1

Se WEBEX non funziona

⟶ Google Meet

su Moodle il link alla riunione Google Meet

Libri:

- do Carmo : Curves and Surfaces
- do Carmo : Differential Forms
- Spivak : Calculus on Manifold

Esami: scritto + orale nello stesso appello

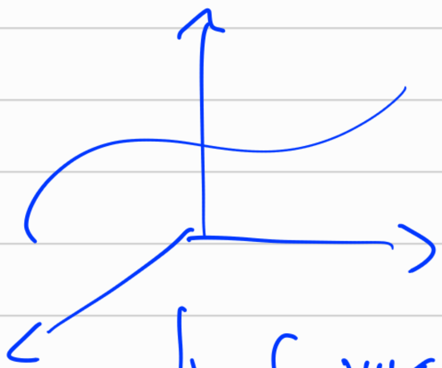
Scritto : come Geometria 2
⟶ possibile usare libri e appunti

orali : presenza / distanza

- Curve (semplice)
- Superfici (più complicate)
- Forme differenziali

— o —

Curve nello spazio $= \mathbb{R}^3$



curva: qual è la definizione?

In forma parametrica:

<u>Definizione</u>: una <u>curva parametrizzata</u> è una funzione $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ dove

- I = <u>intervallo</u> in $\mathbb{R}$
- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è una funzione C^∞

L'immagine $\alpha(I)$ si chiama <u>sostegno</u> della curva

3

Definizione Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, $t_0 \in I$

Il vettore

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

si dice vettore tangente ad α in t_0

- α si dice regolare in t_0 se $\alpha'(t_0) \neq 0$

Attenzione $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$

su $\mathbb{R}^3$ convivono 2 strutture:

- $\mathbb{R}^3_v$: spazio vettoriale con base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$
- $\mathbb{R}^3_a$: spazio affine con origine O, sist di rif. indotto da $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$

$\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3_a$

$\alpha'(t) \in \mathbb{R}^3_v$

Esempio 1 Rette $P_0 \in \mathbb{R}^3_a$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^3_v$

$$\alpha(t) = P_0 + t\,\underline{v}$$

retta passante per P_0, parallela a $\underline{v}$

④

- $\alpha'(t) = \underline{v}$ (costante)
- se $\underline{w} = \lambda \underline{v}$ $(\lambda \neq 0)$, allora

$$\beta(t) = P_0 + t\,\underline{w} \quad \text{retta}$$

i sostegni di α e β sono uguali

- $\gamma(t) = P_0 + t^3\,\underline{v}$

$$\gamma'(t) = 3t^2 \cdot \underline{v}$$ velocità non è costante

osserviamo:

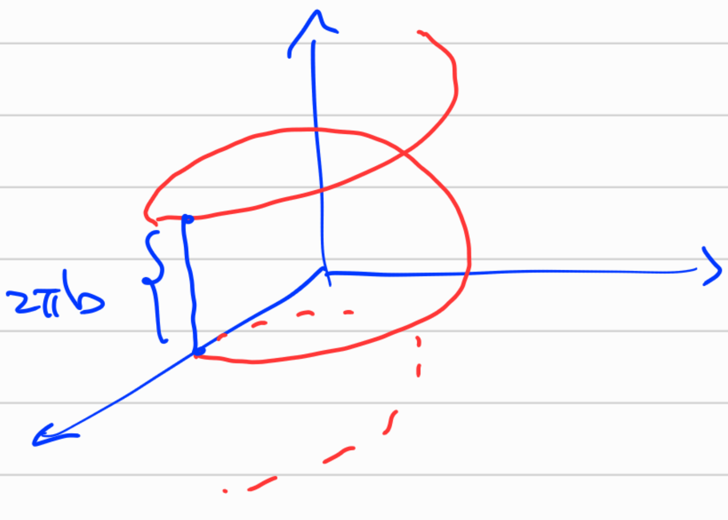
$$\gamma'(0) = \underline{0} \longrightarrow$$ non è regolare

<u>Esempio 2</u> Elica circolare

$a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a, b fissati

$$\alpha(t) = (a\cdot\cos t,\ a\cdot\operatorname{sen} t,\ bt)$$

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$



$b = 0$ circonf percorsa infinite volte

a = raggio

$2\pi b$ = <u>passo</u>

$\alpha'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b) \neq 0$ sempre

$\alpha'(t) \cdot \underline{k} = b$ costante

5

$\|\alpha'(t)\|^2 = a^2 + b^2 = \text{costante}$

$\rightarrow \cos \widehat{\alpha'(t)\, k} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ costante

<u>cioè</u>: $\alpha'(t)$ forma un angolo costante con l'asse z

<u>Esempio</u>: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

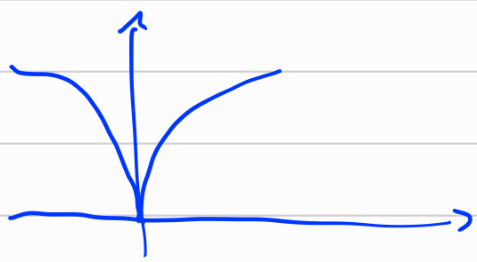
$\alpha(t) = (t^3, t^2, 0)$ di classe C^∞

$\alpha'(t) = (3t^2, 2t, 0) \rightarrow$ non è regolare per $t=0$

nel piano $\mathbb{R}^2 = \{z=0\}$ è il grafico della funzione

$x = t^3$
$y = t^2$ $\rightarrow x^2 = y^3$

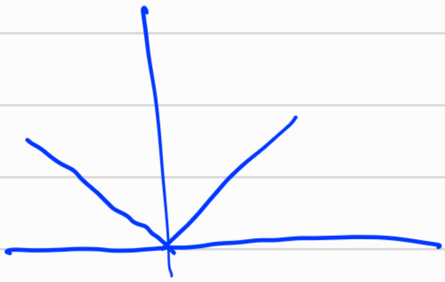
$$\downarrow\ \boxed{y = \sqrt[3]{x^2}}$$



<u>cuspide</u>

Esempio: valore assoluto:

$\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(t) = (t, |t|)$



non è di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\beta(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & t < 0 \end{cases}$$

α e β hanno lo stesso sostegno

β è di classe $\mathcal{C}^1$ (ma non $\mathcal{C}^2$)

Esercizio:

- scrivere una param di classe $\mathcal{C}^k$
- scrivere una param di classe $\mathcal{C}^\infty$

—o—

Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ curva param. regolare

fissiamo $t_0 \in I$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| \, du$$

$s(t)$ = arco lunghezza

$P = \alpha(t_0)$, $Q = \alpha(t)$: $s(t)$ = lunghezza dell'arco PQ.

osserviamo: $s'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0 \ \forall t$ (7)

in particolare sempre positiva $\Longrightarrow$ $s(t)$
(Lagrange)

strettamente crescente $\Longrightarrow$ $s(t)$ invertibile

$s: I \longrightarrow J$ (J intervallo)

è di classe C^∞: in effetti $\|\alpha'(t)\|$

è di classe C^∞ perché $\alpha'(t) \neq 0$

$\longrightarrow$ $s(t)$ è di classe C^∞ e la sua inversa è ancora di classe C^∞.

$$\begin{tikzcd}
I_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "s(t)"', bend right] & \mathbb{R}^3 \\
J_s \arrow[u, "t(s)"', bend right] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\beta(s) = \alpha(t(s))}$$

$t(s)$ = funzione inversa di $s(t)$

α e β hanno lo stesso sostegno

$$\|\beta'(s)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right\| = \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| =$$

$$= \|\alpha'(t)\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \equiv 1$$

$$\begin{tikzcd} I_t \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & & \mathbb{R}^3 \\ J_s \arrow[u, bend right, "\psi"'] \arrow[urr, "\beta"'] & & \end{tikzcd}$$

$$\beta(s) = \alpha(\psi(s))$$

φ, ψ di classe C^∞, inverse l'una dell'altra

α e β si dicono ottenute con <u>cambio di parametro</u>

φ e ψ di classe C^∞, inverse l'una dell'altra si dicono <u>diffeomorfismi</u>

<u>Definizione</u> (+ esercizio)

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ si dicono <u>equivalenti</u> se esistono

$\varphi : I \to J$, $\psi : J \to I$ diffeo inversi l'uno dell'altro tali che:

$$\alpha = \beta \circ \psi \qquad (\beta = \alpha \circ \varphi)$$

Definizione Una curva è una classe di equivalenza di curve parametrizzate.

Una proprietà è geometrica se non dipende dalla parametrizzazione

per esempio: vettore tg non è geom

$$P_0 + t\underline{v} \quad , \quad P_0 + 2t\underline{v}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\alpha' = \underline{v} \qquad\qquad \beta' = 2\underline{v}$$

invece: retta tangente è geometrica

se $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$

$$\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$$

sono paralleli perché differiscono per lo scalare $\varphi'(s) \neq 0$.

Conclusione:

se $\alpha(t)$ curva param. regolare

$\rightarrow$ $s(t)$ = arcolungh. è un cambio di parametro

$\rightarrow$ $\beta(s) = \alpha(t(s))$ è equivalente ad $\alpha(t)$

$\rightarrow$ in ogni classe di equivalenza c'è (almeno) una curva param. per arcolunghezza, cioè tale che

$$\|\beta'(s)\| \equiv 1$$