Principio del massimo di Pontryagin

ESEMPIO: massima estensione di una molla forzata

$$\ddot{x} = -x + u$$

$u \in [-1,1]$ $\quad I = [0,T]$ $\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

Sistema dinamico

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + u \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \qquad f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

Vogliamo trovare $\boxed{\max x_1(T)}$ -

Abbiamo: $\psi\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \qquad \nabla\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Consideriamo il problema aggiunto

$$\begin{cases} p' = -p\, D_x f = -p\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ p(T) = \nabla\psi(x_1^*(T)) \end{cases}$$

dove (x^*, u^*) é la soluzione del problema di massimo

$p = (p_1, p_2) \qquad \begin{cases} p_1' = p_2 \\ p_2' = -p_1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} p_1(T) = 1 \\ p_2(T) = 0 \end{matrix}$

$$(p_1(T), p_2(T)) = \nabla^T\psi(x(T)) = (1,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_1(t) = \cos(T-t) \\ p_2(t) = \sin(T-t) \end{cases}$$

Applichiamo il Principio del massimo di Pontryagin

(x^*, u^*) realizza il massimo $\Longrightarrow$

$$p_1 x_2^* + p_2(-x_1^* + u^*) = \max_{\omega \in [-1,1]} \left(p_1 x_2^* + p_2(-x_1^* + \omega) \right)$$

$$\langle p^T, f(x^*, u^*) \rangle = \max_{\omega \in [-1,1]} \langle p^T, f(x^*, \omega) \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad p_1 x_2^* + p_2(-x_1^* + u^*) = p_1 x_2^* - p_2 x_1^* + \max_{\omega \in [-1,1]} p_2 \omega$$

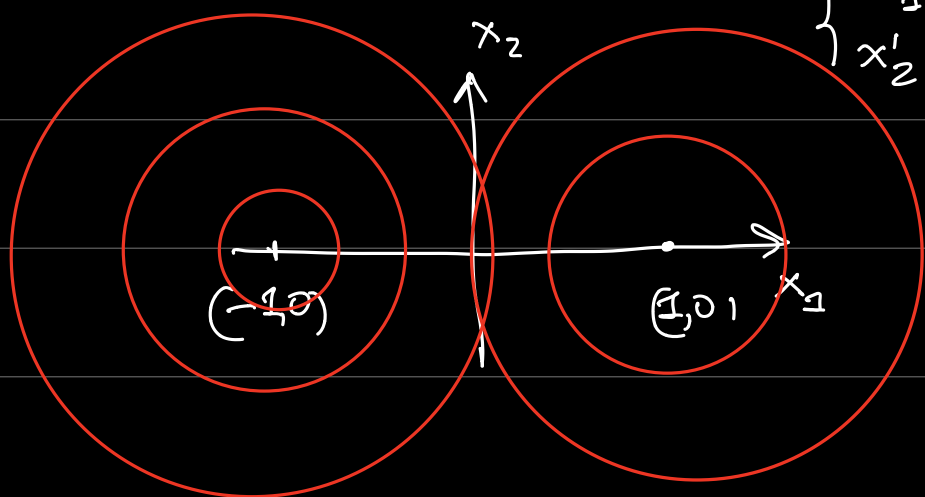
$$\max_{\omega \in [-1,1]} p_2 \omega = \begin{cases} p_2 & \text{se } p_2 \geq 0 \\ -p_2 & \text{se } p_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u^*(t) = \operatorname{sign}(p_2(t)) = \operatorname{sign}(\sin(T-t))}$$

Da qui possiamo calcolarci $x^*(t)$...

$\sin(T-t) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad u^* = 1 \qquad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + 1 \end{cases}$

$\sin(T-t) \leq 0 \quad \longrightarrow \quad u^* = -1 \qquad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_2 - 1 \end{cases}$



Conservazione dell'energia $\quad \frac{1}{2}(x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 = \text{cost}$

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 = \text{cost}$$

Supponiamo che $0 < T \leq \pi \Rightarrow \sin(T-t) > 0$

$u \equiv 1 \qquad x_1 = 1 - \cos t$

$\pi < T \leq 2\pi \qquad \sin(T-t)$ $\to < 0$ inizialmente $(0, T-\pi)$; $\to \geq 0$ fino a T $(T-\pi, T)$

Problemi con vincoli su $x(T)$.

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

f é continua e differenziabile in x con derivata limitata

$\max \Phi^0(x(T))$ soggetta ai vincoli $\boxed{\Phi_i(x(T)) = 0}$ $i = 1, \dots, k$

Ipotesi: $\nabla\Phi^0$ $\nabla\Phi_i$ siano linearmente indipendenti in $x^*(T)$, dove (x^*, u^*) é una soluzione del problema

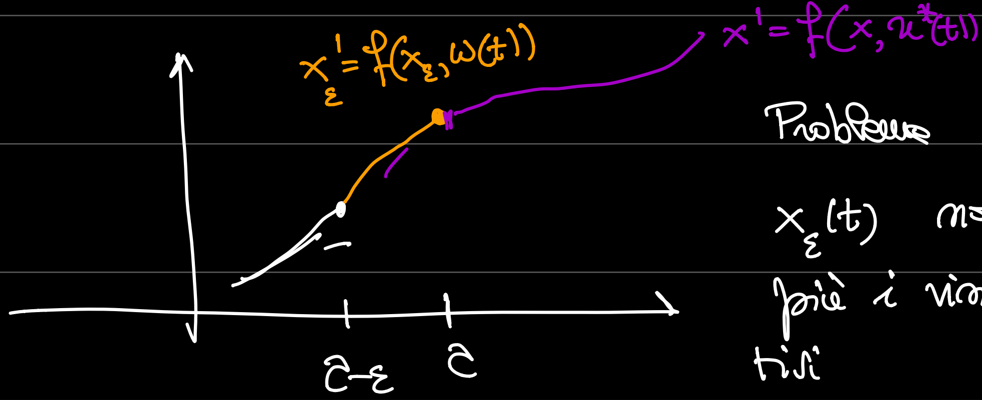
Tesi: esiste una soluzione p del problema aggiunto

$\exists\, \lambda_0 \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} p' = -p\, D_x f(x^*(t), u^*(t)) \\ p(T) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \nabla\Phi_i(x(T)) \end{cases}$$

e tale che

$$\boxed{\langle p^T, f(x^*, u^*)\rangle = \max_{u \in \mathcal{U}} \langle p^T, f(x^*, \omega)\rangle \quad \text{per q.o.t.}}$$



Problema

$x_\varepsilon(t)$ non verifica più i vincoli aggiuntivi

$\Phi_i(x_\varepsilon(T)) = 0$

Problemi di tempo minimo

Q: Come ricondurli ad una forma per cui sia applicabile il principio del massimo di Pontryagin

Problema:

$$(a) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)); & u \in \mathcal{U} \quad [0,T] \\ x(0) = x_0 \\ x_i(T) = c_i & i = 1, .., k \end{cases}$$

T è un'incognita e vogliamo minimizzare T al variare di $u \in \mathcal{U}$.

Supponiamo che (x^*, u^*) T^* sia la soluzione del problema di tempo minimo - $x^* : [0, T^*] \to \mathbb{R}^n$, $u^* =$

Consideriamo il problema in dimensione $(n+1)$

(b) $\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} y^0(\tau) = u^0(\tau) & [0, T^*] \\ \dfrac{d}{d\tau} y(\tau) = u^0(\tau)\, f(y(\tau), u(\tau)) \end{cases}$

$(y^0, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad (u^0, u) = [\frac{1}{2}, 2] \times \mathcal{U}$

$$\begin{cases} y^0(0) = 0 \\ y(0) = x_0 \\ y_i(T^*) = c_i \end{cases}$$

$$\max \; -y^0(T)$$

Osservazione: che $(y^0 = \tau,\ y = y^*)$, $(1, u^*)$ é massimale per il problema (b). Infatti, supponiamo che $\exists$ (y^0, y) e (v^0, v) soddisfacenti le condizioni al bordo e tali che

$$-y^0(T^*) > -T^*$$

Allora definiamo $t = t(\tau) = \int_0^\tau v^0(s)\,ds$

$\frac{1}{2} \le v^0 \le 2 \Rightarrow t(\tau)$ é invertibile e $\tau(t)$

$$x(t) = y(\tau(t))$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = v^0(\cancel{\tau(t)})\, f(y(\tau(t)), v(\tau(t)))\frac{1}{v^0(\cancel{\tau(t)})}$$

$$= f(x(t), \underbrace{v(\tau(t))}_{u(t)})$$

(x, u) $\qquad T = \int_0^{T^*} v^0(s)\,ds < T^*$

$x(t)$ verifica le condizioni al bordo.

Abbiamo trovato una terna ammissibile (x, u) $[0, T]$ con $T < T^*$. Assurdo.

Possiamo applicare il principio del massimo di Pontryagin al problema (b).

Il massimo è $(\tau, x^*(\tau))$, $(1, u^*(\tau))$.

Equazione trasposta (p_0, p)

$$(p_0, p)' = -(p_0, p)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_x f \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_0' = 0 \\ p' = -p\, D_x f \end{cases} \quad + \quad \text{condizioni al contorno che coinvolgono i moltiplicatori } \lambda_0, \lambda_i$$

La condizione di massimalità ci dice che

$$\max\left(p_0 + \langle p^T, f(x^*, \cdot)\rangle\right) \geq 1 \cdot p_0 + \langle p^T, f(x^*, u^*)\rangle =$$

$w \in \mathcal{U}$

$$\max_{\substack{w^0 \in [\frac{1}{2}, 2] \\ w \in \mathcal{U}}} \left(w^0 p_0 + \langle p^T, w^0 f(x^*, w) \rangle \right)$$

$$\max_{\substack{w^0 \in [\frac{1}{2}, 2] \\ w \in \mathcal{U}}} w^0 \left(p_0 + \langle p^T, f(x^*, w) \rangle \right)$$

$$= \begin{cases} 2 \max\limits_{w \in \mathcal{U}} \left(p_0 + \langle p^T, f(x^*, w) \rangle \right) & \text{se } \max \geq 0 \\ \frac{1}{2} \max\limits_{w \in \mathcal{U}} \left(p_0 + \langle p^T, f(x^*, w) \rangle \right) & \text{se } \max \leq 0 \end{cases}$$

Contraddizione, a meno che non siano nulli

$$\max_{w \in \mathcal{U}} \left(p_0 + \langle p^T, f(x^*, w) \rangle \right) = 0 = \langle p_0 + \langle p^T, f(x^*, u^*) \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{w \in \mathcal{U}} \langle p^T, f(x^*, w) \rangle = \langle p^T, f(x^*, u^*) \rangle}$$

in più abbiamo che

$$\boxed{\langle p(t)^T, f(x^*(t), u^*(t)) \rangle = p_0 = \text{cost}}$$