resistenza totale risulti minima, si riduce, in base a considerazioni fisiche, a quello di minimizzare il funzionale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x}{1+(y')^2}\,dx\ .$$

Si determini l'equazione d'Eulero per questo problema e se ne cerchino le soluzioni in forma parametrica (suggerimento: si ponga $y' = t$).

Questo problema, posto da Newton, fu uno dei primi a essere risolti con i metodi del calcolo delle variazioni; tuttavia, come è stato verificato successivamente, non vi è accordo tra la soluzione che si ottiene per via teorica e i risultati sperimentali. La ragione è che quella che si trova è una soluzione in senso debole ma non una soluzione in senso forte. Il nostro problema anzi, non ammette soluzioni in senso forte di classe $C^1$.

<u>Esercizio 7</u>

Determinare il minimo del problema

$$\int_0^1 (y^2 + (y')^2)\, dx$$

con le condizioni $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. Verificare in particolare che il funzionale è convesso.

# Seconda Lezione

# ESTENSIONI DEL PROBLEMA BASE

## 1. Problemi con punti o valori terminali liberi

Nella lezione precedente abbiamo studiato il problema di minimizzare (o massimizzare) il funzionale

(1) $$J(f) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x), f'(x))\, dx$$

rispetto a tutte le funzioni $y = f(x)$ appartenenti ad una data classe e tali che

(2) $$f(x_0) = y_0 \ , \qquad f(x_1) = y_1 \ .$$

Simili problemi si dicono anche *problemi con punti e valori terminali fissi*, con riferimento al fatto che i valori $x_0$, $x_1$, $y_0$ e $y_1$ fanno parte dei dati. Si dicono invece genericamente *problemi con punti o valori terminali liberi* quelli in cui una o più delle condizioni (2) vengono a cadere. Tanto per fissare le idee, ci riferiremo sempre al punto terminale destro dell'intervallo; gli stessi ragionamenti possono essere ovviamente ripetuti con riferimento al punto terminale di sinistra.

Ci sono vari tipi di problemi con punti o valori terminali liberi. Nel seguito, noi considereremo i casi seguenti:

(A) $x_1$ assegnato, $y_1$ arbitrario
(B) $x_1$ arbitrario, $y_1$ assegnato
(C) $x_1$ e $y_1$ entrambi arbitrari
(D) $x_1$ arbitrario e $y_1$ non assegnato ma dipendente da $x_1$, diciamo $y_1 = \psi(x_1)$ dove $\psi$ è una data funzione di classe $C^1$.

### Ulteriore condizione necessaria per il caso (A)

Cominciamo dal caso (A), che è il più semplice. Poiché siamo interessati alle condizioni necessarie, procediamo come nella prima parte, supponendo di conoscere un'estremante $y = \varphi(x)$ e di sottoporla a variazioni del tipo

$$\varphi(x) + \alpha\delta(x) \tag{3}$$

dove $\alpha \in (-1, 1)$, e $\delta(x)$ è una funzione di classe $C^1$ tale che $\delta(x_0) = 0$. Questa volta abbiamo dunque da prendere in considerazione una quantità maggiore di variazioni, in quanto, essendo $y_1$ arbitrario, non abbiamo ragione di imporre la condizione $\delta(x_1) = 0$. Facciamo un'osservazione importante. Le variazioni $\delta(x)$ per cui $\delta(x_1) = 0$ (e cioè quelle considerate nella prima parte) sono un sottoinsieme di quelle che stiamo considerando adesso. Dunque, se $J(\varphi(\cdot))$ rappresenta un estremo locale rispetto a tutte le variazioni $\delta(x)$ con $\delta(x_1)$ arbitrario, lo sarà a maggior ragione rispetto a tutte le variazioni per cui $\delta(x_1) = 0$. Ciò significa che l'equazione d'Eulero rimane una condizione necessaria per gli estremanti anche nel nostro caso. L'integrale generale dell'equazione d'Eulero contiene di regola, come sappiamo, due costanti arbitrarie, per determinare le quali ci servono, in linea di principio, due relazioni. Ma questa volta abbiamo a disposizione una sola condizione aggiuntiva (la prima della (2)). Una seconda relazione, utile al fine della determinazione delle costanti dell'integrale generale dell'equazione di Eulero, può essere dedotta ripetendo i ragionamenti già svolti nella prima parte, ma tenendo conto delle mutate condizioni.

Ricordiamo che per ogni estremante locale $\varphi(x)$ e per ogni variazione ammissibile $\delta(x)$ si deve verificare che

$$\frac{d}{d\alpha} J(\varphi(\cdot) + \alpha\delta(\cdot))\big|_{\alpha=0} = 0\ . \tag{4}$$

Sviluppando i calcoli come nella lezione precedente, si perviene alla

$$F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))\delta(x)\big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \Big[F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \\ - \frac{d}{dx} F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))\Big]\delta(x)\, dx = 0\ .$$

Il primo addendo si riduce a $F_p(x_1, \varphi(x_1), \varphi'(x_1))\delta(x_1)$, in quanto $\delta(x_0) = 0$, e il secondo addendo si annulla, in quanto, come abbiamo già osservato, le estremanti del nostro problema devono comunque soddisfare l'equazione d'Eulero. Poiché la variazione $\delta(x)$ è arbitraria, risulterà in particolare arbitrario il valore $\delta(x_1)$. Si ottiene allora, in conclusione

$$F_p(x_1, \varphi(x_1), \varphi'(x_1)) = 0\ . \tag{5}$$

Siamo dunque pervenuti al seguente risultato

Teorema 1

Se $\varphi(x)$ è un'estremante locale per il problema (1) con $x_0, x_1$ e $y_0$ assegnati (e $y_1$ arbitrario), allora $\varphi(x)$ è una soluzione dell'equazione di Eulero, e inoltre vale la condizione (5).

∎

Formula generale per la derivata del funzionale

I casi (B), (C) e (D) presentano una sostanziale novità rispetto ai problemi con punti e valori terminali fissi e anche rispetto ai problemi con valori terminali liberi del tipo (A), e cioè la possibilità di lasciar variare anche l'estremo destro dell'intervallo di integrazione, il quale si presenta come un'ulteriore incognita del nostro problema.

In questo paragrafo stabiliremo una formula per la derivata del funzionale che è più generale di quella ottenuta nella prima lezione e che è stata richiamata poc'anzi. Questa nuova formula ci permetterà di tener conto delle novità che si introducono con i problemi del tipo (B), (C) e (D).

Tanto per cominciare, si rendono necessarie alcune modifiche nella formulazione stessa del problema e nelle notazioni fino a questo momento impiegate. Osserviamo infatti che il valore del funzionale da minimizzare o massimizzare dipende adesso non solo dalla scelta della funzione $y = f(x)$, ma anche (e indipendentemente) dalla scelta del secondo estremo di integrazione $x_1$. Scriveremo pertanto

$$J(f(\cdot), x_1) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f(x), f'(x))\, dx \ . \tag{6}$$

Poiché l'estremo $x_1$ non è noto a priori, le funzioni rispetto alle quali si ricercano gli estremi del funzionale (6) saranno tutte le funzioni $y = f(x)$ di classe $C^1$ sull'intervallo $[x_0, +\infty)$. Poiché abbiamo convenuto di togliere le restrizioni solo nel punto terminale destro, manterremo la richiesta che

$$f(x_0) = y_0 \tag{7}$$

dove $y_0$ è un valore prestabilito. Coerentemente, ammetteremo variazioni $y = \delta(x)$ di classe $C^1$, definite sulla semiretta $[x_0, +\infty)$ e tali che

$$\delta(x_0) = 0 \ . \tag{8}$$

Diremo che la coppia $(\bar{x}_1, \varphi(\cdot))$ è un *minimante locale* per il problema (6) se $\bar{x}_1 > x_0$ e $\varphi(x)$ è una funzione di classe $C^1$ su $[x_0, +\infty)$ tale che $\varphi(x_0) = y_0$ e

$$J(\varphi(\cdot), \bar{x}_1) \leq J(f(\cdot), x_1)$$

per tutti gli $x_1 > x_0$ sufficientemente vicini a $\bar{x}_1$ e per tutte le funzioni $y = f(x)$ del tipo summenzionato sufficientemente vicine alla $y = \varphi(x)$. In altre parole, il funzionale (6) presenta un minimo locale quando viene calcolato in corrispondenza del valore $x = \bar{x}_1$ e della funzione $f(x) = \varphi(x)$. In modo analogo si definiscono le coppie *massimanti locali* e parleremo di *estremanti locali* per includere entrambi i casi. Possiamo inoltre distinguere, come abbiamo fatto nella prima parte, tra estremanti forti ed estremanti deboli, ma la distinzione non è significativa, almeno fintanto che ci si interessa alle condizioni necessarie.

Sia ora $(\bar{x}_1, \varphi(\cdot))$ un'estremante locale, e sia $\delta(x)$ una variazione ammissibile. Sia inoltre $\alpha \in (-1, 1)$ e sia $\chi(\alpha)$ una funzione arbitraria di classe $C^1$ tale che $\chi(0) = 0$. La funzione $\chi(\alpha)$, or ora introdotta, serve per descrivere le variazioni cui sottoporre l'estremo destro dell'intervallo di integrazione. La ragione per cui si considerano variazioni dell'estremo destro del tipo $\bar{x}_1 + \chi(\alpha)$ e non più semplicemente variazioni del tipo $\bar{x}_1 + \alpha h_0$ dove $h_0$ è un numero reale arbitrario prefissato, sarà chiara nel seguito.

Il nostro problema è quindi quello di calcolare

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\alpha} J(\varphi(\cdot) + \alpha\delta(\cdot), \bar{x}_1 + \chi(\alpha))\big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{\bar{x}_1+\chi(\alpha)} F(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x))\, dx\big|_{\alpha=0} .\end{aligned}$$

Rispetto alla prima parte, la novità consiste allora nel fatto che la variabile $\alpha$ compare anche all'estremo di integrazione. Dobbiamo quindi usare una formula appropriata, nota dal corso di Analisi Matematica. Si ha

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\alpha} J(\varphi(\cdot) + \alpha\delta(\cdot), \bar{x}_1 + \chi(\alpha)) = \\ &= F(\bar{x}_1 + \chi(\alpha), \varphi(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)) + \alpha\delta(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)), \varphi'(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)) + \alpha\delta'(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)))\chi'(\alpha) + \\ &\quad + \int_{x_0}^{\bar{x}_1+\chi(\alpha)} \frac{d}{d\alpha} F(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x))\, dx = \\ &= F(\bar{x}_1 + \chi(\alpha), \varphi(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)) + \alpha\delta(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)), \varphi'(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)) + \alpha\delta'(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)))\chi'(\alpha) + \\ &\quad + \int_{x_0}^{\bar{x}_1+\chi(\alpha)} \big[F_y(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x))\delta(x) + \\ &\quad + F_p(x, \varphi(x) + \alpha\delta(x), \varphi'(x) + \alpha\delta'(x))\delta'(x)\big]\, dx\end{aligned}$$

che, posto $\alpha = 0$, diventa

$$\begin{aligned}&F(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1), \varphi'(\bar{x}_1))\chi'(0) + \\ &+ \int_{x_0}^{\bar{x}_1} \big[F_y(x, \varphi(x), \varphi'(x))\delta(x) + F_p(x, \varphi(x), \varphi'(x))\delta'(x)\big]\, dx .\end{aligned}$$

Possiamo integrare per parti. Si ottiene

$$\frac{d}{d\alpha}J(\varphi(\cdot)+\alpha\delta(\cdot),\bar{x}_1+\chi(\alpha))\big|_{\alpha=0}=F(\bar{x}_1,\varphi(\bar{x}_1)\varphi'(\bar{x}_1))\chi'(0)+$$
$$+F_p(x,\varphi(x),\varphi'(x))\delta(x)\big|_{x_0}^{\bar{x}_1}+$$
$$+\int_{x_0}^{\bar{x}_1}\left[F_y(x,\varphi(x),\varphi'(x))-\frac{d}{dx}F_p(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right]\delta(x)\,dx$$

e in definitiva, tenendo conto che $\delta(x_0)=0$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\alpha}J(\varphi(\cdot)+\alpha\delta(\cdot),\bar{x}_1+\chi(\alpha))\big|_{\alpha=0}=F(\bar{x}_1,\varphi(\bar{x}_1),\varphi'(\bar{x}_1))\chi'(0)+\\ &+F_p(\bar{x}_1,\varphi(\bar{x}_1),\varphi'(\bar{x}_1))\delta(\bar{x}_1)+\\ &+\int_{x_0}^{\bar{x}_1}\left[F_y(x,\varphi(x),\varphi'(x))-\frac{d}{dx}F_p(x,\varphi(x),\varphi'(x))\right]\delta(x)\,dx\ .\end{aligned}\tag{9}$$

Basandoci su questa formula, possiamo adesso intraprendere lo studio dei casi (B), (C) e (D). Analizzeremo nell'ordine i casi (C) e (D), e quindi dedurremo il caso (B) dal caso (D).

Ulteriori condizioni necessarie per il caso (C)

Tra tutte le variazioni ammissibili, compatibili con le condizioni stabilite per il caso (C), ci sono naturalmente quelle per cui $\delta(\bar{x}_1)=0$. Ripetendo un ragionamento già fatto in precedenza, si deduce allora che se la coppia $(\bar{x}_1,\varphi(\cdot))$ è un estremante per il problema (6) allora $y=\varphi(x)$ deve risolvere l'equazione di Eulero sull'intervallo $[x_0,\bar{x}_1]$. L'integrale generale dell'equazione d'Eulero contiene due costanti arbitrarie. Inoltre, in questo tipo di problema $\bar{x}_1$ figura come un'incognita. Per determinare queste tre incognite reali, in linea di principio, ci servono tre relazioni mentre, per il momento disponiamo solo della (7). Le due relazioni mancanti possono tuttavia essere dedotte dalla (9). Infatti, se $(\bar{x}_1,\varphi(\cdot))$ è una coppia estremante, allora dovrà necessariamente essere

$$\frac{d}{d\alpha}J(\varphi(\cdot)+\alpha\delta(\cdot),\bar{x}_1+\chi(\alpha))\big|_{\alpha=0}=0\tag{10}$$

qualunque siano le funzioni $\delta$ e $\chi$. Tenendo conto che $\varphi(\cdot)$ deve comunque risolvere l'equazione di Eulero, e che quindi l'integrando, nella (9), si annulla, si ottiene

$$F(\bar{x}_1,\varphi(\bar{x}_1),\varphi'(\bar{x}_1))\chi'(0)+F_p(\bar{x}_1,\varphi(\bar{x}_1),\varphi'(\bar{x}_1))\delta(\bar{x}_1)=0\ .\tag{11}$$

Poiché le variazioni della funzione e quella dell'estremo dell'intervallo sono del tutto indipendenti, $\chi'(0)$ e $\delta(\bar{x}_1)$ possono considerarsi due numeri arbitrari. La (11) allora implica

$$F(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1), \varphi'(\bar{x}_1)) = 0 \qquad \text{e} \qquad F_p(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1), \varphi'(\bar{x}_1)) = 0 \ . \tag{12}$$

Si ottengono così due relazioni cui devono soddisfare il punto $\bar{x}_1$ e i valori assunti dalla funzione $\varphi(\cdot)$ e dalla sua derivata in corrispondenza di questo punto $\bar{x}_1$.

Possiamo riassumere queste conclusioni nel seguente Teorema.

Teorema 2

Se la coppia $(\bar{x}_1, \varphi(\cdot))$ è un estremante locale per il problema (6) sottoposto alla sola condizione (7), allora $\varphi(x)$ è soluzione dell'equazione d'Eulero sull'intervallo $[x_0, \bar{x}_1]$, e inoltre devono valere le (12).

∎

In pratica, per trovare gli estremali del problema (6), si cercherà di determinare l'integrale generale dell'equazione d'Eulero in $[x_0, +\infty)$. Le due costanti d'integrazione e il valore del punto $\bar{x}_1$ dovranno poi essere calcolati risolvendo il sistema costituito dalle tre relazioni (7) e (12).

## Il caso (D): condizioni di trasversalità

Veniamo ora al caso (D), che è il più complicato. Ricordiamo innanzitutto che adesso i dati del problema sono, oltre alla funzione $F$ che definisce il funzionale (6), il punto $x_0$, il valore $y_0$ e una funzione $\psi(x)$ definita in $(x_0, +\infty)$ e, diciamo, di classe almeno $C^1$. Il problema consiste nel trovare le coppie $(x_1, f(\cdot))$ che rendono minimo o massimo il funzionale (6) sotto le condizioni

$$f(x_0) = y_0 \ , \qquad f(x_1) = \psi(x_1) \ . \tag{13}$$

La seconda condizione in particolare può essere interpretata geometricamente dicendo che le funzioni rispetto alle quali si cercano gli estremi di (1) devono intersecare il grafico della $\psi(x)$ nel secondo estremo di integrazione.

Supponiamo di conoscere un estremante $(\bar{x}_1, \varphi(\cdot))$. Usando il solito argomento, si vede che $\varphi(x)$ è una soluzione dell'equazione di Eulero sull'intervallo $[x_0, \bar{x}_1]$. Le (13) ci forniscono due condizioni aggiuntive, ma le incognite da determinare sono tre: il valore di $\bar{x}_1$ e le due costanti che si introducono integrando l'equazione di Eulero. Per determinare la relazione mancante, possiamo ripetere il ragionamento che nel paragrafo precedente ci ha condotto dalla (10) alla (11), attraverso la (9).

A questo punto però ci si accorge che, a causa della seconda delle (13), le variazioni dell'estremo destro dell'intervallo di integrazione e le variazioni dell'ordinata in corrispondenza di tale estremo, non sono indipendenti. In altre parole, solo uno dei due numeri $\chi'(0)$ e $\delta(\bar{x}_1)$ che compaiono nella (11) può essere assegnato in modo arbitrario.

Per procedere nel nostro calcolo, dobbiamo allora determinare come sono legati i due numeri $\chi'(0)$ e $\delta(\bar{x}_1)$. A tal fine, si consideri la funzione

$$G(x,\alpha) = \varphi(x) + \alpha\delta(x) - \psi(x)\ . \tag{14}$$

Poiché sia $\varphi(x)$, che $\delta(x)$ che $\psi(x)$ sono di classe $C^1$, anche $G$ risulterà di classe $C^1$ in $[x_0, +\infty) \times (-1, 1)$. Inoltre,

$$G(\bar{x}_1, 0) = 0$$

in quanto $\varphi(x)$ è una soluzione del nostro problema, e come tale deve soddisfare a tutte le condizioni, compresa la seconda delle (13). Osserviamo anche che

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}_1, 0) = \varphi'(x) + \alpha\delta'(x) - \psi'(x)\Big|_{x=\bar{x}_1, \alpha=0} = \varphi'(\bar{x}_1) - \psi'(\bar{x}_1)\ .$$

Nel caso in cui $\dfrac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}_1, 0) = 0$, si ha dunque

$$\varphi'(\bar{x}_1) = \psi'(\bar{x}_1) \tag{15}$$

la quale costituisce la relazione cercata. Nel caso, più interessante, in cui $\dfrac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}_1, 0) \neq 0$, per il Teorema delle funzioni implicite esiste una funzione $g(\alpha) = \bar{x}_1 + \chi(\alpha)$ tale che $\chi(0) = 0$ e

$$G(\bar{x}_1 + \chi(\alpha), \alpha) = \varphi(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)) + \alpha\delta(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)) - \psi(\bar{x}_1 + \chi(\alpha)) = 0 \tag{16}$$

per ogni $\alpha$ in un'intorno dell'origine. In altre parole, per ogni variazione ammissibile e per ogni $\alpha$ sufficientemente piccolo, esiste un punto $x_1 = \bar{x}_1 + \chi(\alpha)$ per cui la variazione $\varphi(x) + \alpha\delta(x)$ soddisfa la seconda della (13).

Il Teorema delle funzioni implicite assicura anche che $\chi'(\alpha)$ esiste per $\alpha$ vicino a zero, e che

$$\chi'(0) = \frac{-\delta(\bar{x}_1)}{\varphi'(\bar{x}_1) - \psi'(\bar{x}_1)}\ , \tag{17}$$

ovvero

$$\delta(\bar{x}_1) = (\psi'(\bar{x}_1) - \varphi'(\bar{x}_1))\chi'(0)\ . \tag{18}$$

Torniamo adesso alla (11). Sostituendo, e tenendo conto dell'arbitrarietà della scelta di $\chi'(0)$, si ha subito

$$(19) \qquad F(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1), \varphi'(\bar{x}_1)) + (\psi'(\bar{x}_1) - \varphi'(\bar{x}_1))F_p(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1), \varphi'(\bar{x}_1)) = 0 \ .$$

La (19) è nota come *condizione di trasversalità* e costituisce la relazione cercata.

Possiamo riassumere quanto visto fino a questo momento nel teorema seguente.

Teorema 3

Condizione necessaria affinché la coppia $(\bar{x}_1, \varphi(\cdot))$ sia un estremante per il problema (6) con estremo destro libero ma soggetto alle condizioni (13), ove $\psi$ è una funzione di classe $C^1$, è che $\varphi(x)$ sia soluzione dell'equazione di Eulero, e che inoltre valga la (19) (o, in alternativa, la (15)).

∎

Il termine "condizione di trasversalità" dipende dal fatto che, se

$$F(x, y, p) = F_0(x, y)\sqrt{1 + p^2}$$

e se $F_0(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1)) \neq 0$, allora la (19) si riduce, come si verifica facilmente, a

$$\varphi'(\bar{x}_1) = \frac{-1}{\psi(\bar{x}_1)} \ ,$$

il che significa che i grafici di $\varphi$ e $\psi$ si intersecano ortogonalmente nel punto di ascissa $\bar{x}_1$.

La condizione necessaria da applicare nel caso (B) si ottiene subito come caso particolare della (19). Posto $\psi(x) \equiv y_1$ =costante, la (19) si riduce infatti a

$$(20) \qquad F(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1), \varphi'(\bar{x}_1)) - \varphi'(\bar{x}_1)F_p(\bar{x}_1, \varphi(\bar{x}_1), \varphi'(\bar{x}_1)) = 0 \ .$$

Teorema 4

Condizione necessaria affinché la coppia $(\bar{x}_1, \varphi(\cdot))$ sia un estremante per il problema (6) con $x_0, y_0$ e $y_1$ assegnati, $x_1$ indeterminato, è che $\varphi(x)$ sia soluzione dell'equazione d'Eulero nell'intervallo $[x_0, \bar{x}_1]$ e che inoltre valga la (20).

∎

## 2. Estremi liberi in presenza di più variabili

Sia $F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $C^2$. Il problema consiste nella ricerca dei massimi e dei minimi del funzionale

$$(21) \qquad J(f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f_1(x), \ldots, f_n(x), f_1'(x), \ldots, f_n'(x))\, dx$$

tra tutte le funzioni $f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot)$ di classe $C^1$ sull'intervallo $[x_0, x_1]$ che soddisfano a date condizioni nei punti terminali

$$f_j(x_0) = y_{0,j} \ , \quad f_j(x_1) = y_{1,j} \qquad (j = 1, \dots, n) \ . \tag{22}$$

Teorema 5

Sia $(\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot))$ una $n$-pla di estremanti per il problema (21), (22). Allora le $n$ funzioni $\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot)$ sono soluzioni del sistema di $n$ equazioni differenziali

$$\begin{cases} F_{y_1}(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = \dfrac{d}{dx}\left[F_{p_1}(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ F_{y_n}(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = \dfrac{d}{dx}\left[F_{p_n}(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\right] \end{cases} \tag{23}$$

sull'intervallo $[x_0, x_1]$.

Dimostrazione

Possiamo limitarci al caso di due variabili, e procedere come nella prima parte sottoponendo $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ a variazioni direzionali

$$\varphi_1(x) + \alpha\delta_1(x) \ , \quad \varphi_2(x) + \alpha\delta_2(x)$$

dove $\delta_1(\cdot)$ e $\delta_2(\cdot)$ sono funzioni di classe $C^1$ scelte in modo arbitrario e indipendentemente l'una dall'altra, ferme restando le condizioni agli estremi $\delta_1(x_0) = \delta_2(x_0) = \delta_1(x_1) = \delta_2(x_1) = 0$. Si impone quindi, sempre seguendo la falsariga della prima parte, che

$$\frac{d}{d\alpha} J(\varphi_1(\cdot) + \alpha\delta_1(\cdot), \varphi_2(\cdot) + \alpha\delta_2(\cdot))\big|_{\alpha=0} = 0 \ . \tag{24}$$

Portando la derivata sotto il segno di integrale, applicando la regola di derivazione delle funzioni composte e infine integrando per parti, dalla (24) si deduce la

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \Big[F_{y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) - \\ &\qquad - \frac{d}{dx} F_{p_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)\Big]\delta_1(x)\, dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \Big[F_{y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) - \\ &\qquad - \frac{d}{dx} F_{p_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)\Big]\delta_2(x)\, dx = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

avendo tenuto conto che $\delta_1$ e $\delta_2$ si annullano agli estremi. Poiché $\delta_1$ e $\delta_2$ sono indipendenti, fra tutte le scelte possibili ci sono quelle in cui $\delta_2 \equiv 0$. Per il Lemma fondamentale (Lemma 1 della prima lezione), si ha allora

$$F_{y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) - \frac{d}{dx} F_{p_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) = 0 \ .$$

Simmetricamente, si dovranno considerare tutte le variazioni in cui $\delta_2$ è arbitrario e $\delta_1 \equiv 0$. Dunque si avrà anche

$$F_{y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) - \frac{d}{dx} F_{p_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) = 0 \ .$$

∎

Il sistema di equazioni di Eulero (23) avrà un integrale generale contenente $2n$ costanti che, in linea di principio, possono essere determinate grazie alle $2n$ condizioni (22).

## 3. Estremi vincolati

Argomento principale di questa sezione è la generalizzazione del metodo presentato nella prima lezione al caso in cui i minimi o i massimi di un dato funzionale vadano ricercati rispetto a quelle funzioni che soddisfano, oltre alle condizioni nei punti terminali, altri tipi di vincoli.

Anche questa volta possiamo trarre ispirazione dal caso delle funzioni di più variabili, già studiato nel corso di Analisi matematica. Sia dunque data una funzione reale $f(x)$ con $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, e un insieme $E$ contenuto nel dominio di $f$. Si dice che $f$ ha in $\bar{x} \in E$ un *punto di minimo* (o di *massimo*) *vincolato* se $f(\bar{x}) \leq f(x)$ per ogni $x \in E$ (ovvero $f(\bar{x}) \geq f(x)$ per ogni $x \in E$). Come nel caso degli estremi liberi si distingue tra punti di minimo (o massimo) assoluti e locali.

Se $\bar{x}$ è un punto di estremo vincolato, la condizione $\nabla f(\bar{x}) = 0$ non è più in generale necessaria. Se però $E$ è assegnato per mezzo di equazioni, condizioni necessarie possono essere stabilite mediante opportune modifiche.

In generale, si distinguono due situazioni:

a) $E$ è assegnato parametricamente, come immagine di un'applicazione $\gamma : \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}^n$ (con $m < n$); il problema della determinazione degli estremi vincolati di $f$ su $E$ si riduce allora al problema della determinazione degli estremi liberi della funzione composta $(f \circ \gamma) : \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}$.

b) $E$ è assegnato in forma implicita, e cioè come luogo dei punti che soddisfano a certe equazioni $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$, (ancora con $m < n$); in questo caso è più conveniente il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, che consiste nell'introduzione di $m$ variabili ausiliarie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dette appunto *moltiplicatori* di *Lagrange*.

Nel caso b), i punti di estremo vincolato di $f$ vanno cercati tra i punti di $\mathbf{R}^n$ che si ottengono prendendo le prime $n$ componenti dei vettori

$$(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{n+m}$$

corrispondenti ai punti stazionari liberi della funzione

$$\hat{f}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Equivalentemente, possiamo affermare che i punti di estremo vincolato di $f$ si trovano tra quei punti di $E$ in cui si annulla il componente di $\nabla f$ tangenziale ad $E$. La ricerca degli estremi liberi di $\hat{f}$ si riduce infatti alla risoluzione del sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} \nabla f(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ g_i(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

di $n+m$ equazioni nelle $(n+m)$ incognite $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Si noti che a noi interessa determinare in realtà solo i valori di $x_1, \ldots, x_n$. Tuttavia i moltiplicatori $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ possono giocare un ruolo essenziale nel procedimento di risoluzione del sistema $(*)$. Ribadiamo infine che $(*)$ rappresenta una condizione necessaria: essa può avere pertanto soluzioni cui non corrisponde di fatto un estremo vincolato.

Vogliamo adesso generalizzare questi metodi allo studio degli estremi di funzionali soggetti a determinati tipi di vincoli.

## Vincoli Olonomi

Riprendiamo adesso il problema di determinare gli estremanti del funzionale (21) tra tutte le $n$-ple di funzioni $(f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))$ che soddisfano a condizioni del tipo (22) nei punti terminali, e che inoltre soddisfano ad un sistema di equazioni

$$(26) \qquad \begin{cases} G_1(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_m(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0 \end{cases}$$

con $x \in [x_0, x_1]$, dove $G_1, \ldots, G_m$ sono funzioni date di classe $C^1$ e $m < n$. Chiameremo *estremanti vincolati* le soluzioni del problema (21), (22), (26). È appena il caso di osservare che le condizioni nei punti terminali (22) devono essere compatibili con le equazioni del sistema (26). Il sistema (26) costituisce quello che si chiama un vincolo di tipo *olonomo* per il nostro problema. In presenza di tale vincolo, il sistema di equazioni di Eulero (23) non rappresenta più, in generale, una condizione necessaria per gli estremanti. Ciò è dovuto al fatto che le variazioni a cui si sottopongono gli estremanti non sono più indipendenti, ma devono esse stesse essere soggette al vincolo (26). Cade pertanto la possibilità di applicare il Lemma fondamentale.

Cominciamo a descrivere un modo semplice di affrontare un problema con vincoli olonomi. Le relazioni (26) introducono un legame di dipendenza tra le funzioni

$$f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot) \ ,$$

al variare delle quali si cercano gli estremi di (21). È naturale pensare che tale legame si risolva nella possibilità di scegliere arbitrariamente $n-m$ di esse (diciamo, per fissare le idee, le ultime $n-m$) dopo di che, le rimanenti $m$ resteranno univocamente determinate. Per rendere più precisa quest'idea, consideriamo le funzioni $G_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ come componenti di un'applicazione da $\mathbf{R}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^m$ e supponiamo che il determinante della matrice i cui elementi sono

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{27}$$

per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m$, sia ovunque diverso da zero. Quando ciò si verifica, si dice anche che le equazioni (26) sono *funzionalmente indipendenti* ($^1$). In presenza di vincoli funzionalmente indipendenti, si può applicare il Teorema delle funzioni implicite al problema

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_m(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases} \tag{26$'$}$$

e ricavare $m$ funzioni

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x, y_{m+1}, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = h_m(x, y_{m+1}, \ldots, y_n) \ . \end{cases} \tag{28}$$

Il sistema (28) è del tutto equivalente al sistema (26$'$). Per ogni scelta arbitraria di $n-m$ funzioni $f_{m+1}(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)$, esso consente di determinare le rimanenti $f_1(\cdot), \ldots, f_m(\cdot)$.

($^1$) Più in generale, le equazioni (26) si dicono funzionalmente indipendenti quando il rango della matrice rettangolare i cui elementi sono $\partial G_i / \partial y_j$ risulta uguale ad $m$ in ogni punto; naturalmente, a meno di un riordinamento degli indici, possiamo sempre supporre che le colonne della matrice che sono linearmente indipendenti siano le prime $m$

Tenendo conto di (28), possiamo sostituire, nella funzione $F$ che compare in (21), $h_i(x, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ al posto di $y_i$ e

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{\partial h_i}{\partial y_{m+1}} y'_{m+1} + \ldots + \frac{\partial h_i}{\partial y_n} y'_n$$

al posto di $y'_i$, per ogni $i = 1, \ldots, m$. La $F$ si riduce così ad una nuova funzione $\tilde{F}$ di $2(n-m)+1$ variabili, e il funzionale (21) si riscrive come

$$\int_{x_0}^{x_1} \tilde{F}(x, y_{m+1}, \ldots, y_n, y'_{m+1}, \ldots, y'_n)\, dx$$

dando luogo ad un problema di estremi liberi in un numero ridotto di incognite.

Il metodo indicato non è ovviamente praticabile quando non è possibile ricavare elementarmente le funzioni implicite $h_1, \ldots, h_m$ dal sistema (26). È allora opportuno discutere un metodo alternativo, che generalizza ai problemi variazionali il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Teorema 6

Sia $\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot)$ una $n$-pla di estremanti per il problema (21) soggetto alle condizioni (22) e ai vincoli (6), che si assumono funzionalmente indipendenti. Allora, esistono $m$ funzioni $l_1(x), \ldots, l_m(x)$ di classe $C^1$, definite sull'intervallo $[x_0, x_1]$, tali che le funzioni $\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot), l_1(\cdot), \ldots, l_m(\cdot)$ costituiscono una $(n+m)$-pla di estremali (liberi) per il funzionale

$$\hat{J} = \int_{x_0}^{x_1} \hat{F}(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, y'_1, \ldots, y'_n)\, dx \tag{29}$$

dove

$$\begin{aligned} &\hat{F}(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, p_1, \ldots p_n) = \\ &= F(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(x, y_1, \ldots, y_n)\ . \end{aligned}$$

∎

Prima di dimostrare questo teorema, conviene soffermarci a fare qualche riflessione. Nella sostanza esso afferma che le funzioni candidate alla soluzione del nostro problema si trovano tra le soluzioni del sistema di equazioni d'Eulero relativo ad un altro funzionale e precisamente quello definito da $\hat{F}$. Tali equazioni si scrivono come

$$\begin{cases} \hat{F}_{y_j} = \dfrac{d}{dx} \hat{F}_{p_j} & (j = 1, \ldots, n) \\ \\ G_i = 0 & (i = 1, \ldots, m) \end{cases} \tag{30}$$

dove, per semplicità, abbiamo omesso di ripetere l'indicazione delle variabili.

Funzioni $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot)$ che soddisfano alle condizioni del Teorema 6, per le quali cioè esistono funzioni $l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$ tali che la $(n+m)$-pla

$$(\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot),l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot))$$

è soluzione del sistema (30), si dicono *estremali* (o *stazionarie*) *vincolate*. Il Teorema 6 si può quindi riformulare dicendo semplicemente che le estremanti vincolate si trovano tra le funzioni estremali vincolate.

Le variabili ausiliarie $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ prendono il nome di *moltiplicatori di Lagrange*. La principale differenza con il caso delle funzioni di più variabili consiste nel fatto che adesso i moltiplicatori di Lagrange sono costituiti da funzioni della $x$.

Si noti che il primo "blocco" di equazioni del sistema (30) costituisce un sistema di equazioni differenziali di ordine due rispetto alle incognite $y_1,\ldots,y_n$, e contenenti le funzioni $l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$ come "parametri". Il secondo "blocco" di equazioni, e cioè quello relativo ai moltiplicatori $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, coincide col sistema dei vincoli (26): si tratta quindi di equazioni non differenziali.

L'integrale generale relativo al primo blocco di equazioni conterrà $2n$ costanti arbitrarie, che possono essere determinate, almeno in linea di principio, tenendo conto delle condizioni nei punti terminali (22), e le $m$ funzioni $l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$ per il momento ancora incognite. Queste ultime dovranno essere determinate sostituendo tale integrale generale nel secondo blocco di equazioni e risolvendo un problema di funzioni implicite. Gli estremali $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(x)$ relativi al funzionale (29) si ottengono infine andando a sostituire, nell'integrale generale del primo blocco di equazioni, le funzioni $l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$ così determinate. I moltiplicatori di Lagrange risultano quindi essenziali nella risoluzione del sistema (30), ma qui esauriscono il loro ruolo e quindi vengono tralasciati.

Se le funzioni $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot),l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$ costituiscono una $(n+m)$-pla di estremali per il funzionale (29), non c'è nessuna garanzia che estraendo le prime $n$ funzioni $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot)$ si ottengano degli estremanti per il nostro problema vincolato (21), (26). Infatti, sia il Teorema 5 che il Teorema 6 forniscono condizioni solo necessarie. Se però si riesce a provare che in corrispondenza di $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot)$, $l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$ si hanno effettivamente degli estremanti per il funzionale (29), allora si può essere certi che le funzioni $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot)$ rappresentano degli estremanti per il problema vincolato (21), (26). A questa conclusione si perviene facilmente osservando che ogni $(n+m)$-pla di estremanti $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot),l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$ per il problema (29) deve soddisfare il sistema di equazioni (30); quindi, in particolare, le $n$ funzioni $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot)$ devono soddisfare le equazioni dei vincoli. Qualunque siano $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, si ha allora

$$\begin{aligned}&\hat{F}(x,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\varphi_1'(x),\ldots,\varphi_n'(x)) =\\ &= F(x,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x),\varphi_1'(x),\ldots,\varphi_n'(x))\end{aligned}$$

per ogni $x\in[x_0,x_1]$. Dunque, se il funzionale (29) raggiunge per esempio un minimo in corrispondenza di $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot),l_1(\cdot),\ldots,l_m(\cdot)$, allora anche il funzionale (21) deve raggiungere un minimo soggetto al vincolo (26) in corrispondenza di $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_n(\cdot)$.

<u>Dimostrazione del Teorema 6</u>

Anche qui ci limiteremo al caso in cui $F$ dipende da due sole variabili. Assumeremo inoltre la presenza di un unico vincolo $G(x, y_1, y_2) = 0$, tale che

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(x, y_1, y_2) \neq 0 \ .$$

Sia $(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot))$ una coppia di estremanti vincolate. Supponiamo di avere trovato una coppia di variazioni $(\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot))$ nulle nei punti terminali, e tali che $f_1(x) = \varphi_1(x)+\alpha\delta_1(x)$, $f_2(x) = \varphi_2(x) + \alpha\delta_2(x)$ soddisfano l'equazione del vincolo per ogni $\alpha \in (-1, 1)$:

$$G(x, \varphi_1(x) + \alpha\delta_1(x),\ \varphi_2(x) + \alpha\delta_2(x)) = 0 \ . \tag{31}$$

Si dovrà avere, anche questa volta,

$$\frac{d}{d\alpha} J(\varphi_1(\cdot) + \alpha\delta_1(\cdot), \varphi_2(\cdot) + \alpha\delta_2(\cdot))\big|_{\alpha=0} = 0$$

e procedendo come nel Teorema 5 si perviene alla (25). A questo punto dobbiamo però cominciare a ragionare in modo diverso: la scelta delle variazioni $\delta_1$ e $\delta_2$ non è infatti più indipendente e ciò impedisce, come abbiamo già osservato, di applicare direttamente il Lemma fondamentale. Derivando la (31) rispetto ad $\alpha$ nel punto $\alpha = 0$ si ottiene

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x_1))\delta_1(x) + \frac{\partial G}{\partial y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\delta_2(x) = 0 \ . \tag{32}$$

Quest'ultima, tenendo conto dell'ipotesi $\dfrac{\partial G}{\partial y_1} \neq 0$, mostra appunto come la variazione $\delta_1$ dipenda dalla scelta della variazione $\delta_2$.

Moltiplichiamo la (32) per $\lambda$, integriamo tra $x_0$ e $x_1$ e aggiungiamo alla (25) il risultato trovato. Si ha:

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \left[F_{y_1} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}F_{p_1}\right]\delta_1\, dx + \\ &+\int_{x_0}^{x_1} \left[F_{y_2} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}F_{p_2}\right]\delta_2\, dx = 0 \ , \end{aligned} \tag{33}$$

dove abbiamo tralasciato di indicare le variabili per non appesantire la notazione.

Imponiamo adesso che

$$\begin{aligned} &F_{y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) + \lambda\frac{\partial G}{\partial y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) - \\ &-\frac{d}{dx}F_{p_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) = 0 \ . \end{aligned} \tag{34}$$

Poiché $\dfrac{\partial G}{\partial y_1} \neq 0$, esiste certamente una funzione $\lambda = l(x)$ per cui la (34) è soddisfatta. Inoltre, in quanto la variazione $\delta_2$ può essere considerata arbitraria, tenendo conto di (34) e applicando il Lemma fondamentale, dalla (33) si ricava infine

$$\begin{aligned} & F_{y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) + l(x)\frac{\partial G}{\partial y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) - \\ & - \frac{d}{dx}F_{p_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_1'(x), \varphi_2'(x)) = 0 \ . \end{aligned} \tag{35}$$

A questo punto non resta che osservare che la (34) (con $l(x)$ al posto di $\lambda$) e la (35) corrispondono al primo "blocco" di equazioni del sistema (30) e che l'ultima equazione, e cioè l'equazione del vincolo, è soddisfatta per ipotesi.

∎

Tipici problemi con vincoli olonomi sono i così detti *problemi geodetici.* Data una superficie $S$ di $\mathbf{R}^3$ definita da un'equazione della forma

$$G(x, y, z) = 0 \ ,$$

e dati due punti $A$ e $B$ appartenenti ad $S$, si vuole trovare la curva di minima lunghezza che unisce $A$ e $B$ e che è interamente contenuta in $S$. Si tratta dunque di minimizzare il funzionale

$$\int_0^1 \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\, dt$$

tra tutte le funzioni

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \ : \ [0, 1] \to \mathbf{R}^3$$

tali che $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$ e $G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Non è restrittivo limitarsi a curve definite sull'intervallo $[0, 1]$, in quanto una curva può sempre essere riparametrizzata, senza alterarne la lunghezza. Il termine "problema geodetico" è legato al caso particolare in cui $S$ è una sfera, alla quale viene assimilata la superficie terrestre.

## Vincoli non olonomi

Fino a questo momento abbiamo considerato solo vincoli di tipo olonomo, e cioè relazioni tra le variabili $x, y_1, \ldots, y_n$. Più in generale, si possono considerare vincoli rappresentati da relazioni che coinvolgono anche le derivate di tali variabili, e che sono quindi espressi nella forma

$$
\begin{cases} G_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_m(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \end{cases} \tag{36}
$$

dove le $G_i(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$ sono funzioni date da $\mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}$ di classe $C^1$. In questo caso si parla di vincoli di tipo *non olonomo.* Useremo il termine "estremanti vincolati" anche per le soluzioni del problema (31), (32), (36).

Si noti che le (36) costituiscono di fatto un sistema di $m$ equazioni differenziali nelle $n$ incognite $y_1, \ldots, y_n$ (con $m < n$, come al solito). Talvolta è possibile integrare queste equazioni, determinandone delle soluzioni, almeno in forma implicita. In questi casi, ci si riconduce di fatto ad un vincolo di tipo olonomo, come illustra l'esempio seguente.

<u>Esempio</u>

Vogliamo trovare gli estremanti di un funzionale dipendente da due variabili

$$
\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\, dx
$$

sottoposto al vincolo non olonomo

$$
G(x, y_1, y_1') = a(x, y_1) + b(x, y_1) y_1' = 0 \ . \tag{37}
$$

Se il campo vettoriale di $\mathbf{R}^2$

$$
(x, y_1) \mapsto \begin{pmatrix} a(x, y_1) \\ b(x, y_1) \end{pmatrix}
$$

è conservativo, e se $g(x, y_1)$ è un suo potenziale, allora la relazione

$$
g(x, y_1) = \text{costante} \tag{38}
$$

fornisce implicitamente le soluzioni della (37) (il valore della costante dipende dalle eventuali condizioni nei punti terminali).

La (38) costituisce dunque un vincolo di tipo olonomo del tutto equivalente al vincolo non olonomo (37).

∎

In generale tuttavia, il sistema (36) non sarà integrabile e bisogna procedere in altro modo. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si adatta anche al caso dei vincoli non olonomi. La dimostrazione risulta però più complicata, e sarà pertanto omessa.

<u>Teorema 7</u>

Sia $\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot)$ una $n$-pla di estremanti per il problema (31) soggetto alle condizioni (32) e ai vincoli (36). Assumiamo, a proposito delle equazioni dei vincoli, la condizione di indipendenza

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}(x,y_1,\dots,y_n,p_1,\dots,p_n)=m$$

per ogni $(x,y_1,\dots,y_n,p_1,\dots,p_n)\in\mathbf{R}^{2n+1}$. Allora esistono funzioni $l_1(x),\dots,l_m(x)$ di classe $C^1$ sull'intervallo $[x_0,x_1]$ tali che $(\varphi_1(\cdot),\dots,\varphi_n(\cdot),l_1(\cdot),\dots,l_m(\cdot))$ costituisce una $(n+m)$-pla di estremali (liberi) per il funzionale

$$\hat{J}=\int_{x_0}^{x_1}\hat{F}(x,y_1,\dots,y_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m,y_1',\dots,y_n')\,dx$$

dove

$$\hat{F}(x,y_1,\dots,y_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m,y_1',\dots,y_n')=$$
$$F(x,y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n')+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i(x,y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n')\ .$$

∎

In altre parole,

$$\varphi_1(\cdot),\dots,\varphi_n(\cdot),l_1(\cdot),\dots,l_m(\cdot)$$

sono soluzioni di un sistema di equazioni di Eulero analogo al (30), dove però questa volta sia il primo che il secondo "blocco" sono formati da equazioni differenziali (di secondo ordine rispetto alle $y_j$, di primo ordine rispetto alle $\lambda_i$).

Tale sistema, insieme alle condizioni nei punti terminali (32), consente, almeno in linea di principio, di determinare le funzioni $\varphi_1(\cdot),\dots,\varphi_n(\cdot)$, candidate alla soluzione del problema originale. Al solito, i moltiplicatori $l_1(\cdot),\dots,l_m(\cdot)$ svolgono in generale un ruolo essenziale nel procedimento di risoluzione del sistema, ma poi vengono abbandonati e non compaiono nella soluzione finale.

Si riconducono a problemi con vincoli non olonomi anche problemi in cui il funzionale da minimizzare o massimizzare dipende dalle derivate di ordine superiore al primo delle funzioni incognite. Supponiamo per esempio di volere minimizzare il funzionale

$$J(f(\cdot))=\int_{x_0}^{x_1}F(x,f(x),f'(x),f''(x))\,dx \tag{39}$$

dove $F(x,y,p,r):\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ è una funzione di classe $C^2$. Posto $y=y_1$ e $p=y_2$, riscriviamo l'espressione di $J$ come

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,y_2')\,dx$$

e imponiamo il vincolo

$$G(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = y_1' - y_2 = 0 \ .$$

Procedendo come suggerito nel Teorema 7, si forma il nuovo funzionale

$$\hat{F}(x, y_1, y_2, \lambda, y_1', y_2') = F(x, y_1, y_2, y_2') + \lambda(y_1' - y_2)$$

e le corrispondenti equazioni d'Eulero

$$F_y - \dot{\lambda} = 0 \quad \text{e} \quad F_p - \lambda - \frac{d}{dx} F_r = 0 \ .$$

Derivando la seconda rispetto a $x$ e tenendo conto della prima, si ottiene la così detta *Equazione di Eulero-Poisson*

$$F_y(x, y, y', y'') - \frac{d}{dx} F_p(x, y, y', y'') + \frac{d^2}{dx^2} F_r(x, y, y', y'') = 0$$

che costituisce una condizione necessaria per gli estremanti del problema (39).

## Problemi isoperimetrici

Tipici problemi di estremo vincolato sono i cosiddetti *problemi isoperimetrici.* Si tratta, in generale, di trovare tra tutte le figure piane il cui perimetro ha una data misura, quella che racchiude l'area massima. Vediamo una semplice versione.

Data una funzione $y = f(x) > 0$ sull'intervallo $[x_0, x_1]$ con $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, l'area delimitata dal suo grafico si calcola mediante l'integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \tag{40}$$

mentre la lunghezza del grafico, pensato come una curva, è data da

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \ .$$

Questo tipo di vincolo non rientra tra quelli considerati in questa sezione. Ci si può però ricondurre ad un problema con vincoli non olonomi introducendo una nuova variabile

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\, d\xi$$

sottoposta al vincolo

$$z'(x) - \sqrt{1 + (f'(x))^2} = 0 \tag{41}$$

e con le condizioni $z(x_0) = 0$, $z(x_1) = l$. Introdotto quindi il moltiplicatore $\lambda = \lambda(x)$ si è portati a considerare

$$\hat{F}(x, y, \lambda, y', z') = y + \lambda[z' - \sqrt{1 + (y')^2}]$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \hat{F}}{\partial y'} = 0 \ , \qquad \frac{\partial \hat{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \hat{F}}{\partial z'} = 0 \ .$$

La seconda di queste si riduce a $\lambda'(x) = 0$, la quale ci dice semplicemente che, nel nostro problema, $\lambda$ è costante. Rimane così la prima che, scritta per esteso, diventa

$$1 + \lambda \frac{d}{dx}\left[y'(1 + (y')^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0 \ . \tag{42}$$

Si osserva a questo punto che se si fosse posto $F_\lambda(y, y') = y - \lambda(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}$ si sarebbe ottenuto esattamente la stessa equazione. In altre parole, le funzioni $\varphi(x)$ stazionarie del problema definito dal funzionale

$$\hat{J}(f(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \hat{F}(x, f(x), \lambda, f'(x), z'(x))\, dx$$

e quelle del problema definito da

$$J(f(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} F_\lambda(f(x), f'(x))\, dx$$

sono le stesse. Ma $F_\lambda$ non dipende da $x$ (si ricordi che $\lambda$ è costante): la (42) è allora equivalente all'equazione del primo ordine

$$y - \lambda(1 + (y')^2)^{1/2} + y'\lambda\left[y'(1 + (y'))^{-\frac{1}{2}}\right] = C$$

che si semplifica in

$$y - C = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} \ .$$

Possiamo trovare le soluzioni di quest'ultima in forma parametrica scrivendo $y' = \operatorname{tg} t$. Si ha subito

$$y = \lambda \cos t + C \ .$$

Infine,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\operatorname{tg} t} \cdot \lambda \sin t = -\lambda \cos t$$

cioè $x = -\lambda \sin t + B$.

La curva che risolve questo problema isoperimetrico è dunque una circonferenza di raggio $\lambda$ e centro $(B, C)$. I valori di $\lambda$, $B$ e $C$ si trovano imponendo il passaggio per i due punti $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ e il vincolo sulla lunghezza dell'arco.

# Esercizi

Esercizio 1

Calcolare gli estremali per il seguente problema di minimo

$$\int_0^1 ((y')^2 + 12xy)\, dx$$

con $y(0) = 0$ e $y(1)$ arbitrario.

Esercizio 2

Calcolare gli estremali per il seguente problema di minimo

$$\int_0^{x_1} (x + (y')^2 - 3)\, dx$$

con $y(0) = 0$, $x_1$ e $y(x_1) = y_1$ arbitrari.

Esercizio 3

Calcolare gli estremali per il seguente problema di minimo

$$\int_0^{x_1} (x + (y')^2)\, dx$$

con $y(0) = 0$ e $y(x_1) = \psi(x_1) = 6 - x_1$.

Esercizio 4

Determinare le geodetiche sulla superficie cilindrica in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x^2 + y^2 = 1$ (suggerimento: usare le coordinate cilindriche).

Esercizio 5

Determinare gli estremali vincolati per il funzionale

$$\int_0^1 [y^2 + (z')^2]dt$$

tra tutte le curve di $\mathbf{R}^3$ giacenti sulla superficie $z = x^2 + y^2$ e aventi come estremi i punti $A(0, 1, 1)$ e $B = (0, -1, 1)$.

# Terza Lezione

# IL PROBLEMA DEL CONTROLLO OTTIMO

In questa parte ci occuperemo del problema del controllo ottimo che consiste nel minimizzare (o massimizzare) un certo funzionale reale (detto *funzione costo* o semplicemente *costo*) rispetto a tutte le funzioni di controllo che risolvono un certo problema di controllabilità. Dapprima faremo vedere come sotto certe ipotesi restrittive, il problema del controllo ottimo possa essere ricondotto ad un problema classico di calcolo delle variazioni. Quindi discuteremo i limiti di un tale procedimento e presenteremo un teorema, noto come Principio di massimo di Pontrjagin, che permette di affrontare il problema del controllo ottimo direttamente. A questo punto percorreremo una strada in un certo senso inversa rispetto alla precedente, mostrando come, per mezzo del Principio di massimo di Pontrjagin, si possono ritrovare i principali risultati del calcolo delle variazioni classico.

Come vedremo, l'approccio basato sul Principio di massimo di Pontrjagin è anzi più generale: esso può infatti essere impiegato anche in circostanze nelle quali i metodi del calcolo delle variazioni risultano inapplicabili.

## Impostazione del problema

Per il momento, non supporremo nessuna forma speciale per l'equazione che definisce il processo di controllo, ma ci limiteremo per semplicità al caso scalare autonomo, indicando poi le possibili generalizzazioni. Sia dunque data l'equazione

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad x \in \mathbf{R}\ , \quad u \in \mathbf{R} \tag{1}$$

nella quale la funzione $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ si suppone di classe $C^1$ (almeno).

Sia $U \subseteq \mathbf{R}$, e consideriamo come *ammissibili* tutte le funzioni di controllo definite su un intervallo sufficientemente grande, diciamo $[0,+\infty)$, continue a tratti e a valori in $U$. Siano inoltre $x_0, x_1$ due numeri reali assegnati, e indichiamo con $\mathcal{U}$ l'insieme di tutti i controlli ammissibili $u(\cdot)$ per i quali esiste $T > 0$ tale che

$$x(T; x_0, u(\cdot)) = x_1\ , \tag{2}$$

dove con $x(t; x_0, u(\cdot))$ abbiamo indicato la soluzione di (1) corrispondente ad $u(\cdot)$ e per la quale

$$x(0; x_0, u(\cdot)) = x_0 \ . \tag{3}$$

Per ogni $u \in \mathcal{U}$, e per ogni $T$ per cui la (2) è soddisfatta, la *funzione costo* si rappresenta usualmente per mezzo di un funzionale della forma

$$J(T, u(\cdot)) = \int_0^T f_0(x(t), u(t))\, dt \tag{4}$$

dove $f_0$ è una funzione assegnata, anch'essa di classe $C^1$, e dove si è posto, per alleggerire le notazioni, $x(t) = x(t; x_0, u(\cdot))$. Una coppia costituita da un istante $T^* > 0$ e da una funzione di controllo $u^* \in \mathcal{U}$ si dice *ottima* se

$$J(T^*, u^*(\cdot)) \leq J(T, u(\cdot))$$

(ovvero $J(T^*, u^*(\cdot)) \geq J(T, u(\cdot))$) per ogni altra coppia $(T, u)$ con $T > 0$ e $u \in \mathcal{U}$. Il problema di determinare una coppia ottima $(T^*, u^*)$ si dice un problema di *ottimizzazione*, o di *controllo ottimo*. La soluzione della (1) corrispondente ad $u^*(t)$ si indicherà convenzionalmente con $x^*(t) = x(t; x_0, u^*(\cdot))$ e si dirà una *soluzione ottima* sull'intervallo $[0, T^*]$.

Osserviamo in particolare che con questa formulazione, nel problema del controllo ottimo interessano quasi esclusivamente massimi e minimi assoluti.

## Il principio della programmazione dinamica

Stabiliamo subito una proprietà importante dei controlli ottimi.

Proposizione 1 (Principio della programmazione dinamica)

Sia $(T^*, u^*)$ una coppia ottima per il problema (1), (2), (4) e sia $\tilde{T} < T^*$. Allora, posto

$$x^*(\tilde{T}) = \tilde{x} \ , \tag{2'}$$

la coppia costituita da $\tilde{T}$ e dalla restrizione di $u^*$ all'intervallo $[0, \tilde{T}]$

$$\tilde{u}(t) = u^*\big|_{[0,\tilde{T}]}(t)$$

è ottima rispetto al problema di ottimizzare il funzionale (4) tra tutti i controlli che trasferiscono il sistema (1) dallo stato $x_0$ allo stato $\tilde{x}$.

Dimostrazione

Tanto per fissare le idee, ci riferiremo a un problema in cui siamo interessati a minimizzare la funzione costo (4).

Supponiamo per assurdo che esista un istante $\hat{T} > 0$ e una funzione di controllo $\hat{u} : [0, \hat{T}] \to U$ tale che $x(\hat{T}; x_0, \hat{u}(\cdot)) = \tilde{x}$ e

$$J_{\tilde{x}}(\hat{T}, \hat{u}(\cdot)) < J_{\tilde{x}}(\tilde{T}, \tilde{u}(\cdot)) \tag{5}$$

(per maggiore chiarezza, nella (5) abbiamo modificato la notazione in maniera da evidenziare il punto d'arrivo che determina il problema di controllabilità e quindi la classe dei controlli rispetto alla quale si calcolano i valori del funzionale).

Definiamo $\tau = T^* - \tilde{T}$, $\theta = \tilde{T} - \hat{T}$ e

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}(t) \ , & t \in [0, \hat{T}] \\ u^*(t + \theta) \ , & t \in (\hat{T}, \hat{T} + \tau] \ . \end{cases}$$

Poniamo inoltre, per brevità, $x(t) = x(t; x_0, u(\cdot))$ e $\hat{x}(t) = x(t; x_0, \hat{u}(\cdot))$. È chiaro che $x^*(\tilde{T}) = \hat{x}(\hat{T}) = x(\hat{T}) = \tilde{x}$. Inoltre, le funzioni di controllo $u(t)$ e $u^*(t)$ prese rispettivamente sugli intervalli $[\hat{T}, \hat{T} + \tau]$ e $[\tilde{T}, T^*] = [\tilde{T}, \tilde{T} + \tau]$ coincidono a meno di una traslazione. Dunque, $x(\hat{T} + \tau) = x^*(T^*) = x_1$.

Inoltre,

$$\begin{aligned} J_{x_1}(\hat{T} + \tau, u(\cdot)) &= \int_0^{\hat{T}} f_0(x(t), u(t))\, dt + \int_{\hat{T}}^{\hat{T}+\tau} f_0(x(t), u(t))\, dt = \\ &= \int_0^{\hat{T}} f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt + \int_{\hat{T}}^{\hat{T}+\tau} f_0(x(t), u^*(t + \theta))\, dt = \\ &= J_{\tilde{x}}(\hat{T}, \hat{u}(\cdot)) + \int_{\tilde{T}}^{T^*} f_0(x^*(s), u^*(s))\, ds \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la sostituzione $s = t + \theta$ al secondo integrale, e ricordato che $x(s - \theta)$ e $x^*(s)$ coincidono sull'intervallo $[\tilde{T}, T^*]$. Facendo uso della (5) si ha ora

$$J_{x_1}(\hat{T} + \tau, u(\cdot)) < J_{\tilde{x}}(\tilde{T}, \tilde{u}(\cdot)) + \int_{\tilde{T}}^{T^*} f_0(x^*(t), u^*(t))\, dt = J_{x_1}(T^*, u^*(\cdot))$$

il che è assurdo.

∎

## Riduzione a un problema di calcolo delle variazioni

In questo paragrafo illustreremo come, sotto alcune ipotesi restrittive, il problema di controllo ottimo possa essere ricondotto ad un problema variazionale e quindi le sue soluzioni possano essere caratterizzate con i metodi studiati nelle lezioni precedenti.

Le ipotesi necessarie sono due.

1) $U = \mathbf{R}$

2) Le funzioni di controllo ammissibili sono di classe $C^1$.

La prima ipotesi significa che non ci sono vincoli sui valori assegnabili alle funzioni di controllo (più in generale, sarebbe sufficiente richiedere che $U$ sia un insieme aperto).

Per inquadrare il problema di controllo ottimo nell'ambito del calcolo delle variazioni, interpreteremo (2) e (3) come condizioni nei punti terminali e la (1) come un vincolo di tipo non olonomo (lo studente è invitato a far attenzione al diverso uso dei simboli che è tradizionale e dovuto alle diverse origini delle due teorie: $x$ è ora la variabile dipendente e $t$ la variabile indipendente).

Abbiamo dunque a che fare con un problema di estremo vincolato con due incognite ($x$ e $u$), in cui uno solo dei punti terminali è libero ma i valori terminali che la $x$ deve assumere sono fissati. Introducendo il moltiplicatore di Lagrange $\lambda$, gli estremanti del nostro problema si troveranno tra le soluzioni delle equazioni di Eulero relative al funzionale ausiliario definito da

$$F(x, u, \lambda, \dot{x}) = f_0(x, u) + \lambda(\dot{x} - f(x, u))$$

nel quale compare, come incognita $\lambda = \lambda(t)$, il moltiplicatore di Lagrange. Poiché $F$ contiene le due variabili $x$ e $u$, le equazioni di Eulero saranno pure due e precisamente

$$F_x(x, u, \lambda, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(x, u, \lambda, \dot{x}) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, u) - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) - \dot{\lambda} = 0 \tag{6}$$

$$F_u(x, u, \lambda, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{u}}(x, u, \lambda, \dot{x}) = \frac{\partial f_0}{\partial u}(x, u) - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = 0 \ . \tag{7}$$

Notare che la (7) non è un'equazione differenziale, e ciò in virtù del fatto che $F$ non dipende da $\dot{u}$.

Alle (6), (7) va naturalmente aggiunta l'equazione del vincolo (1), che si riottiene ponendo $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$.

Vogliamo adesso discutere la possibilità di interpretare il nostro problema dal punto di vista Hamiltoniano. Per prima cosa dobbiamo individuare la trasformata (di Legendre) che fornisce la variabile canonica. Quest'ultima è data da

$$q = F_{\dot{x}}(x, u, \lambda, \dot{x}) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}[f_0(x, u) + \lambda(\dot{x} - f(x, u))] = \lambda \ . \tag{8}$$

La (8) mostra che la variabile canonica $q$ coincide col moltiplicatore di Lagrange $\lambda$, il quale viene così ad assumere una specie di "doppia personalità". Volendo procedere come nella prima lezione, si dovrebbe ora introdurre la trasformazione "inversa" della (8), $\dot{x} = \Psi(x, u, \lambda, q)$, e definire la funzione Hamiltoniana come

$$\begin{aligned} H(x, u, \lambda, q) &= \lambda\Psi(x, u, \lambda) - f_0(x, u) - \lambda\Psi(x, u, \lambda) + \lambda f(x, u) = \\ &= \lambda f(x, u) - f_0(x, u) \ . \end{aligned}$$

Formalmente, questo ragionamento non è corretto in quanto la (8) non è invertibile (la (8) associa ad ogni valore di $\dot{x}$ la costante $\lambda$), ma ci fornisce comunque un utile suggerimento. Dal momento che nell'espressione finale ottenuta la $\Psi$ non compare esplicitamente, viene naturale definire la funzione Hamiltoniana ponendo direttamente

$$H(x,u,\lambda) = \lambda f(x,u) - f_0(x,u) \ .$$

Si ha, come prevedibile,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) - \frac{\partial f_0}{\partial x}(x,u) \tag{9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u) \tag{10}$$

e si ritrovano la (1) e la (6) messe in forma Hamiltoniana:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}(x,u,\lambda) \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,u,\lambda) \ . \end{cases} \tag{11}$$

Si ha inoltre

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) - \frac{\partial f_0}{\partial u}(x,u) = 0 \tag{12}$$

in conseguenza della (7). In conclusione, abbiamo provato il seguente risultato.

<u>Teorema 1</u>

Se $(T^*, u^*)$ è una coppia ottima per il problema (1), (2), (4) e se $x^*(t)$ è la soluzione ottima corrispondente, allora esiste una funzione $\lambda^*(t)$ tale che le relazioni (11) e (12) risultano verificate per $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$, $\lambda = \lambda^*(t)$ e ogni $t \in [0, T^*]$.

∎

<u>Osservazione 1</u>

La (11) e la (12) suggeriscono una possibile strada per determinare il controllo ottimo e la corrispondente soluzione. Si cerchi di risolvere (11) con le condizioni (2), (3) e tenendo $u$ come un parametro. Sostituendo in $H$ le soluzioni trovate, la (12) dice allora che per ogni istante $t \in [0, T^*]$, il valore assunto da $u^*$ corrisponde ad un punto stazionario di $H$, ed è cioè un suo massimo (o minimo) candidato.

∎

Nel "gergo" della teoria dei controlli il parametro $\lambda$ viene più comunemente chiamato *variabile aggiunta* (o *co-stato*), e la (6) (seconda delle (11)) *equazione aggiunta.*

Ai fini della risoluzione di (11), poiché nella nostra impostazione del problema anche $T^*$ è un'incognita e deve essere determinato, potrà essere utile ricorrere alla condizione di trasversalità ((20) della seconda lezione). A tale scopo, possiamo interpretare la (2) come una condizione di intersezione tra il grafico della soluzione $x(t; x_0, u(\cdot))$ e quello della funzione costante $\psi(t) \equiv x_1$. Si ottiene allora, per ogni coppia ottima $(T^*, u^*)$,

$$f_0(x^*(T^*), u^*(T^*)) + \lambda^*(T^*)[\dot{x}^*(T^*) - f(x^*(T^*), u^*(T^*))] - \dot{x}^*(T^*)\lambda^*(T^*) = 0$$

ovvero

$$f_0(x^*(T^*), u^*(T^*)) - \lambda^*(T^*) f(x^*(T^*), u^*(T^*)) = 0 \ . \tag{13}$$

Un problema alternativo potrebbe essere quello in cui il secondo punto terminale dell'intervallo è fissato, $T = \bar{T}$, mentre non vi è nessuna prescrizione sullo stato $x_1$ che si desidera raggiungere. In tal caso si dovrebbe usare la (5) della seconda lezione e si otterrebbe, come è facile verificare, la condizione

$$\lambda^*(\bar{T}) = 0 \ . \tag{13'}$$

Si noti comunque che quello da risolvere in relazione al sistema (11) non è un problema di Cauchy, in quanto le condizioni che devono essere soddisfatte dalle soluzioni sono assegnate parte all'istante iniziale (vedi (3)) e parte all'istante finale ((2) e (13) ovvero, a seconda dei casi, (13′)).

Il caso più semplice si presenta naturalmente quando sono assegnati sia l'istante finale $\bar{T}$ sia il valore finale $x_1$ desiderato per lo stato. Il problema variazionale corrispondente è allora del tipo a punti e valori terminali fissati. Le costanti che intervengono nell'integrazione del sistema (11) si determinano imponendo $x(0) = x_0$ e $x(\bar{T}) = x_1$.

<u>Osservazione 2</u>

Essendo il problema (1), (4) autonomo, $H$ è di fatto indipendente da $t$ e fornisce così un integrale primo di (11). In particolare, $H$ risulta costante quando calcolato in corrispondenza dei controlli ottimi e delle relative soluzioni. Tenendo conto della forma di $H$ e della (13), si ottiene anzi subito che

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0, T^*] \ . \tag{14}$$

∎

La teoria svolta in questo paragrafo può essere estesa senza difficoltà al caso vettoriale. In particolare, se $x \in \mathbf{R}^n$ e $u \in \mathbf{R}^m$, anche $\lambda$ andrà preso in $\mathbf{R}^n$ e le (11), (12) vengono sostituite da un insieme di $2n + m$ equazioni.

Infine, se il problema non è autonomo, lo si può ricondurre ad un problema autonomo aumentando di uno la dimensione dello spazio degli stati: basta infatti introdurre una componente fittizia $x_{n+1} = t$, a cui corrisponde l'equazione

$$\dot{x}_{n+1} = 1 \ .$$

Un esempio

Il seguente problema di navigazione, proposto da Zermelo nel 1931, presenta un notevole interesse, anche per aver ispirato recenti ricerche.

Supponiamo di rappresentare la superficie marina su un piano cartesiano. Supponiamo di conoscere il movimento delle correnti, che si spostano parallelamente all'asse $x$ nella direzione positiva, con velocità proporzionale all'ordinata $y$. Il problema consiste nel trasferire un battello dall'origine al punto $A$ di coordinate $(a, 0)$ (con $a > 0$) nel minimo tempo possibile. Il battello è dotato di un motore che produce una spinta di modulo costante. Per mezzo del timone, il battello può inoltre essere orientato a piacimento e "in tempo reale", cioè senza che vi sia un ritardo apprezzabile tra l'azione esercitata sul timone e la realizzazione del suo effetto.

È naturale identificare nell'angolo formato dall'asse che unisce la prua e la poppa del battello con l'asse delle $x$ la variabile di controllo. Indicheremo pertanto tale angolo con la lettera $u$.

La velocità con cui si muove istantaneamente il battello è data dalla somma vettoriale della spinta dovuta all'azione del motore e della velocità della corrente.

È intuitivo che il percorso ottimo non è costituito dalla linea retta che unisce $A$ con l'origine. Spostandosi dall'asse $x$, si potrà infatti sfruttare la maggior forza delle correnti e migliorare il tempo di percorrenza. Tuttavia, allontanarsi troppo dall'asse $x$ sarebbe sbagliato, perché potrebbe esserci il rischio di essere trascinati dalla corrente al di là di $A$, e di dover perdere del tempo per riuscire a tornare indietro.

Siano $t \mapsto (x(t), y(t))$ le equazioni di una curva che rappresenti una soluzione del nostro problema. I ragionamenti effettuati in precedenza conducono alle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \cos u \\ \dot{y} = \sin u \end{cases} \tag{15}$$

(per semplicità, si sono poste uguali a 1 sia la costante di proporzionalità della corrente sia il modulo della spinta prodotta dal motore). Le condizioni sulla posizione di partenza e di arrivo implicano

$$\begin{cases} x(0) = 0 \ , \qquad y(0) = 0 \\ x(T) = a \ , \qquad y(T) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

avendo indicato con $T$ la durata della traversata. Poiché $T$ coincide con la quantità da minimizzare, poniamo $f_0(x, u) = 1$, così che

$$J(T,u) = \int_0^T f_0(x,u)\,dt = T\ .$$

Poiché non ci sono vincoli su $u$ e poiché è ragionevole pensare che la funzione $u(t)$ che descrive l'azione esercitata sul timone sia regolare, possiamo risolvere il problema ricorrendo al calcolo delle variazioni. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, conviene formare la funzione

$$F(x,y,u,\lambda,\mu) = 1 + \lambda(\dot{x} - y - \cos u) + \mu(\dot{y} - \sin u)$$

dove compaiono due moltiplicatori di Lagrange in quanto due sono le incognite da determinare in funzione di $t$.

Scrivendo le equazioni di Eulero associate a $F$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 \\ \dot{\mu} = -\lambda \\ \lambda \sin u = \mu \cos u \end{cases}$$

alle quali vanno naturalmente aggiunte le (15). Dal sistema precedente si ricava

$$u = \operatorname{arctg}\big(\frac{K_1}{K_2} - t\big)\ . \tag{17}$$

Sostituendo in (15), si ottiene un sistema che ha $x(t)$ e $y(t)$ tra le sue soluzioni. Osserviamo che le soluzioni di tale sistema dipendono in generale da quattro costanti (due costanti di integrazione, più le due che compaiono nella (17)). A queste si aggiunge l'istante finale $T$, che è un'incognita del nostro problema. Tutte queste costanti possono essere determinate, almeno in linea di principio, in virtù delle condizioni (16) e di un'appropriata condizione di trasversalità.

Non discuteremo qui la questione dell'integrabilità del sistema (15), (17); ci limiteremo ad osservare che la legge di controllo (17) corrisponde effettivamente a quanto avevamo previsto per via intuitiva. La barra del timone deve essere orientata di un angolo iniziale positivo, in modo da dirigere Il battello verso le correnti più intense. L'angolo deve quindi essere progressivamente diminuito fino al raggiungimento della meta. I valori iniziale e finale dell'angolo dipendono in ultima analisi dal valore di $a$.

# Quarta Lezione

# IL PRINCIPIO DI PONTRJAGIN

Nella lezione precedente abbiamo considerato un problema di controllo ottimo e abbiamo visto come lo si può ricondurre ad un problema variazionale. Abbiamo quindi ottenuto alcune informazioni sulle soluzioni interpretando $x$ e $u$ come variabili reciprocamente indipendenti e scrivendo le relative equazioni di Eulero.

Questo modo di procedere si presta ad una seria critica. Ricordiamo infatti che le equazioni di Eulero si deducono sottoponendo gli estremanti $x(t)$ e $u(t)$ a variazioni arbitrarie del tipo

$$x(t) + \alpha\delta(t) \qquad \text{e} \qquad u(t) + \beta\gamma(t) \ .$$

Ora è chiaro che per poter applicare variazioni di questo tipo $x(t)$ e $u(t)$ devono giacere all'interno dell'insieme dei valori consentiti.

Se vi sono vincoli sui valori dello stato o del controllo e se questi sono rappresentati come luogo degli zeri di una funzione regolare, allora possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Tuttavia, quando i vincoli sono rappresentati da disuguaglianze o da insiemi generici la situazione è più complicata.

Ciò è proprio quello che si verifica in molte applicazioni della Teoria dei controlli. Esercitare un controllo significa infatti, come abbiamo già osservato, trasmettere in qualche modo energia al sistema. È allora naturale supporre che i valori delle funzioni di controllo ammissibili non possano eccedere certi limiti. Nel caso scalare tali limiti potrebbero essere rappresentati, per esempio, da una condizione del tipo

$$u(t) \in U$$

per ogni $t$ per cui $u$ è definito dove $U$ è un intervallo assegnato. Più in generale, se $u$ è una funzione vettoriale,

$$u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m \ .$$

Questo insieme $U$ risulta spesso chiuso e l'esperienza insegna che i controlli ottimi prendono di regola valori sulla frontiera di $U$. In queste condizioni, la procedura precedentemente indicata non ha più alcuna giustificazione.

In corrispondenza di valori del controllo ottimo appartenenti alla frontiera dell'insieme dei vincoli perde di significato anche l'interpretazione Hamiltoniana; non è infatti ben definita la derivata di $H$ rispetto ad $u$.

La situazione presenta una certa analogia con quanto accade nel calcolo elementare: se $I$ è un intervallo aperto e $f(x)$ una funzione derivabile, allora i punti di massimo o di minimo sono tra le soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. Ma se $I$ è chiuso, allora possono esserci massimi o minimi agli estremi, non individuabili per mezzo della derivata.

Un'altra obiezione all'approccio basato sul calcolo delle variazioni classico nasce dalla considerazione che, per risolvere il sistema (1), (6), (7) (equivalentemente, (11), (12)) è necessario postulare una certa regolarità delle incognite $x(t)$, $\lambda(t)$ e quindi anche di $u(t)$.

Vengono così escluse le soluzioni costituite da funzioni di controllo costanti a tratti, che invece sono molto comuni in certe applicazioni (una funzione costante a tratti modellizza abbastanza bene, per esempio, le varie posizioni di un commutatore).

In questo paragrafo presenteremo un teorema noto come "Principio di massimo di Pontrjagin", che fornisce condizioni necessarie per le soluzioni di un problema di controllo ottimo definito dall'equazione (autonoma)

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \tag{18}$$

e dal funzionale

$$J(T, u(\cdot)) = \int_0^T f_0(x(t), u(t))\, dt \tag{19}$$

soggetto alle condizioni $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$ e al vincolo

$$u(t) \in U, \quad \forall t \in [0, +\infty)\ .$$

Le funzioni $f$ e $f_0$, i punti $x_0, x_1$ e l'insieme $U$ costituiscono i dati del problema. I controlli ammissibili sono tutte le funzioni $u : [0, +\infty) \to U$ continue a tratti. Sulle funzioni $f$ e $f_0$ manterremo le ipotesi già fatte, e cioè che siano almeno di classe $C^1$. Sull'insieme $U$ non faremo ipotesi particolari, tranne il fatto che $U \neq \emptyset$. Le incognite sono rappresentate dal controllo $u(t)$ e dall'istante finale $T$, come spiegato nella prima parte di questa stessa lezione.

Ricordiamo inoltre che una soluzione $(T^*, u^*(t))$ del nostro problema si dice una coppia ottima, e la soluzione corrispondente $x^*(t)$ una soluzione ottima.

Per semplicità, supporremo che la soluzione di (18) corrispondente a ogni condizione iniziale e ogni controllo ammissibile sia definita per qualsiasi $t \in [0, +\infty)$.

Il Principio di massimo di Pontrjagin in molti casi fornisce informazioni sufficienti a determinare la forma del controllo ottimo. Inoltre, come vedremo, se $U$ è aperto e se si riscontrano certe condizioni di regolarità, l'equazione di Eulero ed altri importanti risultati del calcolo delle variazioni si possono ottenere come sue conseguenze. Per semplicità di esposizione, ci limiteremo anche in questo paragrafo al caso scalare: continueremo cioè a supporre che lo spazio degli stati e lo spazio dei controlli siano unidimensionali. Lo studente potrà facilmente estendere le conclusioni al caso vettoriale $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$.

Una volta effettuata la generalizzazione al caso vettoriale, non è difficile includere anche problemi non autonomi, in cui $f$ e $f_0$ dipendono dal tempo (purché la dipendenza dal tempo sia regolare). Basta infatti porre $x_{n+1} = t$ e aggiungere al sistema (18) l'equazione $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Per arrivare a formulare il Principio di massimo di Pontrjagin, cominciamo con l'introdurre una nuova funzione $z(t) : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, definita come

$$z(t) = \int_0^t f_0(x(\tau), u(\tau)\, d\tau \tag{20}$$

per ogni data coppia di funzioni $x(t)$ e $u(t)$. La $z(t)$ risulta continua ovunque, e derivabile a tratti. Inoltre, con l'esclusione degli istanti in cui $u(t)$ non è continua,

$$\dot{z}(t) = f_0(x(t), u(t)) \ . \tag{21}$$

Possiamo allora riformulare il problema nel modo seguente. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = f_0(x, u) \\ \dot{x} = f(x, u) \end{cases} \tag{22}$$

trovare un istante $T > 0$ e una funzione di controllo

$$u : [0, +\infty) \to U \subset \mathbf{R}$$

tale che, denotata con $(x(t), z(t))$ la soluzione di (22) corrispondente all'ingresso $u = u(t)$ e ai dati iniziali ([1])

$$x(0) = x_0 \ , \quad z(0) = 0 \tag{23}$$

siano verificate le condizioni seguenti:

(24) $x(T) = x_1$

(25) $z(T)$ assume il minimo (o massimo) valore possibile.

Vogliamo dare un'interpretazione geometrica del problema. A tal fine, è necessario distinguere gli insiemi raggiungibili "effettivi" del processo (18), che sono sottoinsiemi di

([1]) L'ipotesi che $f$ e $f_0$ siano di classe $C^1$ garantisce in particolare esistenza e unicità delle soluzioni di (22) rispetto alle condizioni $x(0) = x_0$, $z(0) = 0$, per ogni controllo ammissibile.

$\mathbf{R}$, da quelli del processo (22) che, avendo introdotto per nostra comodità una variabile fittizia, sono sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$. Conveniamo di indicare questi ultimi con $R^\sharp$: poniamo

$$R^\sharp((0,x_0)) = \bigcup_{t\geq 0} R^\sharp(t,(0,x_0)) \ .$$

Ora, risulta evidente che se $(T^*, u^*(t))$ è una soluzione ottima e se $(z^*(t), x^*(t))$ è la corrispondente soluzione di (22), allora il punto di coordinate $(z^*(T^*), x^*(T^*))$ deve appartenere alla frontiera di $R^\sharp((0,x_0))$.

Se infatti fosse $(z^*(T^*), x_1)$ interno a $R^\sharp((0,x_0))$, eventualmente con un altro controllo e un altro istante terminale si potrebbe migliorare il valore di $z$.

In particolare, $(z^*(T^*), x^*(T^*)) \in \mathrm{Fr}\, R^\sharp(T^*,(0,x_0))$. Ma in virtù della Proposizione 1 le restrizioni di controlli ottimi sono ancora dei controlli ottimi. Possiamo dunque affermare che qualunque sia $t \in [0, T^*]$

$$(z^*(t), x^*(t)) \in \mathrm{Fr}\, R^\sharp(t,(0,x_0))$$

(criterio geometrico di ottimalità). Il viceversa è vero solo sotto particolari condizioni.

Introduciamo una funzione, anch'essa di classe $C^1$, da $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}$

$$\mathcal{H}(\omega,\psi,x,u) = \omega f_0(x,u) + \psi f(x,u) \ . \tag{26}$$

Il sistema (22) si può anche riscrivere come

$$\dot z = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \ , \quad \dot x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \ . \tag{27}$$

Possiamo inoltre considerare le equazioni

$$\dot\omega = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \tag{28}$$

e

$$\dot\psi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\omega \frac{\partial f_0}{\partial x}(x,u) - \psi \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) \ . \tag{29}$$

L'informazione contenuta nella (28) è equivalente all'affermazione che $\omega(t) = \omega_0 =$ costante. Per ogni assegnazione delle funzioni $x = x(t)$ e $u = u(t)$ e per ogni scelta di $\omega$, la (29) risulta invece un'equazione lineare (a coefficienti non costanti): disponiamo così di una formula per rappresentare l'integrale generale. Si noti che il fatto che la (29) sia riuscita lineare non è casuale, ma dipende dalla definizione di $\mathcal{H}$.

Siamo ora pronti a formulare un enunciato del Principio di massimo di Pontrjagin.

Teorema 2

Supponiamo che il problema di ottimizzazione (25) relativo al sistema (22) con le condizioni (23), (24) abbia una soluzione $u^*(t)$ sull'intervallo $[0, T^*]$, e sia $(z^*(t), x^*(t))$ la corrispondente soluzione di (22). Allora, esiste una costante $\omega^* \le 0$ e una soluzione non nulla $\psi^*(t)$ dell'equazione

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(\omega^*, \psi, x^*(t), u^*(t)) \tag{29'}$$

tale che, per ogni $t \in [0, T^*]$ per cui $u^*(t)$ è continua, si abbia

$$\mathcal{H}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0 \tag{$i$}$$

$$\mathcal{H}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\omega^* \ \psi^*(t), x^*(t), u) \tag{$ii$}$$

$\blacksquare$

Osservazione 3

La terna $(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t))$ può essere interpretata come soluzione del sistema costituito dalla (18), dalla (28) e dalla (29), in corrispondenza della scelta $u = u^*(t)$. L'equazione (29) e la variabile $\psi$ si designano rispettivamente con nome di *equazione* e *variabile aggiunta* (l'analogia tra la $\psi$ e quella che è stata chiamata variabile aggiunta in precedenza sarà discussa tra breve).

$\blacksquare$

Osservazione 4

Sulla base dell'enunciato, conviene distinguere i casi $\omega^* = 0$ e $\omega^* < 0$. Nel caso $\omega^* < 0$, non è di fatto restrittivo supporre $\omega^* = -1$. Ciò equivale infatti a sostituire alla funzione $\mathcal{H}$ la funzione $\mathcal{H}^\sharp = \frac{1}{|\omega^*|}\mathcal{H}$ e alla variabile aggiunta $\psi$ la $\psi^\sharp = \frac{1}{|\omega^*|}\psi$. Evidentemente ciò non altera le conclusioni del Teorema 2. In particolare, per quanto riguarda la (29′) osserviamo che

$$\dot{\psi}^\sharp = \frac{1}{|\omega^*|}\dot{\psi} = -\frac{1}{|\omega^*|}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{H}^\sharp}{\partial x} \ .$$

Osservazione 5

Si noti che il massimo che compone nella $(ii)$ esiste certamente se $U$ è compatto, in quanto $\mathcal{H}$ è continua rispetto ad $u$.

L'enunciato precedente corrisponde alla forma più generale del Principio di massimo di Pontrjagin. Tuttavia, dal momento che siamo interessati al confronto con i risultati del calcolo delle variazioni classico, è interessante anche vedere che cosa cambia quando si applica il Principio di massimo di Pontrjagin ad un problema del tipo (18), (19) in cui però il secondo estremo di integrazione, ovvero l'istante terminale del processo, sia prestabilito.

Facciamo innanzitutto vedere come il problema (18), (19) con istante finale $T = \bar{T}$ prestabilito, possa essere ricondotto ad un problema a istante terminale libero, a condizione di aumentare di una unità la dimensione dello spazio degli stati. A tal fine, si introduca la nuova variabile $w = t$. L'equazione (18) viene sostituta ovviamente dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{w} = 1 \end{cases} \tag{30}$$

Si proceda come prima, introducendo l'ulteriore variabile $z$ e la funzione

$$\mathcal{H}^+(\omega, \psi, \eta, x, w, u) = \omega f_0(x, u) + \psi f(x, u) + \eta \ .$$

Si noti la presenza di due variabili aggiunte $\psi$ e $\eta$, in accordo con la presenza di due variabili di stato. La variabile $\omega$ si può pensare, anche in questo caso, come la variabile aggiunta associata alla $z$. Il problema originale, con le condizioni $x(0) = x_0$ e $x(\bar{T}) = x_1$ ($\bar{T}$ prefissato ) è evidentemente equivalente al nuovo problema con le condizioni

$$x(0) = x_0, \ w(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad x(T) = x_1, \ w(T) = \bar{T}$$

ma con $T$ libero di variare. Del fatto che il processo deve terminare esattamente a $t = \bar{T}$ viene infatti tenuto implicitamente conto in conseguenza della seconda delle (30). Da $\dot{w} = 1$, $w(0) = 0$ si ricava infatti $w(t) = t$ e dunque la condizione $w(T) = \bar{T}$ potrà essere soddisfatta solo se $T = \bar{T}$.

Applicando il Principio di massimo di Pontrjagin al nuovo problema e cioè con riferimento alla funzione $\mathcal{H}^+$, si arriva allora alla conclusione che se $u^*(t)$ è un controllo ottimo e $x^*(t)$ la relativa soluzione, allora esiste $\omega^*$ e una soluzione $(\psi^*(t), \eta^*(t))$ non nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}^+}{\partial x}(\omega^*, \psi, \eta, x^*(t), w^*(t), u^*(t)) \\ \dot{\eta} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}^+}{\partial w}(\omega^*, \psi, \eta, x^*(t), w^*(t), u^*(t)) \end{cases} \tag{31}$$

tale che

$$\begin{aligned} 0 =& \mathcal{H}^+(\omega^*, \psi^*(t), \eta^*(t), x^*(t), w^*(t), u^*(t)) = \\ =& \max_{u \in U} \mathcal{H}^+(\omega^*, \psi^*(t), \eta^*(t), x^*(t), w^*(t), u) \ . \end{aligned}$$

Queste conclusioni si semplificano notevolmente se si tiene conto della seconda delle (31). Infatti, poichè $\mathcal{H}^+$ non dipende esplicitamente da $w$, essa si riduce a

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial \mathcal{H}^+}{\partial w} = 0$$

dalla quale si deduce $\eta =$ costante. Questo significa in particolare che

$$\mathcal{H}^+(\omega^*, \psi^*(t), \eta^*, x^*(t), w^*(t), u)$$

(pensata come funzione di $t$ e $u$) differisce solo per una costante additiva dalla funzione $\mathcal{H}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u)$, dove $\mathcal{H}$ è definita dalla (26).

Ma l'aggiunta di una costante non modifica la disposizione dei punti di massimo. Dunque dalla condizione di massimo ottenuta per $\mathcal{H}^+$ si risale immediatamente ad un'analoga condizione per $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u) \ .$$

Si conclude allora che la (*ii*) del Teorema 2 continua a valere, come condizione necessaria, anche nei problemi con tempo terminale fissato. Si noti inoltre che essendo $\eta$ costante, la prima delle (31) viene a coincidere con l'equazione aggiunta (29').

Infine, il principio di massimo applicato al nuovo problema stabilisce che $\mathcal{H}^+$ si annulla quando viene calcolato lungo gli elementi ottimi. Ciò significa che

$$\mathcal{H}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{ constante,}$$

ma non possiamo affermare niente circa il valore della costante. A ciò si riduce quindi la differenza tra l'enunciato del Principio di massimo nel caso a estremo terminale libero e quello del Principio di massimo a estremo terminale fissato. Non deve sorprendere che in questo secondo caso si venga a perdere un'informazione: non dobbiamo dimenticare infatti che il problema presenta adesso un'incognita in meno.

## Riduzione a un problema di controllo ottimo

Siamo adesso pronti a mostrare come l'equazione di Eulero per il problema base del calcolo delle variazioni possa essere dedotta dal Principio di massimo di Pointrjagin.

Siano dati un intervallo (fissato) $[0, T]$, una funzione $f_0(x, \dot{x})$ e due numeri $x_0$, $x_1$ (in questa fase del nostro studio, abbiamo deciso di privilegiare le notazioni tradizionali della Teoria del controllo).

Osserviamo che il problema di minimizzare (o massimizzare) il funzionale

$$\int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{32}$$

sotto le condizioni $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, è equivalente al problema di ottimizzazione relativo al funzionale

$$\int_0^T f_0(x(t), u(t))\, dt \tag{33}$$

e all'equazione

$$\dot{x} = u \ . \tag{34}$$

Le funzioni di controllo non sono soggette ad alcun vincolo, e cioè $U = \mathbf{R}$. Il problema inoltre è del tipo a estremi fissi, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$.

In virtù di (34), la funzione $\mathcal{H}$ di cui si fa uso nel Teorema 2 prende ora la forma

$$\mathcal{H}(\omega, \psi, x, u) = \omega f_0(x, u) + \psi u. \tag{35}$$

Di conseguenza, la (29) si riduce a

$$\dot{\psi} = -\omega \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, u) \ . \tag{36}$$

Poiché $\mathcal{H}$ è differenziabile e poiché $U = \mathbf{R}$, la condizione di massimo $(ii)$ implica che se $x^*(t)$ è un estremante di (32), e quindi una soluzione ottima del problema (33), (34), allora per un'opportuna costante $\omega^*$ e un'opportuna soluzione $\psi^*(t)$ dell'equazione

$$\dot{\psi} = -\omega^* \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), u^*(t)) \tag{36'}$$

(l'esistenza delle quali è garantita dal Principio di Massimo), si debba avere

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0 \tag{37}$$

per ogni $t \in [0, T]$, dove, in accordo con la (34), si è posto $u^*(t) = \dot{x}^*(t)$.

Possiamo sviluppare la (37) tenendo conto della (35), e si ottiene

$$\omega^* \frac{\partial f_0}{\partial u}(x^*(t), u^*(t)) + \psi^*(t) = 0 \tag{38}$$

per ogni $t \in [0, T]$. Integrando la (36′) si ha d'altra parte

$$\psi^*(t) = c - \omega^* \int_0^t \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau \tag{39}$$

ovvero

$$-\omega^* \frac{\partial f_0}{\partial u}(x^*(t), u^*(t)) = c - \omega^* \int_0^t \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau \tag{40}$$

da cui, derivando rispetto a $t$,

$$\omega^* \left[ \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), u^*(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial u}(x^*(t), u^*(t)) \right] = 0 \ . \tag{41}$$

Osserviamo ora che nel nostro caso si ha certamente $\omega^* < 0$. Se $\omega^*$ fosse nulla infatti, per la (38) sarebbe identicamente nulla anche la funzione $\psi^*(t)$ e ciò contraddice quanto esplicitamente affermato nel Teorema 2. Tenuto conto della (34), la (41) implica allora

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial u}(x^*(t), \dot{x}^*(t)) \tag{42}$$

che rappresenta per l'appunto l'equazione di Eulero del nostro problema variazionale.

È interessante osservare che, sotto l'ulteriore condizione che $u^* \in C^1$, per il particolare problema (33), (34) con $U = \mathbf{R}$, la verifica dell'affermazione del Teorema 2 secondo la quale $\mathcal{H}(\omega^*, \psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) =$ costante è immediata (si ricordi che siamo nel caso a estremi fissi). Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\omega^*, &\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \dot{\omega}^* + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \dot{\psi}^* + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \dot{x}^* + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \dot{u}^* = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \dot{\psi}^* + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \dot{x}^* + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \dot{u}^* = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \dot{u}^* = 0 \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto prima del fatto che $\omega^*$ è costante, poi di (27) e (29), e infine di (37).

A questo punto si sarebbe tentati di identificare $\mathcal{H}$ con la funzione Hamiltoniana del problema variazionale in oggetto. Questo però non è del tutto corretto, in quanto nella "vera" funzione Hamiltoniana non deve comparire esplicitamente la $\dot{x}$ che qui, per effetto della (34), coincide con $u$. La "vera" Hamiltoniana per il problema (32) si definisce sotto l'ipotesi che la funzione

$$q = \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) = \frac{\partial f_0}{\partial u}(x, u) \tag{43}$$

ammetta un'inversa $u = \Psi(x, q)$ (le notazioni sono in parte coerenti col problema in oggetto, in parte sono quelle della prima lezione) ed è data da

$$H(x, q) = q\Psi(x, q) - f_0(x, \Psi(x, q)) \ . \tag{44}$$

Per vedere sotto quali condizioni la (43) è invertibile, torniamo alla (35). Poniamo, per fissare le idee, $\omega = -1$: ciò è lecito in base all'Osservazione 4 e in quanto, come abbiamo già fatto notare, nel nostro caso $\omega^* \neq 0$. Sia

$$\begin{aligned} m = m(x,\psi) &= \sup_u \mathcal{H}(-1,\psi,x,u) \\ &= \sup_u \{\psi u - f_0(x,u)\} \ . \end{aligned}$$

Supponiamo quindi che l'equazione

$$m = \mathcal{H}(-1,\psi,x,u) \tag{45}$$

ammetta, per ogni $x$ e $\psi$, un'unica soluzione $\hat{u}(x,\psi)$. Chiaramente $\hat{u}(x,\psi)$ rappresenta un massimo per la funzione $u \mapsto \mathcal{H}(-1,\psi,x,u)$ e quindi si deve avere

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(-1,\psi,x,\hat{u}(x,\psi)) = \psi - \frac{\partial f_0}{\partial u}(x,\hat{u}(x,\psi)) = 0 \ .$$

Identificando $q$ e $\psi$, da quest'ultima si deduce che la (43) è invertibile, e che la sua inversa $u = \Psi(x,q)$ è data proprio dalla $u = \hat{u}(x,q)$. Per confronto diretto tra la (35) e la (44) si ottiene infine

$$H(x,\psi) = \mathcal{H}(-1,\psi,x,\hat{u}(x,\psi)) \ . \tag{46}$$

La maggior generalità del Principio di massimo rispetto all'approccio variazionale classico è in parte anche legata alla possibilità di operare con una funzione $\mathcal{H}$ che conserva molte delle proprietà della "vera" Hamiltoniana, ma che si può definire senza bisogno di ipotesi restrittive quali l'invertibilità della (43) o l'esistenza della $\hat{u}(x,\psi)$.

Un'ultima osservazione, per concludere. Con i simboli appena introdotti, il Principio di massimo (*ii*) per il problema (33), (34) si può riformulare scrivendo

$$m(x^*(t),\psi^*(t)) = \mathcal{H}(-1,\psi^*(t),x^*(t),u^*(t))$$

per ogni $t \in [0,T]$. Se la (45) ammette un'unica soluzione $\hat{u}$, si ha allora $u^*(t) = \hat{u}(x^*(t),\psi^*(t))$ e quindi, per la (46)

$$H(x^*(t),\psi^*(t)) = \mathcal{H}(-1,\psi^*(t),x^*(t),u^*(t)).$$

La "vera" Hamiltoniana $H$, quando esiste, e la "pseudo"-Hamiltoniana $\mathcal{H}$ vengono quindi a coincidere lungo le soluzioni ottime.

# Esercizi

Esercizio 1

Sia dato il processo di controllo scalare

$$\dot{x} = x + u \ .$$

Determinare il controllo $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ che permette di trasferire lo stato del sistema da $x_0 = 0$ a $x_1 = 1$ in tempo $\bar{T} = 1$ rendendo minimo l'integrale

$$J(u) = \int_0^1 u^2(t)\, dt$$

Esercizio 2

Data la stessa equazione e gli stessi dati iniziali e finali dell'Esercizio 1, trovare il controllo che minimizza l'integrale

$$J(x,u) = \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]\, dt \ .$$

Esercizio 3

Ripetere l'Esercizio 2, supponendo questa volta che $x_0 = 1$. Che cosa succede se si lascia indeterminato lo stato finale?

Esercizio 4

Verificare che se esiste una soluzione $K(t)$ dell'equazione (del tipo di Riccati)

$$\dot{K} = 2 - 2K - \frac{K^2}{2}$$

allora la funzione $u(t) = \dfrac{K(t)}{2} x(t)$ rappresenta il controllo ottimo (in forma di feedback) per il problema di trasferire uno stato $x_0$ in uno stato $x_1$ in tempo $\bar{T}$ lungo le soluzioni del processo

$$\dot{x} = x + u$$

minimizzando il funzionale

$$\int_0^{\bar{T}} [x^2(t) + u^2(t)] \ , dt$$

[suggerimento: verificare che il moltiplicatore di Lagrange si può esprimere come $\lambda(t) = K(t)x(t)$].