Problema di tempo minimo per l'inclusione differenziale

$$\begin{cases} x' \in F(x(t)) \\ x(0)=x_0 \\ x(T)=x_1 \end{cases}$$

Abbiamo (x^*, T^*). Problema: come risaliamo a u^*?

$$F(x) = \{ f(x,u) : u \in \mathcal{U} \} = U$$

$t \mapsto (x^*)'(t) \in F(x) \iff$

$\forall t \in [0,T] \qquad \{ u : (x^*)'(t) = f(x^*(t), u) \} \neq \emptyset$

Nuova funzione multivoca

$$t \longmapsto U^*(t) = \{ u \in \mathcal{U} : (x^*)'(t) = f(x^*(t), u) \}$$

Vogliamo essere certi che esista un funzione

$$t \longmapsto u^*(t) : u^*(t) \in U^*(t) \text{ che sia misurabile}$$

(in particolare $u^* \in L^\infty([0,T])$).

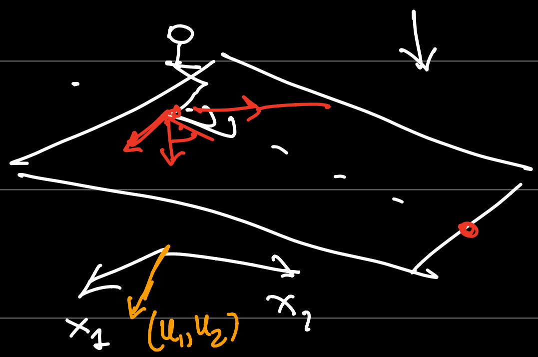
TEOREMA (Filippov): tale selezione misurabile esiste sempre.

OSSERVAZIONE: Una selezione della funzione multivoca $t \mapsto U^*(t)$ (è un insieme) è semplicemente una funzione $t \mapsto u^*(t) \in U^*(t) \quad \forall t$.

In questo modo ricostruiamo u^* il controllo ottimo

La convessità di $F(x)$ gioca un ruolo chiave nell'esistenza del tempo ottimo (o in generale del (x^*, u^*)).

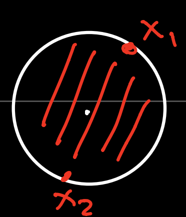
<u>Problema di tempo minimo dello sciatore</u> (Brachistocrona)



traiettoria ottimale per la discesa in tempo minimo

$$\begin{cases} x_1' = u_1 x_3 \\ x_2' = u_2 x_3 \\ x_3' = -g u_2 \end{cases} \qquad u_1^2 + u_2^2 = 1 \qquad (u_1, u_2) \in S^1$$

$|x_3|$ modulo della velocità

$\mathcal{U} =$  $=$ non è convesso. Il suo convessificato è il disco unitario

$$co(\mathcal{U}) = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$$

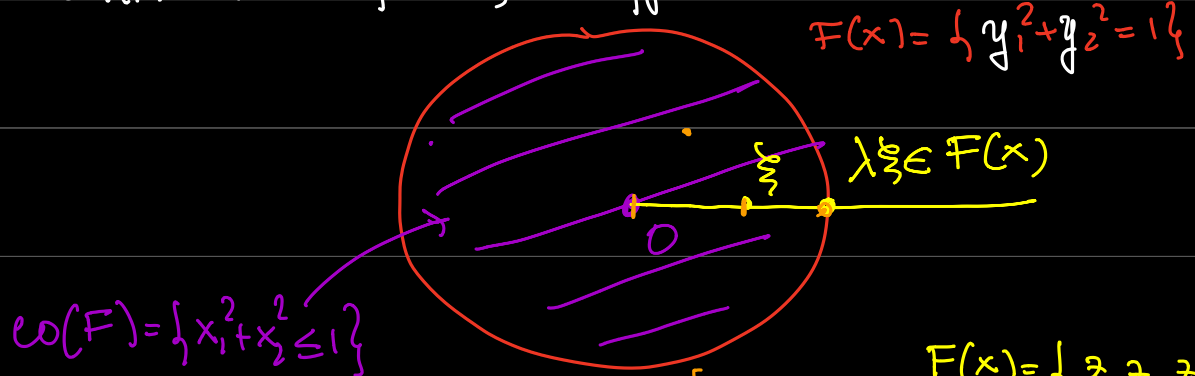
Convessificare F equivale a convessificare $\mathcal{U}$

TEOREMA (Cellina–Ferriero–Marchini, 2006) Supponiamo

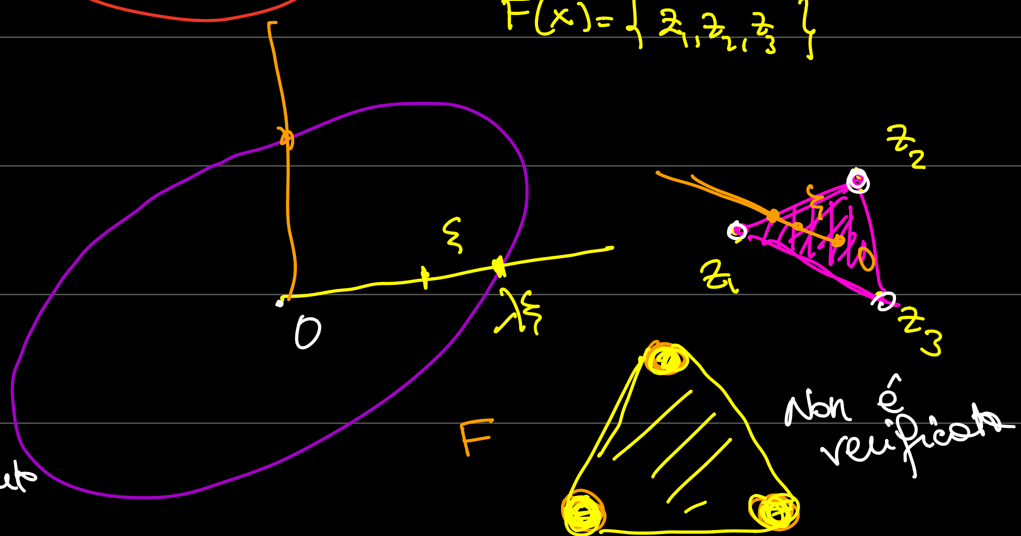
$$x' \in F(x)$$

tale che $\forall x$, $F(x)$ è chiuso e limitato, F sia semi-continua superiormente. Supponiamo inoltre che valga la condizione: $\forall x$, $\xi \in co(F(x))$, $\xi \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \geq 1$ tale che $\lambda \xi \in F(x)$. Allora il problema di tempo minimo per $x' \in F(x(t))$ ha soluzione.

ESEMPIO A x fissato, supponiamo che $F(x)$ sia la circonferenza unitaria



ESEMPI



$co(F)$ = il più piccolo insieme convesso e chiuso che contiene F

Non è vero necessariamente che $\partial co(F) = F$

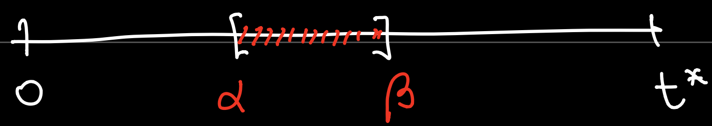
LEMMA: Sia $x^*: [0, t^*] \to \mathbb{R}^n$ una funzione assolutamente continua $x'(t) = 0$ su un insieme $E \subseteq [0, t^*]$ di misura positiva; e supponiamo $x'(t)\in F(x(t))$ per q.o. $t\in[0,t^*]$

Allora $\exists\ \tilde{t}^*<t^*$ e una funzione $\tilde{x}:[0,\tilde{t}^*]\to\mathbb{R}^n$

tale $\tilde{x}(0)=x^*(0)$, $\tilde{x}(\tilde{t}^*)=x(t^*)$ e inoltre

$$\tilde{x}'(t)\in F(\tilde{x}(t)) \quad \text{q.o su } [0,t^*].$$

Dimostrazione: idea

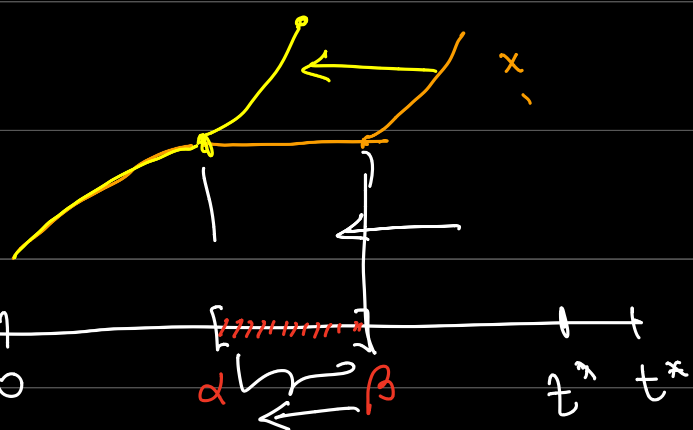


Supponiamo $x'(t)\equiv 0$ quasi ovunque su $[\alpha,\beta]\subset[0,t^*)$

$\Rightarrow\quad x(t)=x(\alpha)=x(\beta)$ su $[\alpha,\beta]$

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases} x(t) & \text{se } t\in[0,\alpha] \\ x(\alpha)=x(\beta) & \text{se } t=\alpha \\ x(\beta+t-\alpha) & \text{se } t\in[\alpha,t^*-\beta] \end{cases}$$

$\tilde{x}$:



$\tilde{x}'(t)\in F(\tilde{x}(t))$ per quasi ogni t.

Dimostrazione del teorema del tempo minimo.

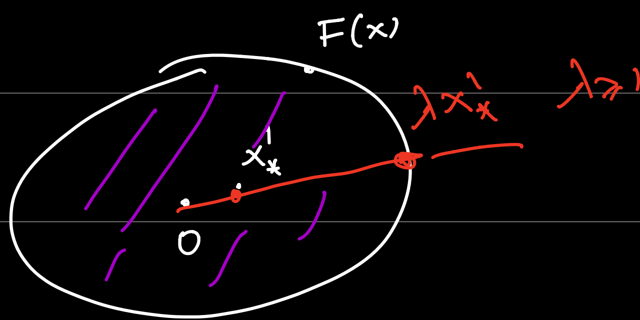
Inizialmente, risolviamo il problema convessificato.

Sia x_* la soluzione del pb del tempo minimo $F \to co(F)$

L'insieme $\Lambda(t) = \{\lambda \geq 1 : \lambda x_*'(t) \in F(x(t))\}$ non è vuoto

per quasi ogni t. Infatti, se $x_*' = 0$ su un insieme di misura

positiva il teorema ci dice che T^* non è il tempo minimo



Se c'è più di un λ, facciamo una selezione misurabile

$$t \mapsto \lambda(t) \geq 1 : \quad \lambda(t) x_*'(t) \in F(x_*(t))$$

$$s'(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \qquad s(t) = \int_0^t \frac{1}{\lambda(\tau)} d\tau$$

s è sicuramente crescente, $\lambda \geq 1 \Rightarrow s^* = \int_0^{T^*} \frac{1}{\lambda(\tau)} d\tau < T^*$ per q.o.t.

se non avviene che $\lambda(t) \equiv 1$ q.o. $(\Rightarrow x_*' \in F(x_*(t)))$

Prendiamo $\tilde{x}(s) = x_*(t(s))$

$$\tilde{x}'(s) = x_*'(t(s)) \frac{dt}{ds} = x_*'(t(s)) \lambda(t(s)) \in F(x_*(t(s)))$$

$= F(\tilde{x}(s))$

Siamo passati da $x_*' \in co(F(x_*))$ a $\tilde{x}' \in F(\tilde{x})$ in un tempo s^* inferiore.

ELEMENTI DI TEORIA DEL CONTROLLO LINEARE

$M \in \mathcal{M}(n,n)$ $\quad N \in (m,n)$ $\quad \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x' = Mx + Nu & u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

-- condizioni finali, tempo minimo.

Alcuni richiami: soluzione fondamentale $X(t) \in \mathcal{M}(n,n)$ é una matrice

che risolve
$$\begin{cases} X' = MX \\ X(0) = \mathbb{I} \end{cases}$$

nei fatti é l'esponenziale $X(t) = e^{tM}$. La soluzione del sistema dinamico é allora

$$x(t) = X(t)\left[x_0 + \int_0^t X^{-1}(s) N u(s) ds\right]$$

Vediamo la condizione di massimalità del principio di Pontryagin:

Risolviamo il problema aggiunto dove $f(x,u) = Mx + Nu$

$$p' = -pM$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{(p^T)' = -M^T p^T}$$ $y' = Ay \quad e^{tA}$

La soluzione fondamentale dell'equazione $-M^T$ é

$$e^{-tM^T} \to (e^{-tM})^T$$

Scriviamo le condizione di massimalità:

$$\langle p^T, f(x^*(t), u^*(t))\rangle = \max_{w\in\mathcal{U}} \langle p^T, f(x^*(t), w)\rangle$$

$$\langle p^T, Mx^* + Nu^*\rangle = \max_{w\in\mathcal{U}} \langle p^T, Mx^* + Nw\rangle$$

$$\cancel{\langle p^T, Mx^*\rangle} + \langle p^T, Nu^*\rangle = \cancel{\langle p^T, Mx^*\rangle} + \max_{w\in\mathcal{U}} \langle p^T, Nw\rangle$$

q.o. t $\quad \boxed{\langle p^T, Nu^*\rangle = \max_{w\in\mathcal{U}} \langle p^T, Nw\rangle}$

$\exists h$ t.c. $p^T = (e^{-Mt})^T h^T$

$$\langle (e^{-Mt})^T h^T, Nu^*\rangle = \max_{w\in\mathcal{U}} \langle (e^{-Mt})^T h^T, Nu^*\rangle$$

$$\langle h^T, \underbrace{e^{-Mt}}_{X(-t)} Nu^*\rangle = \max_{w\in\mathcal{U}} \langle h^T, \underbrace{e^{-Mt}}_{X(-t)} Nu^*\rangle$$

La tesi del P.M $\exists h$ t.c.

$$\boxed{\langle h^T, X(-t)Nu^*(t)\rangle = \max_{w\in\mathcal{U}} \langle h^T, X(-t)Nw\rangle}$$

per q.o. t.

OSSERVAZIONI: Noto h, la relazione di sopra permette di calcolare "esplicitamente" $u^*(t)$. Si tratta, a t fissato di massimizzare una funzione lineare di w su un insieme di controlli $\mathcal{U}$ chiuso e limitato. Il massimo (in generale) non può che essere assunto sulla frontiera di $\mathcal{U}$.