CONTROLLI LINEARI

$$(D) \quad \begin{cases} x' = Mx + Nu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad M \in \mathcal{M}(n,n) \quad N \in \mathcal{M}(m,n)$$

$$u \in \mathcal{U}$$

Controlli ammissibili son $u(\cdot)$, $t \mapsto u(t) \in \mathcal{U}$ e che sono funzioni misurabile

Definizione: L'insieme dei valori raggiungibili al tempo t é definito come

$$K(t; x_0) = \{ x_1 : \exists\, u(\cdot) \text{ controllo ammissibile tale che la sol di } (D) \text{ é tale che } x(t) = x_1 \}$$

In tale caso diciamo che il controllo $u(\cdot)$ trasferisce x_0 in x_1 (nel tempo t).

OSSERVAZIONE: $x_1 \in K(t, x_0) \iff x_1 = X(t)\left[x_0 + \int_0^t X^{-1}(s) N u(s)\, ds\right]$

TEOREMA: Se $\mathcal{U}$ é convesso, chiuso e limitato, allora, $\forall t > 0$ $K(t, x_0)$ é un chiuso convesso.

Dimostrazione

1 - Convessità: $x_1, x_2 \in K(t, x_0)$ $\exists\, u_1, u_2$ controlli

ammissibili tali che

$$x_1 = X(t)\left[x_0 + \int_0^t X^{-1}(s)\, N\, u_1(s)\, ds \right]$$

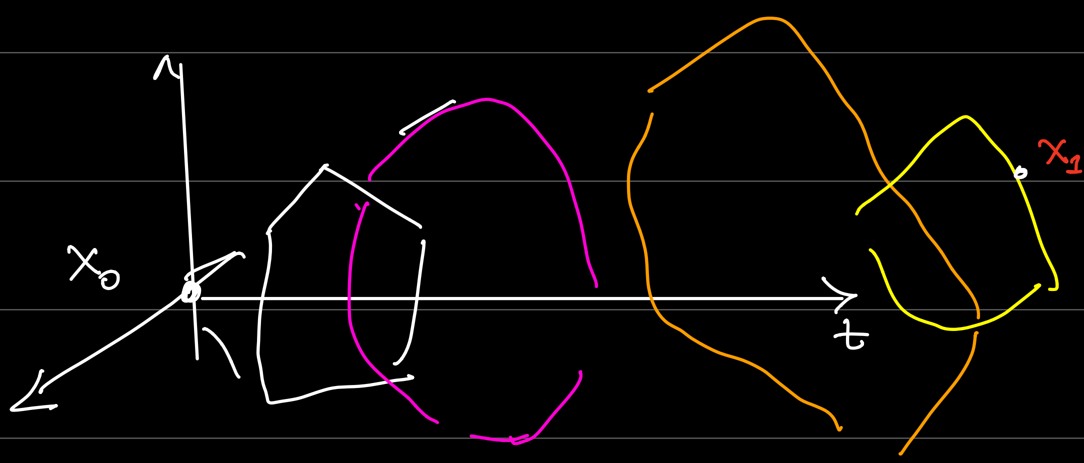
$$x_2 = X(t)\left[x_0 + \int_0^t X^{-1}(s)\, N\, u_2(s)\, ds \right]$$

Facciamo la combinazione convessa

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = X(t)\left[x_0 + \int_0^t X^{-1}(s) N \underbrace{\left[\lambda u_1(s) + (1-\lambda) u_2(s)\right]}_{\text{controllo ammissibile}} ds \right]$$

$\lambda \in [0,1]$

$$\Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in K(t, x_0)$$



2. $K(t,x_1)$ é chiuso: $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione di elementi di $K(t,x_1)$, convergente a un certo limite $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo dimostrare che $\bar{y} \in K(t,x_1)$

A questo fine, consideriamo la successione dei controlli ammissibili corrispondenti $(u_k)_k$. Usando il fatto che U é chiuso e limitato, come nella dimostrazione del teorema di Filippov, possiamo estrarre una sottosuccessione $(u_k)_k$ che converge debolmente in L^1 a un limite $\bar{u}$, abbiamo che

$$x_1 = X(t)\left[x_0 + \boxed{\int_0^t X(-s) N u_k(s) ds}\right] \quad \forall k$$

per convergenza debole

$$x_1 = X(t)\left[x_0 + \int_0^t X(-s) N \bar{u}(s) ds\right]$$

$x_1 \overset{?}{\in} K(x_0, t)$? Vero se $\bar{u}$ é un controllo ammissibile

Qui entra in gico di nuovo la convessità di $\mathcal{U}$ insieme al Lemma di Mazur $(u_k)_k$ debolmente convergente a $\bar{u}$ $\Rightarrow$ $\exists$ successione di combinazioni convesse che converge a $\bar{u}$ in L^1 $\Rightarrow$ sottosuccessione converge puntualmente

$\mathcal{U}$ é chiuso e convesso $\Rightarrow \bar{u}(t) \in \mathcal{U}$ per q.o. t

$\Rightarrow$ $\bar{u}$ é un controllo ammissibile. $\square$

PROPRIETÀ: Se T^* é il tempo minimo per trasferire x_0 in x_1 $\Rightarrow$ $\boxed{x_1 \in \partial K(T^*; x_0)}$ (= frontiera dell'insieme raggiungibile)

Idea della dimostrazione: L'evoluzione $K(t, x_0)$ ha delle proprietà di continuità che fanno sì che se x_1 fosse un punto interno a $K(T^*; x_0)$ $\Rightarrow$ dovrebbe essere un punto interno anche a $K(t; x_0)$ per sufficientemente vicino a T^*, $|t-T^*|<\delta$, $t = T^* - \delta/2$ si fa comunque raggiungere x_1 in un tempo inferiore. In contraddizione con l'ottimalità di T^*.

DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO DEL MASSIMO DI PONTRYAGIN

$$\begin{cases} x' = Mx + Nu \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$\mathcal{U}$ convesso, chiuso limitato

$\min\{t>0 : x(t) = x_1, \text{ per qualche controllo ammissibile}\}$

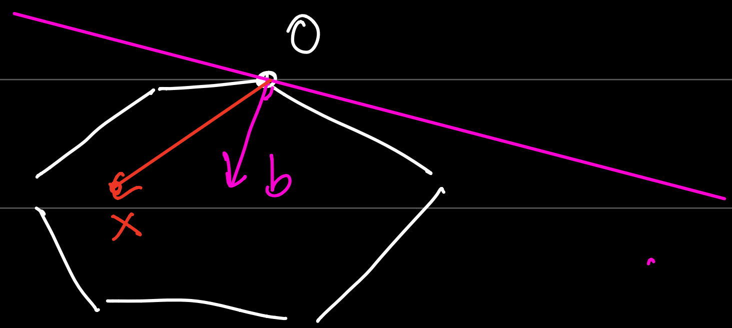
Siano (x^*, u^*) e T^* la traiettoria, il controllo e il tempo ottimi. Allora, esiste un vettore non nullo h tale che

$$\langle h^T, X^{-1}(t) N u^*(t) \rangle = \max_{w \in \mathcal{U}} \langle h^T, X^{-1}(t) N w \rangle$$

per q.o. $t \in [0, T^*]$.

Dimostrazione:

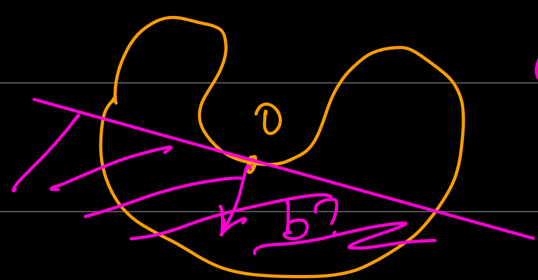
Usiamo il Teorema di Hahn-Banach: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso, limitato convesso, $0 \in \partial C$ $\Rightarrow$ C é contenuto in un semispazio



Cioé, esiste un vettore $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ tale che, $\forall x \in C$

$$\langle b, x \rangle \leq 0$$

Vediamo che l'enunciato é falso se C non é convesso



Controesempio.

Possiamo sempre pensare, con una traslazione, di portare l'origine in x_1.

Esiste quindi un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, tale che $\forall x_1 \in K(T, x_0^*)$ si abbia $\langle b, x_1 \rangle \leq 0$

$\forall\, u_1 \in \mathcal{U}$ controllo ammissibile $\Rightarrow$

$$x_1 = x(T^*) \in K(T^*, x_0)$$

$$x_1 = X(T^*)\left[x_0 + \int_0^{T^*} X^{-1}(s) N u_1(s)\, ds\right]$$

$$x^*(T^*) = 0 = X(T^*)\underbrace{\left[x_0 + \int_0^{T^*} X^{-1}(s) N u^*(s)\, ds\right]}$$

$$0 = \langle b, \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{x^*(T^*)} \rangle = \langle b, \quad = \quad \rangle$$

$$0 = \langle b, X(T^*)\left[x_0 + \int_0^{T^*} X^{-1}(s) N u^*(s)\, ds\right] \rangle$$

$$0 \geq \langle b, X(T^*)\left[x_0 + \int_0^{T^*} X^{-1}(s) N u_1(s)\, ds\right] \rangle$$

$$\Rightarrow \langle b, X(T^*)\left[\int_0^{T^*} X^{-1}(s) N (u^*(s) - u_1(s))\, ds \rangle \geq 0\right.$$

$$\langle \underbrace{X(T^*)^T b}_{h^T}, \int_0^{T^*} X^{-1}(s) N (u^*(s) - u_1(s))\, ds \rangle \geq 0$$

$$-\int_0^{T^*} \langle h^T, X^{-1}(s) N (u^*(s) - u_1(s))\, ds \geq 0$$

è vero $\forall\, u_1(\cdot)$ controllo ammissibile.

Vogliamo dimostrare che

$$\langle h^T, X^{-1}(s) N u^*(s) \rangle = \max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h^T, X^{-1}(s) N \omega \rangle$$

Vogliamo passare da una versione integrale a una versione puntuale

Possiamo definire $\overbrace{u_{max}(t)}^{\text{a } t \text{ fissato}} = \max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h^T, X^{-1}(t) N \omega \rangle$

per ogni t definiamo

$$U^*(t) = \{ \bar{\omega} \in \mathcal{U} : \langle h^T, X^{-1}(t) N \bar{\omega} \rangle = \max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h^T, X^{-1}(t) N \omega \rangle \}$$

è un sottoinsieme della frontiera di $\mathcal{U}$, chiuso e convesso (a t fissato)

È possibile definire una selezione misurabile della funzione multivoca $U^*(\cdot)$, cioè una funzione $u_1(\cdot)$ che realizza il massimo per q.o. t, $u_1(\cdot)$ è un controllo ammissibile.

$$\int_0^{T^*} \langle h^T, X^{-1}(s) N (u^*(s) - u_1(s)) ds \geq 0$$

$\forall s.$ $$\langle h^T, X^{-1}(s) N u^*(s) \rangle \leq \max_{\omega \in \mathcal{U}} \langle h^T, X^{-1}(s) N \omega \rangle$$

$$= \langle h^T, X^{-1}(s) u_1(s) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle h^T, X^{-1}(s) N (u^*(s) - u_1(s)) \rangle \leq 0 \quad \text{per q.o. } t$$

Questi due danno che la funzione integranda $\equiv 0$

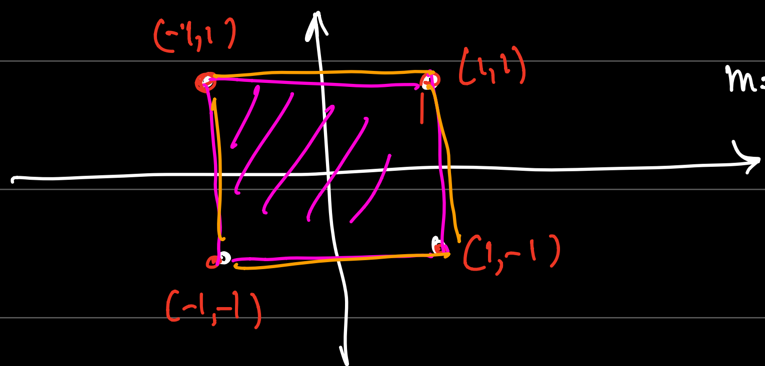
quasi ovunque in $[0,T^*]$, cioè

$$\langle h^T, X^{-1}(t) N u^*(t) \rangle = \max_{w \in \mathcal{U}} \langle h^T, X^{-1}(t) N w \rangle$$

q.o. in $[0,T^*]$. ∎

OSSERVAZIONE: (a) Per q.o. t $u^*(t) \in \partial \mathcal{U}$

(b) Controlli bang-bang $u = (u_1, \dots, u_m) = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$



$m = 2$

$$\mathcal{U} = \{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$co(\mathcal{U}) = [-1,1] \times [-1,1]$$

Rielaborazione adattata per coprire anche questo caso:

Definiamo

$$a(t) = h^T X^{-1}(t) N$$

è una funzione a valori vettoriali. Prendiamo le sue componenti $a_i(t)$

$$v_i(t) = \text{segno}(a_i(t)) = \begin{cases} 1 & a_i(t) > 0 \\ 0 & a_i(t) = 0 \\ -1 & a_i(t) < 0 \end{cases}$$

$v = (v_1, \dots, v_m)$ é una funzione che verifica

$$\langle a(t), v(t) \rangle = \max_{w \in [-1,1]^m} \langle a(t), w \rangle$$

Infatti abbiamo

$$|\langle a(t), w \rangle| \leq \left| \sum_{i=1}^{m} a_i(t) w \right| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i(t)|$$

perché $|w| \leq 1 \quad \forall\, w \in [-1,1]^m$

D'altra parte se scegliamo v_i

$$|\langle a(t), v \rangle| = \sum_{i=1}^{m} |a_i(t)|$$

in questo modo si realizza il massimo.

Problema é la misurabilità della funzione v, in modo da poterne fare un controllo ammissibile.

$a_i(t)$ sono le componenti di un vettore $\bar{h}^T X(t) N$

vettore che, come funzione di t ha le stesse regolarità di $X(-t)$, che é una funzione analitica.

$\Rightarrow a_i$ sono funzioni analitiche in $[0, T^*] \Rightarrow$ o

sono identicamente nulle, oppure hanno un numero finito di zeri. $\Rightarrow v_i$ sono misurabili perché hanno un numero finito di discontinuità.