1. Un esempio classico

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = u \end{cases} \qquad f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u \in [-1,1]$. Vogliamo raggiungere $(0,0)$ da un (x_1°, x_2°) assegnato nel tempo minimo. La soluzione del problema aggiunto $(p_1, p_2) = p$

$$(p_1, p_2)' = -(p_1, p_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fornisce

$$p_1' = 0 \qquad p_2' = -p_1$$

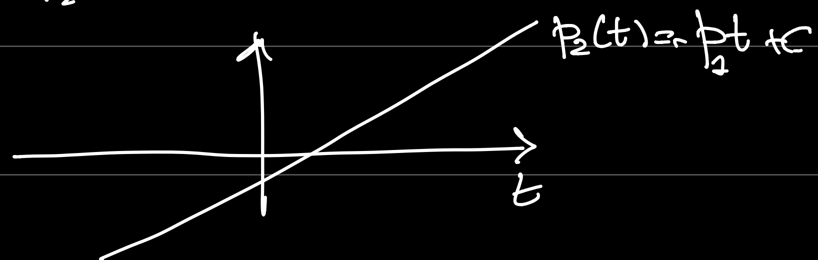
Quindi $p_1 \equiv \text{cost}$, $p_2 = -p_1 t + c$

Condizione di massimizzazione del principio di Pontryagin

(x_1^*, x_2^*), u^*, T^* sol. ottimale

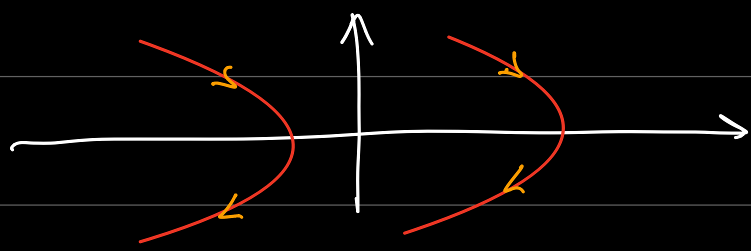
$$\underset{\langle p^T, f(x^*, u^*)\rangle}{p_1 x_2^* + p_2 u^*} = \max_{w \in [-1,1]} p_1 x_2^* + p_2 w$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } p_2 > 0 \Rightarrow w = 1 \\ \text{se } p_2 < 0 \Rightarrow w = -1 \end{array}\right| \Longrightarrow u^* \in \{-1, 1\}$$

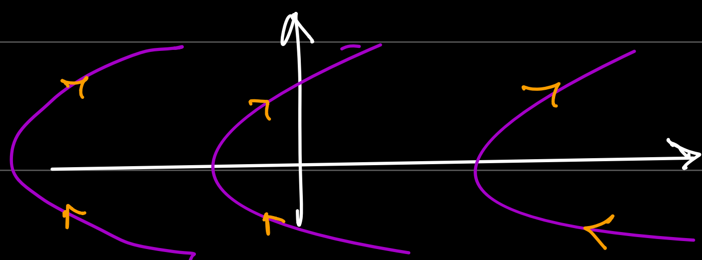


u^* cambia segno [passa da -1 a $+1$] una volta solo.

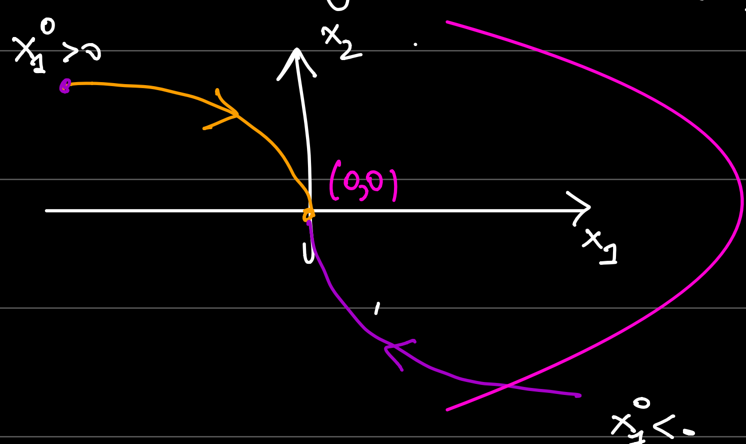
Se $u \equiv 1$, le soluzioni hanno $\frac{1}{2}x_2^2 - x_1 = cost$



$u \equiv -1$, le soluzioni hanno $\frac{1}{2}x_2^2 + x_1 = cost$

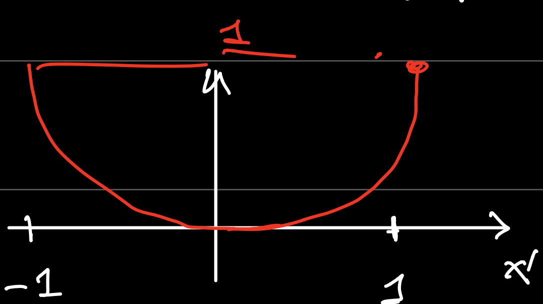


Se p_2 non cambia segno in $[0,T^*]$, allora



2. Sistema con Lagrangiana relativistico

$$L(x,x') = 1 - \sqrt{1-(x')^2}$$



La Lagrangiana non è derivabile per $|x'| = \pm 1$. Le equazioni di Eulero-Lagrange non si possono applicare (oltre che c'è il vincolo $|x'| \leq 1$).

Vediamo che informazioni ci dà il Principio del Massimo - Come si passa dalla Lagrangiana al sistema di controllo

$x' \to u$

$$x_0(t) = -\int_0^t L(x,u)$$

Sistema dinamico diretto

$$\begin{cases} x_0'(t) = -L(x(t),u) \\ x'(t) = u \end{cases}$$

con le condizioni al contorno ...

$$\begin{cases} x_0' = -\left(1-\sqrt{1-u^2}\right) \\ x' = u \end{cases} \qquad u \in [-1,1]$$

Cosa ci dice il PMP? $\quad (p_0,p_1)' = -(p_0,p_1)\, D_x f$

ma $D_x f \equiv 0 \qquad p_0' = 0 = p_1'$

Sia p_0 che p_1 sono costanti ci sono condizioni su

$p_0(T), p_1(T) \Rightarrow$ condizione di segno $\Rightarrow p_0(T) \geq 0$

2 possibilità $\begin{cases} \to p_0 \equiv 0 \\ \to p_0 > 0 \end{cases}$

Condizione di massimalità del PMP

$$p_0\left(1-\sqrt{1-u^{*2}}\right) + p_1 u^* = \max_{w\in[-1,1]} \left(p_0\left(1-\sqrt{1-w^2}\right) + p_1 w\right)$$

$p_0 \equiv 0 \Rightarrow p_1 u^*$ verifica il $\max\limits_{\omega \in [-1,1]} p_1 \omega$

$p_0 \not\equiv 0 \Rightarrow$ si trova una soluzione che comunque dà un valore $\omega \equiv$ cost $\to 1$, $(0,1)$, $\to -1$

Presa una soluzione o $|x'| = 1$, oppure $|x'| < 1$.

ESISTENZA DELLE SOLUZIONI DEI PROBLEMI DI CONTROLLO OTTIMO

Esempio di Weierstrass

$$\min \left\{ \int_0^1 ((x')^2 - 1)^2 + x^2 \ : \ x(0) = 0 = x(1) \right\}$$

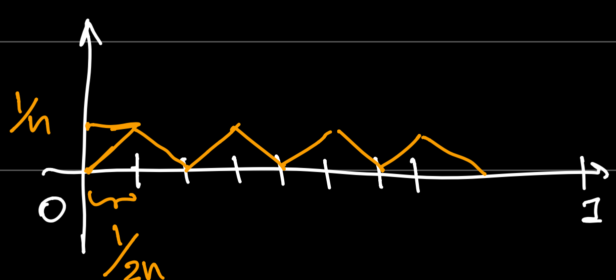
$$J(x) = \int_0^1 ((x')^2 - 1)^2 + x^2$$

$$\left\{ x : [0,1] \, ; \, \int_0^1 (x')^4 < +\infty \right\}$$

$$\min \left\{ J(x) \ : \ \int_0^1 (x')^4 < 100 \right\} \quad \text{esiste?}$$

Il minimo $\boxed{\text{NON}}$ è raggiunto

$|x'| \approx 1 \qquad x \approx 0 \qquad x(0) = x(1) = 0$



$x_n'(t) = \pm 1$ per q.o. t

$|x_n(t)| \leq \frac{1}{n} \quad \forall t$

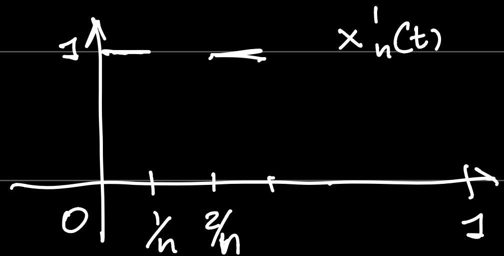
$x_n(0) = x_n(1) = 0$

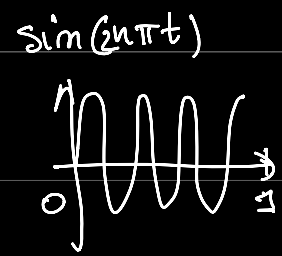
$$J(x_n) = \int_0^1 \underbrace{(|x'|^2-1)^2}_{=0} + \underbrace{x^2}_{\leq \frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{n^2} \to 0$$

Stiamo dicendo che $\inf_{x \in X} J(x) = 0$ ma non può

essere raggiunto se $J(x) = 0 = \int_0^1 (|x'|^2-1)^2 + x^2 = 0$, con $(|x'|^2-1)^2 \geq 0$ e $x^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ $x \equiv 0$, $|x'| = 1$ assurdo





— —

ALCUNI FATTI SUGLI SPAZI DI FUNZIONI

Definizione: gli spazi $L^p([0,T])$ sono gli spazi di funzioni integrabili secondo Lebesgue, dotati della norma

$$\|x\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$$

Se $p=1$, $p=2$, sono spazi ben noti. Consideriamo anche

$$\|x\|_{L^\infty} =: \{ x \text{ misurabili} : \exists M : \|x(t)\| \leq M \text{ per q. } t \in [0,T] \}$$

lo spazio delle funzioni limitate quasi ovunque

Definizione: diciamo che $(x_n)_n \subseteq L^p$ converge (fortemente) a $\bar{x} \in L^p$

se $\|x_n - \bar{x}\|_{L^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad \left(\int_0^T \|x_n(t)-x(t)\|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Definizione: diciamo che $(x_n)_n \subseteq L^1(0,T)$ converge **debolmente** al limite $\bar{x}$ se $\forall h \in L^\infty([0,T])$

$$\int_0^T \langle x_n(s), h(s)\rangle ds \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^T \langle \bar{x}(s), h(s)\rangle ds$$

Teorema (di Vitali Hahn-Saks): $(x_n)_n$ limitato in $L^\infty([0,T])$ $\Rightarrow$ $\exists$ sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge debolmente ad un limite $\bar{x}$.

Osservazione: La convergenza forte $\Rightarrow$ convergenza debole ma non vale in generale il viceversa.

$$\left|\int_0^1 \langle x_n - \bar{x}, h\rangle\right| \leq \int_0^1 \|x_n(s) - \bar{x}(s)\| \, \|h(s)\| ds$$

$$\leq \underbrace{\|h\|_{L^\infty}}_{\leq M} \|x_n - \bar{x}\|_{L^1} \to 0 \qquad \to 0$$

Osservazione

In quanto segue useremo la convergenza debole a successioni di derivate $(x_n')_n$ che convergono in senso debole a una funzione z, con $x(0)=x_0$.

Allora posto: $\bar{x}(t) = x_0 + \int_0^t z(s)ds \Rightarrow$

$x_n(t) \to \bar{x}(t)$ per tutti i t, e $\bar{x}'(t) = z(t)$ per q.o. t

Infatti: $x_n(t) = x_0 + \int_0^t x'_n(s)\,ds = x_0 + \int_0^T x'_n(s)\,\underbrace{\chi_{(0,t)}(s)}_{L^\infty}\,ds$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} x_0 + \int_0^T z(s)\,\chi_{(0,t)}(s)\,ds = x_0 + \int_0^t z(s) = \bar{x}(t)$$

LEMMA DI MAZUR

Data una successione debolmente convergente in $L^1([0,T])$

con limite $\bar{x} \in L^1$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists N(n), \ \exists \lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{N(n),n} \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{N(n)} \lambda_k = 1,$

tali che detto

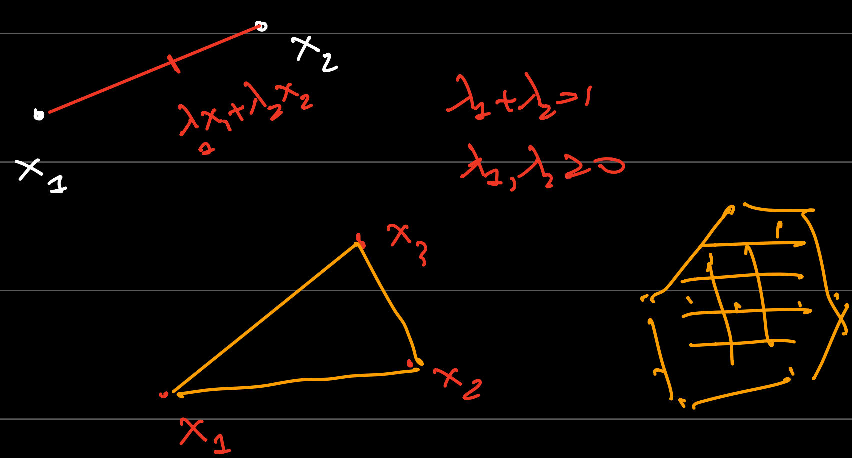
$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{N(n)} \lambda_{k,n}\, x_{k+n}(t)$$

si ha $\|y_n - \bar{x}\|_{L^1} \to 0$ per $n \to +\infty$.

CONVESSITÀ

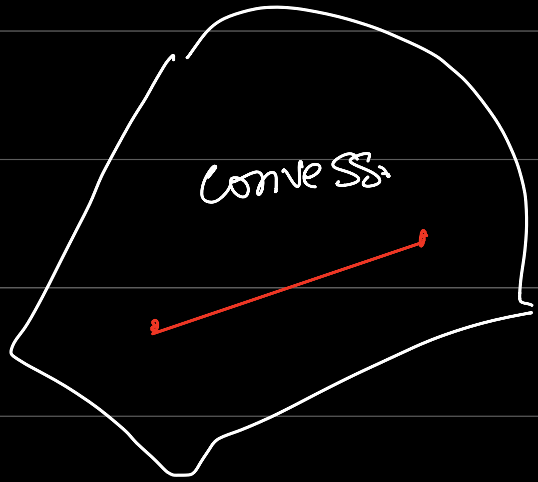
Dati $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$, una combinazione convessa

è una combinazione lineare $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N$, $\lambda_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$

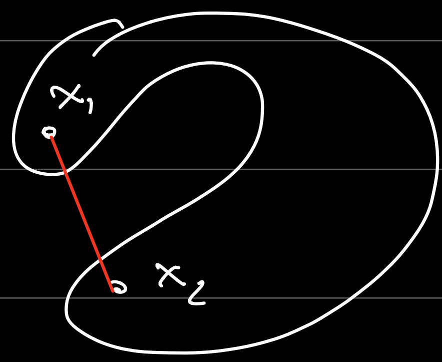


Def: Un insieme si dice <u>convesso</u> se, contenendo due punti $x_1, x_2 \Rightarrow$ contiene tutto il segmento $[x_1, x_2] =$

$$= \{ t x_1 + (1-t) x_2, \ t \in [0,1] \}$$



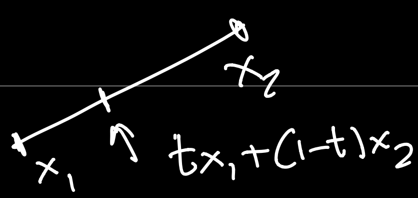
non convesso

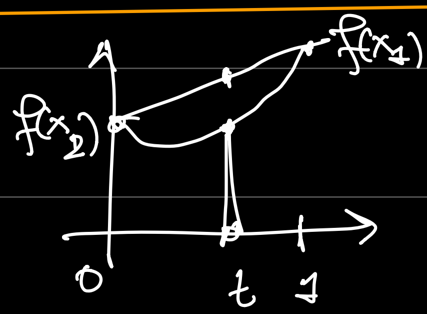


D convesso

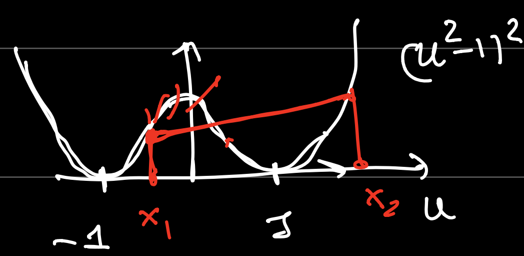
<u>Funzioni convesse</u>: $f: D \to \mathbb{R}$ si dice convesso se, $\forall x_1, x_2 \in D$

$$\boxed{f(t x_1 + (1-t) x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)}$$





Esempio $\int_0^1 (x'^2-1)^2 + x^2$



non é convesso