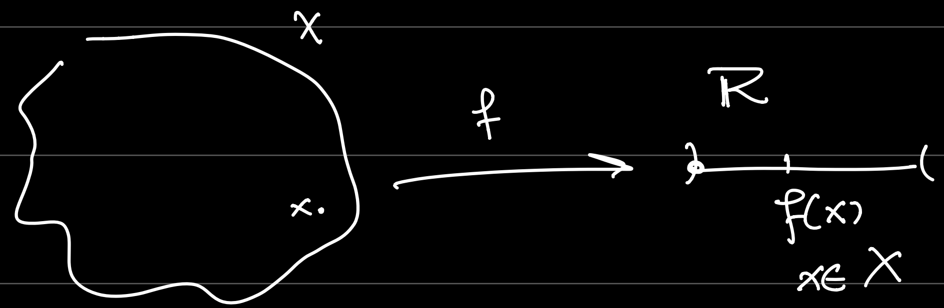
Esistenza delle soluzioni dei problemi di controllo ottimo



Problema: trovare $\min\{f(x) : x \in X\}$ potrebbe non avere soluzione

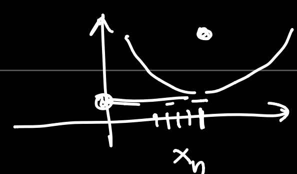
Quello che esiste sempre è una successione di elementi $(x_n)_n \subseteq X$ tale che $f(x_n) \to \inf_{x \in X} f(x)$

$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x_\varepsilon \in X : \quad f(x_\varepsilon) < \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon\right).$

Pb: (a) x_n ha un limite $\bar{x}$ in un senso opportuno?

(b) $\bar{x} \in X$?

(c) $f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x)$



Problema di controllo ottimo:

$$\begin{cases} x' = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

+ vincoli

$\psi(x(T)) = \max$

Avremo una successione massimizzante (x_n, u_n):

$\psi(x_n(T)) \nearrow \sup_{\psi(SD)} \psi(x(T))$

Domande:

(a) $u_n \xrightarrow{?} u^*$ in un senso opportuno?

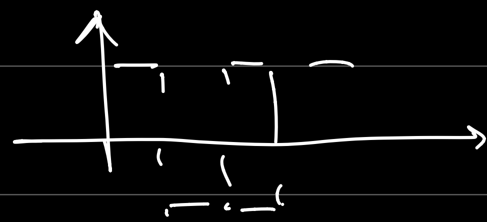
$$x_n' = f(x_n(t), u_n(t)) \xrightarrow{?} \text{dell'equazione}$$

(b) $(x_n, u_n) \to (x_n^*, u_n^*)$

risolve ancora l'equazione?

(c) $\psi(x_n^*(T)) \xrightarrow{?} \sup$

Problema: u_n potrebbero avere un carattere fortemente oscillatorio.

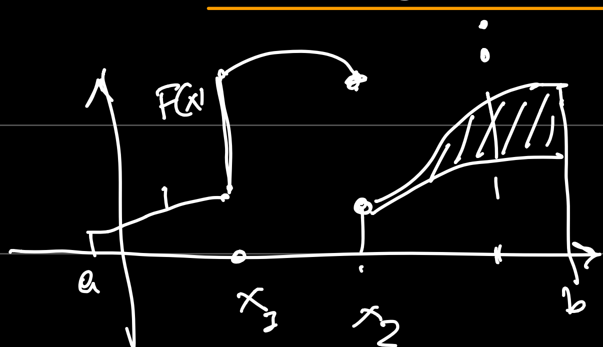


<u>Equazioni differenziali multivoche o inclusioni differenziali</u>

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \qquad f : (t,x) \longmapsto f(t,x)$$

<u>inclusione differenziale</u>: $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow F(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{$ sono i <u>sottoinsiemi di</u> $\mathbb{R}^n \}$

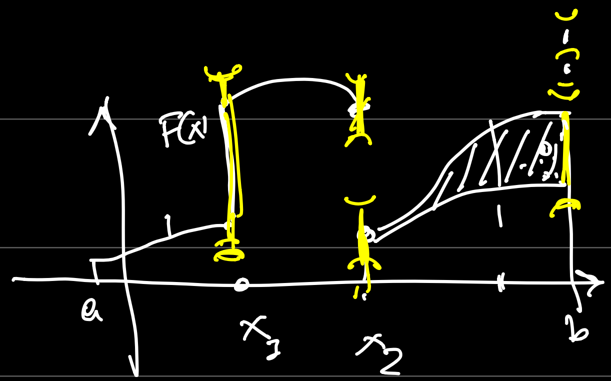


<u>Equazione differenziale multivoca</u>.

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) & t\in[0,T] \\ x(0)=x_0 \end{cases}}$$

Definizione: Diciamo che la funzione multivoca $F: D\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è semicontinua superiormente in x_0 se

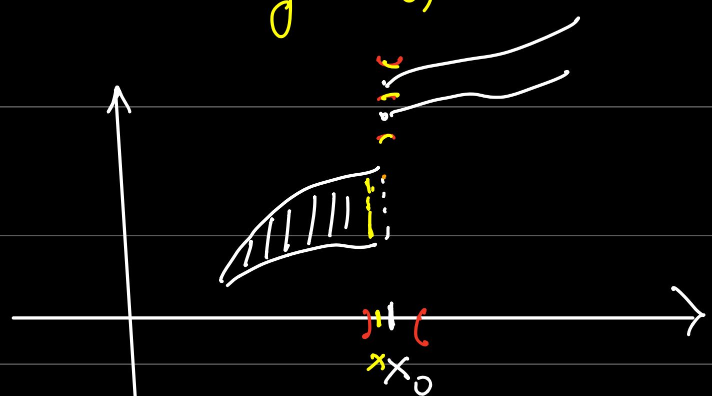
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \ : \ |x-x_0|<\delta \implies F(x)\subset B_\varepsilon(F(x_0))$$



$F(x_2)=\{c_1,c_2\}$

$B_\varepsilon(x_2)= B_\varepsilon(c_1)\cup B_\varepsilon(c_2)$

$$B_\varepsilon(F(x_0)) = \bigcup_{y\in F(x_0)} B_\varepsilon(y)$$



Non è semicontinua superiormente in x_0

Proposizione: Il grafico di una funzione semicontinua superiormente è un chiuso cioè se ho una successione

$$(x_n,y_n) : \ y_n\in F(x_n) \ \forall n, \ e \ x_n\to\bar{x}, \ y_n\to\bar{y}$$

$$\implies \bar{y}\in F(\bar{x})$$

Dimostrazione (per esercizio).

Passaggio da pb. di controllo all'equazione multivoca:

$$F(x) =: \{ f(x,\omega) : \omega \in \mathcal{U} \}$$

attenzione: $(f, \mathcal{U}) \longrightarrow F$ é un passaggio facile

Il passaggio inverso é più scabroso: allo stesso F multivoca potrebbero corrispondere più sistemi dinamici controllati $(f, \mathcal{U})$.

Problema: Quando possiamo essere certi che

$$x \longmapsto F(x) = \bigcup_{\omega \in \mathcal{U}} f(x,\omega)$$

é semicontinua superiormente?

Se f é una funzione continua e $\mathcal{U}$ é chiuso $\Rightarrow$ O.k.

TEOREMA (di Filippov): Sia F una funzione semicontinua superiormente, e tale che $\forall x$, $F(x)$ sia un convesso, chiuso, limitato

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con condizione fine
$x(T) = x_1$

allora il problema di tempo minimo ha almeno una soluzione.

[La stessa tesi è vera per un problema con vincoli lineari $x_i(T) = c_i$, e $\psi(x(T))$, con ψ continua].

Dimostrazione (cenni).

Consideriamo una successione minimizzante (x_n, u_n), T_n. con $T_n \downarrow T^*$.

Come prima osservazione dall'inclusione differenziale

$$x_n' \in F(x_n) \qquad t \in [0, T_n]$$

dalla limitatezza di F deduco che $\|x_n'\|_\infty \leq K$

($\Rightarrow \|x_n'(t)\| \leq K$ per q.o. $t \in [0, T^*]$).

Possiamo applicare il teorema di Vitali-Hahn-Saks alla successione $(x_n')_n \in L^1$ (in L^1), esiste quindi una sottosuccessione $(x_{n_k}')_k$ che converge debolmente ad un

$\int_0^{T^*} x_n'(s) h(s) ds \to \int^{T^*} z(s) h(s) ds$

limite $z \in L^1$ - $\forall t \in [0,T]$ ho $x_n(t) = x_0 + \int_0^t x'_n(s)ds \longrightarrow x^*(t) = x_0 + \int_0^t z(s)ds$

In definitiva ho trovato un limite $x^*(t)$ puntuale della successione $(x_{n_k})_k$, $(x'_{n_k})_k$ converge debolmente a $z = (x^*)' \in L^1$.

[Attenzione: ho già usato la semicontinuità superiore per asserire che la limitazione sugli insiemi $F(x)$ è uniforme].

Ora devo dimostrare che il limite risolve l'inclusione differenziale

$$(x^*)'(t) = z(t) \in F(x^*(t)) \quad \text{per q.ogni } t \in [0,T^*]$$

Qui interviene la convessità di F

La convergenza debole NON implica in nessun modo la convergenza puntuale.

$$x'_n(t) \in F(x_n(t)) \quad \text{per q.o } t$$

No so che le $x'_n(t)$ convergono puntualmente a $z(t)$

Ora invoco il Lemma di Mazur: posso formare una successione di combinazioni convesse di

$N(n)$ $N(n)$

$$y_n'(t) = \sum_{k=1} \lambda_{k,n} x_{n+k}'(t) \quad \text{con } \lambda_{k,n} \geq 0 \quad \sum_{k=1} \lambda_{k,n} = 1$$

tale che $y_n'(t)$ converge fortemente $z(t) = x^{*\prime}$ in L^1.

Estraendo eventualmente un'altra sottosuccessione

ho la convergenza puntuale quasi ovunque di $y_n'(t)$ a

$z(t) = x^{*\prime}(t)$.

Vado a prendere un punto t t.c. $y_n'(t) \to x^{*\prime}(t)$, già sappiamo

che $y_n(t)$ e $x_n(t)$ convergono a $x^*(t)$. Uso la semi continuità superiore. Fisso $\varepsilon > 0$, e trovo un $\delta > 0$ corrispondente.

Quando $x_n(t) \to x^*(t)$, per n grande $F(x_n(t)) \subseteq B_\varepsilon(F(x^*(t)))$

per la semicontinuità superiore. Ma anche $B_\varepsilon(F(x^*(t)))$

é un convesso

$$\Rightarrow \text{se } x_n'(t) \in F(x_n(t)) \in B_\varepsilon(F(x^*(t))$$

anche le combinazioni convesse

$$y_n'(t) = \sum \lambda_{nk} x_{n+k}'(t) \in B_\varepsilon(F(x^*(t)))$$

$$\downarrow$$

$$(x^*)'(t) \in B_{2\varepsilon}(F(x^*(t)))$$

$\Rightarrow$ passando al limite per $\varepsilon \to 0$, sapendo che

$F(x^*(t))$ é chiuso, ottengo

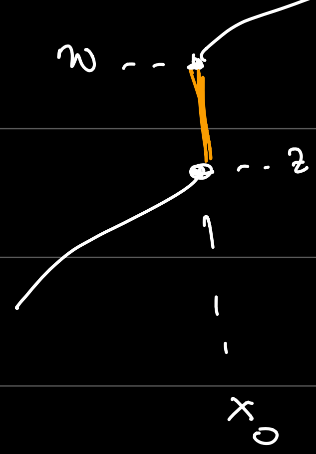
$(x^*)'(t) \in F(x^*(t))$ per q.o. $t \in [0, T^+]$.

Se consideriamo un problema con un pay-off $\psi(x(T))$ e vincoli lineari $x_i(T) = c_i$. Basta osservare che i vincoli lineari sono conservati nella convergenza debole e la funzione ψ continua, essendo $x_n(T) = x_0 + \int_0^T x_n'(s)ds$ convergenti a $x^*(T)$. ☐

Osservazione: $F(x) = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} f(x,u)$ come faccio ad assicurare che F sia (a) semicontinua superiormente, (b) a valori compatti (chiusi e limitati) e (c) convessi?

se f è continua in x, u e $\mathcal{U}$ è chiuso e limitato O.K per (a) e (b). Per quanto riguarda (c) la convessità, osserviamo che se f dipende linearmente da u allora F è convessa se anche $\mathcal{U}$ è convesso.

Supponiamo che per un x $F(x)$ non sia convessa. Posso rimpiazzarla con $co(F(x)) = \{ z : z = t z + (1-t) w$, con $z, w \in F(x) \}$



$F(x_0) = \{z, w\}$