

Geometria 3

Corso di Laurea in Matematica

Alberto Albano

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI TORINO, VIA CARLO
ALBERTO 10, 10123 TORINO, ITALY

Email address: `alberto.albano@unito.it`

Indice

Introduzione	v
Capitolo 1. Curve differenziabili	1
§1. Curve parametrizzate	2
§2. Curvatura e torsione	11
§3. Le formule di Frenet	19
§4. Formule per parametro qualunque	20
§5. Il Teorema fondamentale della teoria locale delle curve	22
§6. Esercizi svolti dal do Carmo	30
Capitolo 2. I teoremi di Fenchel e Milnor	45
§1. Curvatura totale	46
§2. Il teorema di Fenchel	48
§3. Il teorema di Milnor	53
Capitolo 3. Superfici nello spazio	59
§1. Superfici regolari	60
§2. Funzioni differenziabili	77
§3. Il differenziale di una funzione differenziabile	86
§4. Esempi di superfici regolari	96
§5. Esercizi svolti dal do Carmo	104
Capitolo 4. Metrica su una superficie	115
§1. La prima forma fondamentale	116
§2. Isometrie fra superfici	128

§3. Superfici orientabili	137
§4. Esercizi svolti dal do Carmo	145
Capitolo 5. La geometria della mappa di Gauss	153
§1. La seconda forma fondamentale e la curvatura normale	154
§2. La curvatura Gaussiana	164
§3. Le curvature in coordinate locali	168
§4. Esempi	171
§5. Il <i>Theorema Egregium</i>	173
§6. La definizione di Gauss di curvatura	178
§7. Esercizi svolti dal do Carmo	179
Capitolo 6. Forme differenziali	193
§1. Algebra esterna	194
§2. Forme differenziali su un aperto U di \mathbb{R}^n	203
§3. Esercizi	219
§4. La coomologia di de Rham	226
§5. Operatori differenziali	228
§6. Il lemma di Poincaré	237
§7. Esercizi	249
Capitolo 7. Il teorema di Stokes	253
§1. Catene singolari	255
§2. Integrazione	260
§3. Il teorema di Stokes	263
§4. I teoremi classici	276
§5. Il Teorema di Gauss-Bonnet	287
§6. Una 2-forma chiusa ma non esatta	291
Capitolo 8. Complementi	297
§1. Il teorema di de Rham	297
§2. Le equazioni di Maxwell	300

Introduzione

Queste dispense coprono l'intero programma del corso di Geometria 3. Il percorso segue l'impostazione di vari libri e in particolare dei tre seguenti:

- (1) Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, seconda edizione, Dover, 2016
- (2) Manfredo P. do Carmo, *Differential Forms and Applications*, Springer, 1994
- (3) Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, CRC press, 1971

presenti in biblioteca.

In dettaglio, il contenuto è il seguente:

- Il Capitolo 1 tratta gli argomenti del do Carmo *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Chapter 1, fino al paragrafo 1.5.
- Il Capitolo 2 presenta i classici teoremi di Fenchel e Milnor sulla curvatura totale di una curva, che raramente compaiono nei libri di testo sulla teoria delle curve.
- I Capitoli 3, 4 e 5 sulla teoria delle superfici riprendono a seguire l'impostazione del do Carmo. Sul do Carmo sono presenti anche molti esempi che qui non sono riportati e che sono utili per acquisire maggiore familiarità con la teoria.
- Il Capitolo 6 sulle forme differenziali segue il do Carmo *Differential Forms and Applications*, in particolare Chapter 1 e 2. È anche presente la dimostrazione generale del Lemma di Poincaré (non in programma per l'esame), tratta dal do Carmo, Chapter 4.

- Il Capitolo 7 sul teorema di Stokes segue l'impostazione del libro di Spivak *Calculus on Manifolds*, Chapter 4, anche se non parleremo di varietà (manifolds) ma vedremo solo il teorema di Stokes in \mathbb{R}^n . Vi sono anche molti esempi espliciti di catene singolari che non si trovano spesso sui libri.
- Il Capitolo 8 presenta alcuni argomenti che non sono in programma per l'esame e non verranno svolti a lezione, ma che possono essere interessanti per capire l'importanza e l'uso delle forme differenziali e del teorema di Stokes in Geometria e in Fisica, oltre che come anticipazione di argomenti trattati in corsi più avanzati, in particolare *Istituzioni di Geometria* e *Geometria Superiore* nella Laurea Magistrale.

Oltre ai libri già citati, due altre utili referenze per gli argomenti del corso riguardanti curve e superfici sono

- (1) Marco Abate, Francesca Tovena, *Curve e superfici*, Springer, 2006
- (2) Mikhail Postnikov, *Lectures in Geometry: Semester III*, MIR Publisher, Moscow, 1989

Questi due libri sono citati varie volte nelle dispense, con riferimenti a dimostrazioni alternative (o simili) a quelle presentate. Due eccellenti opere liberamente scaricabili sono

- (1) Nigel Hitchin, *Geometry of Surfaces*, in particolare Chapter 4, disponibile nella sezione "Teaching" del sito web di Hitchin all'Università di Oxford: <http://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/>
- (2) Gianluca Occhetta, *Introduzione alla Geometria Differenziale*, disponibile nella sezione "Teaching Pages" del sito web di Occhetta all'Università di Trento: <http://www.science.unitn.it/~occhetta>

La teoria delle curve e superfici nello spazio è molto classica. Vi sono numerosi libri di testo che coprono questo materiale e che sono alla portata della preparazione di una studentessa del secondo anno. Fra questi segnaliamo (in ordine alfabetico di autore)

- Wolfgang Kühnel, *Differential Geometry. Curves–Surfaces–Manifolds*, Student Mathematical Library, vol. 16, Americ. Math. Society, 2006
- John Oprea, *Differential Geometry and Applications*, Math. Association of America, 2007
- Andrew Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer Undergraduate Mathematical Series, Springer, 2010

- R. A. Sharipov, *Course of Differential Geometry: the textbook*, Publ. of Bashkir State University, 1996 (Engl. transl. 2004)
- Kristopher Tapp, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer, 2016 (contiene una trattazione dei teoremi di Fenchel e Milnor)
- Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific Publishing, 2017

Concludiamo citando un paio di opere più avanzate del livello di questo corso. La prima è una serie di volumi che tratteggiano i confini delle basi della Geometria necessarie per affrontare i problemi di ricerca contemporanea in Geometria e Fisica Matematica. Alcuni dei contenuti di questi volumi sono affrontati nei corsi della Laurea Magistrale, in particolare nei corsi di *Topologia Algebrica*, *Istituzioni di Geometria*, *Geometria Superiore* e *Geometria Differenziale*

B. A. Dubrovin¹, A. T. Fomenko, S. P. Novikov², *Modern Geometry—Methods and Applications*, Graduate Text in Mathematics, Springer:

- *Part I. The Geometry of Surfaces, Transformations Groups, and Fields*, GTM 93, 1984;
- *Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*, GTM 104, 1985;
- *Part III. Introduction to Homology Theory*, GTM 124, 1990;

Quest'opera, che è stata pubblicata originariamente in russo con il titolo Современная Геометрия: Методы и Приложения, (*Sovremennaja Geometria: Metody i Priloženia*), Moskva: Nauka 1979, è stata anche tradotta in italiano. Pubblicata dalla Editori Riuniti con il titolo *Geometria contemporanea: metodi e applicazioni*, è ancora disponibile in catalogo.

La seconda è un bellissimo libro di Marcel Berger³

M. Berger, *Geometry Revealed. A Jacob's Ladder to Modern Higher Geometry*, Springer, 2010

In questo libro Berger presenta la matematica, e in particolar modo la geometria differenziale, con una serie di problemi (alcuni ancora non risolti) che illustrano le idee e le tecniche della geometria moderna. La lettura è estremamente interessante, anche se spesso difficile. L'edizione originale del libro è in francese, con il titolo *Géométrie vivante: ou l'échelle de Jacob*, Cassini, 2009.

¹vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Boris_Dubrovin per una biografia e <https://people.sissa.it/~dubrovin/> per il sito in sua memoria alla SISSA, con i testi delle sue dispense di Geometria e Fisica Matematica

²medaglia Fields nel 1970, vedi https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Novikov_Sergi per una biografia

³vedi https://fr.wikipedia.org/wiki/Marcel_Berger per una biografia

Oltre agli indirizzi di siti web, che sono cliccabili, questo file pdf ha link interni per i richiami ad altre parti del testo (per esempio, a enunciati o a formule). I link sono in blu e cliccando il link ci si sposta all'enunciato o alla formula corrispondente.

La numerazione di Teoremi, Proposizioni, Lemmi, Definizioni, Esempi, Esercizi, ... è consecutiva all'interno di un paragrafo: il terzo elemento del secondo paragrafo di un capitolo è indicato "Elemento 2.3". I riferimenti sono dati con il seguente schema:

- (i) Il paragrafo 3 del capitolo 5 è chiamato paragrafo 3 all'interno del capitolo 5 e paragrafo 5.3 negli altri capitoli.
- (ii) In modo analogo, il Teorema 3.2 (o Definizione o Lemma o ...) del capitolo 5 è chiamato Teorema 3.2 all'interno del capitolo 5 e Teorema 5.3.2 negli altri capitoli.

Il simbolo \square indica la fine di una dimostrazione.

Curve differenziabili

In questo capitolo trattiamo la teoria locale delle curve differenziabili. La teoria è ben nota ed è piuttosto semplice e quindi si presta bene come introduzione ai concetti e agli strumenti della geometria differenziale.

Il primo compito che affronteremo è dare una definizione matematicamente rigorosa del concetto di curva. Vi sono varie possibilità e noi sceglieremo l'approccio *parametrico*, che è il più semplice e diretto, anche se poi dovremo definire con cura l'equivalenza di curve parametrizzate per avere un concetto puramente "geometrico".

Dopo questa parte introduttiva, studieremo la geometria di una curva introducendo due funzioni scalari, la *curvatura* e la *torsione* che misurano in modo quantitativo quanto una curva si discosti dall'essere una retta oppure sia una curva piana. Introduciamo il *triedro di Frenet*, una terna di campi vettoriali che seguono l'andamento di una curva e ne descrivono la forma.

La parte più importante della teoria è il cosiddetto *Teorema fondamentale della teoria locale delle curve* che esprime il fatto che curvatura e torsione caratterizzano completamente una curva, a meno di movimenti rigidi dello spazio. Vedremo questo teorema e la sua dimostrazione nel [paragrafo 5](#).

Il capitolo si conclude con una serie di esercizi tratti dal do Carmo, completamente svolti. Gli svolgimenti dettagliati mettono in luce la teoria vista e possono servire come guida per affrontare altri esercizi, sia dal do Carmo che dagli altri libri citati nell'Introduzione.

1. Curve parametrizzate

Cominciamo con la definizione di *curva differenziabile parametrizzata*:

Definizione 1.1. Una *curva differenziabile parametrizzata* è una funzione $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove

- I è un intervallo in \mathbb{R} (generalmente aperto)
- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è una funzione di classe \mathcal{C}^∞ e cioè le funzioni $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ hanno derivate di ogni ordine (e in particolare hanno tutte le derivate continue)

Osservazione. Considereremo solo parametrizzazioni differenziabili (di classe \mathcal{C}^∞) e quindi sottointenderemo spesso l'aggettivo *differenziabile*. Vedremo negli esempi qualche caso di parametrizzazioni non differenziabili e in questi casi faremo attenzione all'ipotesi di differenziabilità.

Osservazione. La definizione dice che una curva parametrizzata è una *funzione*, quindi non un oggetto geometrico. L'immagine $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ è detta la *traccia* o il *sostegno* di α . Discuteremo in seguito la differenza fra la nozione di curva parametrizzata e del suo sostegno.

Nel seguito ci limiteremo alla teoria delle curve nello spazio \mathbb{R}^3 . Sarà però chiaro che (quasi) tutto si può estendere a curve in \mathbb{R}^n . Un caso speciale che considereremo soprattutto negli esempi è $n = 2$ e cioè la teoria delle *curve piane*.

Definizione 1.2. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e sia $t_0 \in I$. Il *vettore*

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

viene detto *vettore tangente* (o *vettore velocità*) della curva α in t_0 .

La funzione $\|\alpha'(t)\|$ si dice *velocità scalare*.

La curva α si dice *regolare in t_0* se $\alpha'(t_0) \neq 0$ e cioè se almeno una delle tre derivate è diversa da 0, altrimenti il punto è detto *singolare*.

La curva α si dice *regolare* se $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$

Osservazione. Notiamo l'importante differenza fra $\alpha(t)$ e $\alpha'(t)$ (e le derivate successive, che considereremo in seguito). Su \mathbb{R}^3 convivono **due** diverse strutture:

- \mathbb{R}^3 è uno *spazio vettoriale* euclideo, con base ortonormale canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (il prodotto scalare è quello standard)
- \mathbb{R}^3 è uno *spazio affine*, i cui elementi sono *punti*, con sistema di riferimento indotto dalla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ e origine in O .

Una curva è costituita da **punti** e cioè $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (spazio affine) mentre i vettori tangenti sono ovviamente **vettori** e cioè $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (spazio vettoriale).

In generale non ci sarà confusione fra le due strutture di \mathbb{R}^3 ma è bene tenere presente la distinzione. Per esempio, ha senso parlare della *traslazione di una curva* (operazione affine) come ha senso parlare del *verso* del vettore tangente (concetto vettoriale). Approfondiremo questa questione quando parleremo dello spazio tangente ad una superficie, nel [capitolo 3](#).

1.1. Esempi. Prima di introdurre altri concetti, vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.3. RETTE. Siano

- $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un **punto**
- $\mathbf{v} = (\ell, m, n) = \ell \mathbf{i} + m \mathbf{j} + n \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ un **vettore**

La curva

$$\alpha(t) = P_0 + t\mathbf{v} = (x_0 + \ell t, y_0 + mt, z_0 + nt), \quad t \in \mathbb{R}$$

è la *retta passante per P_0 e parallela al vettore \mathbf{v}* .

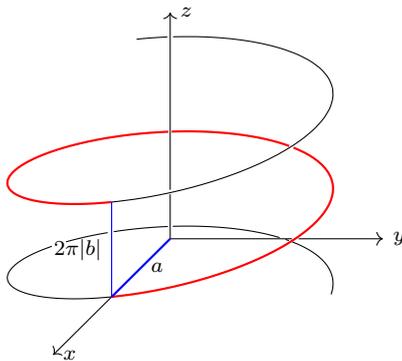
Naturalmente quello che abbiamo scritto è la *forma parametrica* della retta. Osserviamo che $\alpha'(t) = \mathbf{v} \forall t \in \mathbb{R}$ e cioè la velocità è costante. L'interpretazione fisica (cinematica) è il *moto rettilineo uniforme*.

Osserviamo che se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ e poniamo $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ allora la curva parametrizzata $\beta(t) = P_0 + t\mathbf{w}$ è diversa dalla curva α ma il sostegno è lo stesso. Inoltre, $\beta'(t) = \mathbf{w} \neq \mathbf{v} = \alpha'(t)$ e cioè α e β percorrono entrambe la stessa retta con moto rettilineo uniforme ma a velocità diverse.

Osserviamo che anche la curva $\gamma(t) = P_0 + t^3 \mathbf{v}$ ha sostegno la stessa retta, però questa volta non solo la velocità non è costante (il moto è rettilineo *accelerato*) ma $\gamma'(0) = \mathbf{0}$ e cioè γ non è regolare per $t = 0$.

Esempio 1.4. ELICHE CIRCOLARI. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. La curva

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$



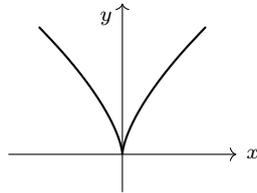
ha come sostegno un'elica che giace sul cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Il *raggio* è a , il *passo* è $2\pi|b|$, e cioè la distanza fra due punti successivi che stanno sulla stessa generatrice del cilindro. Nel caso speciale $b = 0$ si ottiene una circonferenza, percorsa infinite volte. Il vettore tangente è $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ e quindi la velocità non è costante, però $\|\alpha'(t)\|^2 = a^2 + b^2$ è costante e cioè la velocità *scalare* è costante.

Per finire, osserviamo che $\alpha'(t) \cdot \mathbf{k} = b$ e quindi

$$\cos \theta = \frac{\alpha'(t) \cdot \mathbf{k}}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|\mathbf{k}\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

è costante: l'angolo θ formato da $\alpha'(t)$ con la retta asse del cilindro è costante.

Esempio 1.5. CUSPIDE. La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ è una curva piana, che non è regolare per $t = 0$ (verifica immediata).

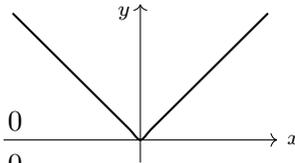


Il sostegno è il grafico della funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$, che è derivabile solo per $x \neq 0$. Nonostante la curva α sia non regolare (presenta una *singolarità* nell'origine), la parametrizzazione è di classe \mathcal{C}^∞ .

Esempio 1.6. VALORE ASSOLUTO.

La curva $\alpha(t) = (t, |t|)$ non è una curva parametrizzata differenziabile, com'è ovvio. Però la curva parametrizzata

$$\beta(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & t < 0 \end{cases}$$



ha lo stesso sostegno ed è di classe \mathcal{C}^1 (ma non di classe \mathcal{C}^2). La curva β non è regolare nell'origine, naturalmente.

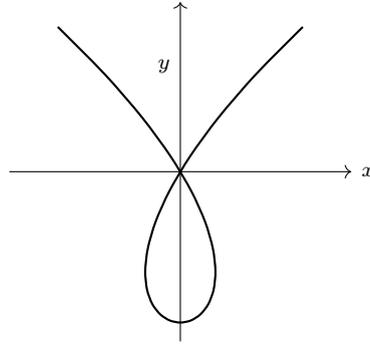
Esempio 1.7. Come per le rette, è possibile percorrere le circonferenze a velocità diversa, ottenendo quindi curve parametrizzate diverse con lo stesso sostegno. Per esempio, per le curve parametrizzate

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \beta(t) &= (\cos 2t, \sin 2t) \end{aligned}$$

si ha $\beta'(t) = 2\alpha'(2t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e cioè in punti corrispondenti la velocità di β è doppia di quella di α .

Esempio 1.8. NODO. La curva piana $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ è una curva parametrizzata differenziabile regolare in ogni punto.

Infatti il vettore tangente $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$ è sempre non nullo: la seconda componente si annulla solo per $t = 0$ e per questo valore la prima componente è non nulla. Osserviamo però che la funzione α non è iniettiva: $\alpha(-2) = \alpha(2) = (0, 0)$ e quindi il sostegno presenta una singolarità (un *nodo*) anche se la curva è regolare in tutti i punti.



Per ogni valore di t c'è un vettore tangente non nullo: in particolare $\alpha'(-2) = (8, -4)$ mentre $\alpha'(2) = (8, 4)$ e i due vettori (diversi fra loro) corrispondono ai vettori tangenti ai due rami della curva che passano per l'origine.

1.2. Parametrizzazione per arcolunghezza. Abbiamo visto che a volte lo stesso sostegno ammette parametrizzazioni diverse. Per studiare questo fenomeno, introduciamo una funzione importante.

D'ora in poi considereremo sempre curve differenziabili (di classe \mathcal{C}^∞). Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata *regolare* e sia $t_0 \in I$.

Definizione 1.9. La funzione

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

è detta *arcolunghezza*.

Poiché $\alpha(t)$ è differenziabile, la funzione scalare $\|\alpha'(t)\|$ è continua (in effetti differenziabile, perché la quantità sotto radice non è mai nulla) e quindi l'integrale esiste finito per ogni valore di t . Il numero reale $s(t)$ è la lunghezza dell'arco di curva fra i punti $P_0 = \alpha(t_0)$ e $P_t = \alpha(t)$.

Osservazione. L'arcolunghezza è di solito introdotta nei corsi di Analisi Matematica, in cui si studia la relazione fra l'integrale scritto e la lunghezza delle curve definita tramite le poligoni inscritte.

Questo spiega anche la scelta dei nomi del parametro: t è il *tempo*, s è lo *spazio* e poiché $\alpha'(t)$ è la *velocità*, è ovvio che integrando la velocità scalare rispetto al tempo si ottiene lo spazio. Questa interpretazione cinematica è spesso utile.

Usiamo adesso l'ipotesi di regolarità: derivando rispetto a t si ha

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| \neq 0, \quad \forall t \in I$$

Quindi la derivata di $s(t)$ è sempre non nulla. Poiché

- il dominio di $s(t)$ è un intervallo (che è *connesso*),
- la derivata di $s(t)$ è una funzione *continua*, in quanto è il modulo di una funzione vettoriale continua,

si ha che l'immagine $J = s(I)$ è ancora un intervallo e la derivata $s'(t)$ mantiene sempre lo stesso segno e quindi $s(t)$ è strettamente crescente oppure strettamente decrescente. In ogni caso, la funzione

$$s : I \rightarrow J = s(I)$$

è una funzione biunivoca. Scrivendo $t = t(s)$ per indicare la funzione inversa, dalla formula per la derivata della funzione inversa si ha che

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt}$$

esiste sempre e cioè abbiamo

Proposizione 1.10. *La funzione $s(t)$ è invertibile e la sua inversa è ancora di classe C^∞ .*

Dimostrazione. Abbiamo appena dimostrato che la funzione inversa è derivabile. Derivando ulteriormente e applicando la formula per la derivata della funzione inversa, otteniamo che la condizione affinché la funzione inversa ammetta derivata di ordine k è che la funzione di partenza abbia derivate di ordine k e la sua derivata *prima* non si annulli mai. (Vedi anche l'[Esercizio 1.19](#)). \square

Consideriamo il seguente diagramma di mappe:

$$\begin{array}{ccc} I_t & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ s(t) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) & \begin{array}{c} t(s) \\ \beta \end{array} & \nearrow \\ J_s & & \end{array}$$

e cioè poniamo $\beta(s) = \alpha(t(s))$. Le curve α e β hanno lo sostegno e sono quindi due parametrizzazioni dello stesso insieme di punti. Calcoliamo la norma della derivata di β :

$$\|\beta'(s)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| = \|\alpha'(s)\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} = 1$$

Si ottiene quindi che la velocità scalare di $\beta(s)$ è costantemente 1.

Nel diagramma precedente, le funzioni $s(t)$ e $t(s)$ non giocano alcun ruolo particolare, se non che sono funzioni inverse l'una dell'altra. Possiamo allora considerare la seguente situazione più generale.

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile e siano $\varphi : I \rightarrow J$ e $\psi : J \rightarrow I$ due funzioni, entrambe di classe \mathcal{C}^∞ ed inverse l'una dell'altra. Ponendo come prima

$$\beta(s) = \alpha(\psi(s))$$

si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccc} I_t & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ \varphi \updownarrow \psi & \nearrow \beta & \\ J_s & & \end{array}$$

In questa situazione si dice che α e β sono ottenute mediante *cambiamento di parametro* o *cambio di parametrizzazione*. Le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(s)$ sono i *cambiamenti di parametro*.

È chiaro che in tale caso le curve α e β hanno lo stesso sostegno, in quanto sono solamente percorse con “leggi del moto differenti”. Quindi le proprietà *geometriche* di una curva dovrebbero essere indipendenti dai cambiamenti di parametro.

Questa osservazione è la chiave per dare la definizione di *curva*: consideriamo equivalenti fra loro tutte le curve parametrizzate che si ottengono l'una dall'altra mediante cambiamenti di parametro. Diamo alcune definizioni:

Definizione 1.11. Una funzione $\varphi : I \rightarrow J$ di classe \mathcal{C}^∞ fra intervalli della retta reale è un *diffeomorfismo* se è invertibile e l'inversa è ancora di classe \mathcal{C}^∞ .

Definizione 1.12. Due curve parametrizzate $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dicono *equivalenti* se esiste $\varphi : I \rightarrow J$ *diffeomorfismo* tale che $\alpha = \beta \circ \varphi$, e cioè se α e β sono ottenute mediante cambiamento di parametro.

Esercizio 1.13. Dimostrare che quella appena definita è una relazione di equivalenza.

Possiamo finalmente dare la definizione di curva:

Definizione 1.14. Una *curva* è una classe di equivalenza di curve parametrizzate, rispetto alla relazione di equivalenza definita sopra.

Con questa definizione, diciamo che una proprietà è “geometrica” se non dipende dalla parametrizzazione scelta, ma solo dalla classe di equivalenza della curva. Un primo esempio è la lunghezza di un arco di curva.

Esempio 1.15. Siano α e β curve equivalenti, $\alpha = \beta \circ \varphi$, sia $t_0 \in I$ e poniamo $u_0 = \varphi(t_0)$. Allora, per ogni $t \in I$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{u_0}^{u=\varphi(t)} \|\beta'(u)\| du = s(u) = s(\varphi(t))$$

e cioè l'arcolunghezza è una proprietà geometrica, che non dipende dalla parametrizzazione scelta. Questa proprietà è ben nota dai corsi di Analisi Matematica.

Concludiamo con una definizione importante.

Definizione 1.16. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile *regolare*. Allora $s : I \rightarrow J$ è un cambiamento di parametro (è differenziabile con inversa ancora differenziabile). La parametrizzazione $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\beta(s) = \alpha(t(s))$ è detta *parametrizzazione per arcolunghezza* e la sua proprietà caratteristica è:

$$\|\beta'(s)\| = 1, \quad \forall s \in J$$

Riprendendo l'interpretazione cinematica data prima, possiamo pensare le parametrizzazioni $\alpha(t)$ e $\beta(s)$ come due *leggi del moto* diverse che descrivono la stessa traiettoria. In entrambi i casi il modulo del vettore tangente esprime la velocità scalare.

Nel caso di $\alpha(t)$, la variabile indipendente è il *tempo* t e la velocità significa la derivata dello spazio rispetto al tempo ed è quindi di solito variabile.

Nel caso di $\beta(s)$ la variabile indipendente è lo *spazio* s e quindi *deriviamo lo spazio rispetto allo spazio*. Ovviamente il risultato è la funzione costante 1.

In sostanza, la parametrizzazione per arcolunghezza descrive una curva usando come parametro lo spazio percorso a partire da un punto iniziale e non il tempo impiegato per percorrere tale spazio. La proprietà di avere vettore tangente di modulo costante pari a 1 semplifica molto lo studio delle proprietà della curva. Poiché tutte le curve regolari possono essere parametrizzate per arcolunghezza, questa non è una ipotesi restrittiva.

Vedremo però che spesso è difficile (quasi sempre impossibile) determinare esplicitamente la parametrizzazione per arcolunghezza di una curva data. Il nostro studio sarà quindi diviso in due parti: introdurremo i concetti importanti con l'ipotesi aggiuntiva che la curva sia parametrizzata per arcolunghezza e poi cercheremo di trovare formule che calcolino queste quantità direttamente da parametrizzazioni arbitrarie senza dover prima trovare l'arcolunghezza.

1.3. Esercizi.

Esercizio 1.17. Consideriamo la curva γ dell'[Esempio 1.3](#)

$$\gamma(t) = P_0 + t^3 \mathbf{v}$$

- (1) Descrivere a parole la velocità di γ .

- (2) Il vettore velocità ha sempre lo stesso verso? (la domanda ha senso perché il vettore velocità di γ ha direzione costante, parallela alla retta sostegno di γ).
- (3) Spiegare perché una curva con la velocità come sopra *deve* essere non regolare in almeno un punto.

Esercizio 1.18. Consideriamo la curva dell'[Esempio 1.6](#).

- (1) Trovare una parametrizzazione di classe \mathcal{C}^k , per ogni $k \geq 0$. (Osservare che tutte le parametrizzazioni trovate non sono regolari nell'origine).
- (2) Trovare una parametrizzazione del valore assoluto di classe \mathcal{C}^∞ . (Suggerimento: leggere l'[Esercizio 6.7](#) per avere l'idea di una funzione di classe \mathcal{C}^∞ . Meglio, leggere l'osservazione alla fine dell'esercizio per avere l'idea di una funzione più semplice. La parametrizzazione del valore assoluto usa la funzione $\varphi(t)$ dell'osservazione, ma non è esattamente $\varphi(t)$).

Esercizio 1.19. Dimostrare con precisione l'affermazione fatta nella dimostrazione della [Proposizione 1.10](#) e cioè: sia $y = f(x)$ una funzione di classe \mathcal{C}^k e supponiamo che $f(x)$ sia invertibile. Se $f'(x) \neq 0$ per ogni x , allora la funzione inversa $x = g(y)$ è ancora di classe \mathcal{C}^k .

Idea della dimostrazione: Scrivere la relazione:

$$y = f(g(y))$$

Derivando una volta rispetto a y e ricavando $g'(y)$ si ottiene il caso ben noto della derivata della funzione inversa:

$$1 = f'(g(y)) \cdot g'(y) \implies g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

che mostra come l'esistenza della derivata prima di $g(y)$ si ottiene solo dall'esistenza della derivata prima di $f(x)$ e dal fatto che questa derivata non si annulla mai.

Derivare di nuovo, ottenendo la derivata seconda di $g(y)$, ed esprimerla in termini di derivate (prime e seconde) di $f(x)$. Si ottiene una frazione il cui denominatore dipende solo dalla derivata prima di $f(x)$ e che si annulla solo se la derivata prima si annulla.

Continuare a derivare e trovare una dimostrazione per induzione che vale per le derivate di ogni ordine.

1.4. Cosa è un punto singolare? Anche se nel seguito studieremo solo curve regolari, conviene precisare il significato di *punto singolare*. Nel caso del nodo, nonostante la parametrizzazione sia regolare, un punto ha

un comportamento differente dagli altri e non sembra corretto chiamarlo regolare.

La **Definizione 1.2** parla di curve *parametrizzate*: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione fissata e diamo la definizione di cosa vuol dire *regolare in* t_0 , dove $t_0 \in I$: vuol dire che il vettore $\alpha'(t_0) \neq 0$.

Con questa definizione, la cuspide e il valore assoluto sono singolari nell'origine e non crediamo ci siano dubbi sul significato di questa affermazione.

Ci possiamo chiedere:

Si dice dunque singolare un punto che presenti caratteristiche diverse rispetto alla quasi totalità dei punti della curva?

Non è esattamente così. Inoltre l'espressione “la quasi totalità” non ha un significato chiaro. Potrebbe voler dire “tutti i punti tranne un numero finito” oppure “tranne dei punti isolati”. Pensiamo per esempio a togliere i numeri interi dai reali: sono rimasti la quasi totalità? Perché? Perché abbiamo tolto solo una infinità numerabile? Ma allora se togliamo tutti i razionali dai reali, ne sono rimasti la quasi totalità? (qui ci sembrerebbe di no, la forma di quello che resta non sembra una curva).

Però l'intuizione è corretta: singolare dovrebbe voler dire “diverso” (probabilmente “peggiore”) rispetto agli altri punti.

Un altro aspetto che non è stato ancora affrontato, e che vedremo meglio quando parleremo di superfici, è dato dal fatto che la definizione di regolare è data tramite la parametrizzazione ma a noi interessano gli oggetti geometrici e cioè il sostegno.

Dopo queste premesse, scriviamo la definizione completa di punto regolare del sostegno: se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva parametrizzata, poniamo $C = \alpha(I)$ il suo sostegno. L'insieme C è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 e quindi ha una topologia indotta. Perché un punto sia regolare anche la topologia deve essere quella “giusta”.

Definizione 1.20. Un punto $P \in C$ è un punto regolare se ha un intorno (nella topologia indotta da \mathbb{R}^3 su C) *diffeomorfo* ad un intervallo della retta reale.

In questa definizione la parametrizzazione non gioca alcun ruolo e con questa definizione un nodo è certamente non regolare

La situazione è simile a quella delle superfici topologiche: ogni punto ha un intorno *omeomorfo* a uno spazio standard. Per le superfici (dimensione 2) lo spazio standard è un disco del piano, per le curve (dimensione 1) lo spazio standard è un intervallo sulla retta.

Notiamo però la differenza: perché il punto sia regolare ci vuole un *diffeomorfismo* e cioè non solo continuo con inversa continua ma differenziabile con inversa differenziabile.

Osserviamo che cuspidi e valore assoluto sono “varietà topologiche di dimensione 1”, però non sono “varietà differenziabili”, perché gli omeomorfismi non possono essere differenziabili.

Invece il nodo non è nemmeno una “varietà topologica”. Un intorno del nodo è l’unione di due intervalli che si incontrano in un punto e questo spazio non è omeomorfo ad un intervallo: rimuovendo il punto di incontro si trovano 4 componenti connesse, mentre rimuovendo un punto ad un intervallo si trovano 2 componenti connesse.

Dunque: punto singolare significa che nessun intorno è diffeomorfo a un intervallo e questo può capitare in due modi diversi (che questi siano i soli due modi è un teorema, la cui dimostrazione non è banale):

- NODO: vicino al punto non è nemmeno una varietà (tipicamente questo capita perché la parametrizzazione non è iniettiva)
- CUSPIDE: la curva è una varietà topologica ma non differenziabile

2. Curvatura e torsione

Introduciamo ora due importanti concetti, la *curvatura* e la *torsione*, due funzioni scalari che descrivono le caratteristiche geometriche di una curva.

2.1. La curvatura. La proprietà caratteristica di una retta è quella di avere direzione costante. Dunque potremmo cercare di misurare il cambiamento di direzione di una curva per avere una quantità che descriva di quanto la curva si allontani dall’essere una retta.

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per arcolunghezza. In questo caso, per chiarezza, useremo sempre la lettera s per indicare il parametro.

Il vettore tangente $\alpha'(s)$ è diverso da 0 e quindi per un punto $P_0 = \alpha(s_0)$ otteniamo la *retta tangente* definita dall’equazione parametrica $P_0 + t\alpha'(s_0)$ e cioè la retta passante per il punto P_0 e parallela al vettore tangente nel punto. Osserviamo che la retta tangente non dipende dalla parametrizzazione: se $\beta = \alpha \circ \varphi$ è un’altra parametrizzazione, ponendo $s = \varphi(u)$ e derivando si ha:

$$\beta'(u) = \alpha'(s) \cdot \varphi'(u)$$

e cioè i vettori tangenti $\beta'(u)$ e $\alpha'(s)$ sono paralleli (entrambi non nulli, in quanto $\varphi'(u) \neq 0$ perché φ è un diffeomorfismo). Dunque la *retta tangente* è un concetto geometrico, mentre il *vettore tangente* dipende dalla parametrizzazione.

Poiché α è parametrizzata per arcolunghezza, il vettore $\alpha'(s)$ ha modulo costante e dunque la sua derivata misura il cambiamento di direzione della retta tangente.

Definizione 2.1. Sia $\alpha(s)$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza. La *curvatura* di α è la funzione

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 2.2. Una curva è (parte di) una retta se e solo se la curvatura è costantemente nulla. Infatti, sia $\alpha(s) = P_0 + s\mathbf{v}$ una retta (la parametrizzazione è per arcolunghezza quando $\|\mathbf{v}\| = 1$). Derivando due volte $\alpha(s)$ si ottiene ovviamente $k(s) \equiv 0$.

Viceversa, se $\alpha''(s) \equiv 0$, dal teorema di Lagrange si ha $\alpha'(s) = \mathbf{v}$ (un vettore costante) e integrando ancora si ha $\alpha(s) = P_0 + s\mathbf{v}$ e cioè l'equazione di una retta.

Esempio 2.3. Sia $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ la circonferenza di centro l'origine e raggio r . Calcolando la derivata si ha

$$\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

e quindi $\|\alpha'(t)\| \equiv r$. In questo caso è facile calcolare l'arcolunghezza e si ha $s(t) = rt$ e dunque l'inversa è $t(s) = s/r$.

Dunque possiamo riparametrizzare la circonferenza per arcolunghezza ottenendo

$$\beta(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right)$$

Derivando si ha

$$\beta'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right) \quad (\text{notiamo che la norma è costantemente } 1)$$

$$\beta''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right)$$

e dunque $k(s) = 1/r$. La circonferenza ha curvatura costante, pari all'inverso del raggio.

Esercizio 2.4. Calcolare la curvatura dell'elica dell'[Esempio 1.4](#). Osserviamo che la parametrizzazione data non è per arcolunghezza e quindi, come nel caso della circonferenza, occorre per prima cosa trovare l'arcolunghezza. Anche in questo caso è facile, ma in generale è impossibile calcolare esplicitamente l'integrale che esprime l'arcolunghezza (poi bisogna ancora trovare la funzione inversa ...). Vedi anche l'[Esercizio 6.4](#).

2.2. Invarianza geometrica della curvatura. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza e dunque $\|\alpha'(s)\| \equiv 1$. Abbiamo definito la curvatura come

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

ma dobbiamo verificare che sia una proprietà geometrica e cioè che non dipenda dalla parametrizzazione ma solo dalla classe di equivalenza della curva. In sostanza, dobbiamo far vedere che se α e β sono ottenute l'una dall'altra mediante cambio di parametro, le loro curvatures sono uguali.

Sappiamo che in ogni classe di equivalenza esiste almeno un rappresentante parametrizzato per arcolunghezza. Questo rappresentante però non è unico. Per esempio, abbiamo usato un particolare estremo inferiore di integrazione nella formula che esprime $s(t)$. Cambiando questo estremo la parametrizzazione cambia ma è sempre per arcolunghezza, in quanto stiamo semplicemente fissando una diversa “origine” nel sistema di riferimento. È facile vedere che la curvatura in questo caso non cambia, ma ci potrebbero essere altre situazioni diverse e dobbiamo considerarle tutte.

Supponiamo allora di avere due parametrizzazioni α e β equivalenti, e quindi un diagramma del tipo

$$\begin{array}{ccc} I_s & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ \varphi \downarrow & \nearrow \beta & \\ J_\sigma & & \end{array}$$

dove $\sigma = \varphi(s)$ è un diffeomorfismo e $\alpha(s) = \beta(\varphi(s)) = \beta(\sigma)$. Se le parametrizzazioni $\alpha(s)$ e $\beta(\sigma)$ sono entrambe per arcolunghezza, si ottiene

$$1 \equiv \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\beta}{d\sigma} \right\| \cdot |\varphi'(s)|$$

e poiché anche $\left\| \frac{d\beta}{d\sigma} \right\| \equiv 1$ si ha $|\varphi'(s)| \equiv 1$ e quindi

$$\varphi'(s) = \pm 1, \quad \forall s \in I$$

La funzione $\varphi(s)$ è un diffeomorfismo e quindi $\varphi'(s)$ è continua e poiché assume valori discreti e il dominio è un intervallo, deve essere costante. Possiamo dunque integrare e ottenere σ in funzione di s :

$$\sigma = \varphi(s) = \pm s + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

La scelta della costante di integrazione c riflette la scelta del punto “origine” e cioè dell'estremo inferiore di integrazione, fatto che avevamo già osservato. Il segno invece descrive il *verso di percorrenza*: quando $\varphi'(s) \equiv -1$ si ha $\sigma = -s + c$ e le parametrizzazioni α e β percorrono la curva in versi opposti.

Diamo un nome a questa situazione:

Definizione 2.5. Se $\alpha(t)$ e $\beta(\tau)$ sono curve parametrizzate equivalenti, date mediante il cambio di parametro $\tau = \varphi(t)$ e $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ si dice che

- α e β hanno la *stessa orientazione* se $\varphi'(t) > 0, \forall t \in I$
- α e β hanno *orientazione opposta* se $\varphi'(t) < 0, \forall t \in I$

Notiamo che in questa definizione i parametri t e τ non sono necessariamente lunghezze d'arco.

Torniamo al caso da cui eravamo partiti: α e β sono entrambe parametrizzate per arcolunghezza e abbiamo la relazione $\sigma = \pm s + c$. In particolare $\varphi'(s) \equiv \pm 1$ è una funzione costante. Dall'uguaglianza $\alpha(s) = \beta(\varphi(s))$ si ottiene, derivando rispetto ad s :

$$(1) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \varphi'(s)$$

$$(2) \quad \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \varphi'(s) \right) = \frac{d^2\beta}{d\sigma^2} \cdot \varphi'(s) \cdot \varphi'(s) + \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \varphi''(s)$$

$$= \frac{d^2\beta}{d\sigma^2} \cdot (\varphi'(s))^2$$

Abbiamo quindi dimostrato la

Proposizione 2.6. Siano $\alpha(s)$ e $\beta(\sigma)$ due curve regolari equivalenti, entrambe parametrizzate per arcolunghezza. Allora:

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ hanno la stessa orientazione} \implies \alpha'(s) = \beta'(\sigma) \text{ e } \alpha''(s) = \beta''(\sigma)$$

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ hanno orientazione opposta} \implies \alpha'(s) = -\beta'(\sigma) \text{ e } \alpha''(s) = \beta''(\sigma)$$

Da questa proposizione otteniamo che $\alpha''(s)$ e $k(s)$ sono invarianti per cambiamento di parametro e sono dunque *proprietà geometriche* della curva, mentre il vettore tangente $\alpha'(s)$ cambia il verso quando le parametrizzazioni hanno orientazione opposta e quindi non è una proprietà geometrica.

2.3. Il triedro di Frenet. Per definizione la curvatura è la norma del vettore derivata seconda. Quando la norma è diversa da 0 è possibile definire un versore, dividendo per la norma.

Definizione 2.7. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare. La curva si dice *biregolare* se $k(s) > 0$ per ogni $s \in I$.

Poiché la curvatura $k(s)$ è una norma, la condizione di biregolarità significa semplicemente che il vettore $\alpha''(s)$ non è mai il vettore nullo. D'ora in poi tutte le curve che considereremo saranno parametrizzate per arcolunghezza e biregolari.

Osservazione. Un caso particolare è quello delle rette. La curvatura di una retta è identicamente nulla e quindi una retta non è biregolare. Questo non è un problema grave, in quanto conosciamo le proprietà delle rette senza dover usare gli strumenti del calcolo differenziale.

Osservazione. Fondamentalmente, una curva biregolare non ha flessi (gli zeri della derivata seconda).

Definizione 2.8. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Il *vettore tangente* è il versore

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$$

Definizione 2.9. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Il *vettore normale* è il versore

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)}\alpha''(s)$$

Notiamo che $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono funzioni vettoriali, di dominio I e codominio lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 . Possiamo anche pensare a queste funzioni come l'assegnare ad ogni punto della curva un vettore applicato al punto della curva. Funzioni di questo tipo si chiamano di solito *campi vettoriali*. Però i campi tangente e normale non sono definiti su un aperto di \mathbb{R}^3 ma solo nei punti della curva o meglio, per i valori del parametro $s \in I$. Per esprimere questa situazione, si dice che sono campi vettoriali *lungo la curva*.

Poiché questi campi sono funzioni (vettoriali) di una variabile, ammettono derivate ordinarie e non derivate parziali. Osserviamo anche che il campo vettoriale $\mathbf{t}(s)$ è di classe \mathcal{C}^∞ , poiché è ottenuto derivando funzioni di classe \mathcal{C}^∞ (la parametrizzazione). Anche la funzione $k(s)$ è di classe \mathcal{C}^∞ poiché la norma (che contiene una radice quadrata) è \mathcal{C}^∞ in tutti i punti in cui l'argomento è diverso da 0 e quindi sempre, per ipotesi di biregolarità. Dunque anche il campo vettoriale $\mathbf{n}(s)$ è di classe \mathcal{C}^∞ .

Il nome *vettore tangente* è chiaro. Spieghiamo adesso il significato del nome *vettore normale*. Il seguente lemma è molto utile e verrà spesso usato nel seguito, anche senza menzionarlo esplicitamente.

Lemma 2.10. Sia $\mathbf{v} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione vettoriale di norma costante. Allora i vettori $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}'(t)$ sono ortogonali, per ogni $t \in I$.

Dimostrazione. Per ipotesi, il prodotto scalare $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \equiv c$ è costante, perché è il quadrato della norma. Derivando con la regola di Leibniz e usando la simmetria del prodotto scalare si ha

$$2\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \equiv 0$$

e cioè $\mathbf{v}(t) \perp \mathbf{v}'(t)$ per ogni $t \in I$. □

Per il lemma, poiché $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ ha norma costante, i vettori $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$ sono ortogonali per ogni $s \in I$. Questo spiega il nome di *vettore normale* (= ortogonale).

Osservazione. Poiché la curva è contenuta nello spazio, c'è un *piano* di vettori ortogonali a $\mathbf{t}(s)$. Il vettore normale $\mathbf{n}(s)$ appartiene a questo piano ed è caratterizzato, fra tutte le infinite possibilità, dall'essere nella direzione e nel verso della derivata del vettore $\mathbf{t}(s)$. È quindi un vettore speciale e non basta dire che è perpendicolare al vettore tangente per individuarlo.

Osservazione. Naturalmente, anche se una retta non è biregolare, il campo tangente è ben definito (ed è costante). Invece il campo normale non è definito, proprio perché non c'è modo di selezionare un vettore particolare nel piano perpendicolare alla retta.

I due vettori $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono due versori ortogonali. È quindi naturale completare ad una terna di versori ortogonali, in modo da avere una base ortonormale dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 . Il modo più semplice per definire il terzo vettore è:

Definizione 2.11. Il vettore

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

si dice *vettore binormale*.

Il vettore $\mathbf{b}(s)$ è, per definizione di prodotto vettoriale, ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$. La sua norma si calcola, per ogni s , con la formula:

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{t}\| \cdot \|\mathbf{n}\| \cdot \sin \theta$$

dove θ è l'angolo fra \mathbf{t} e \mathbf{n} . Poiché sono entrambi versori e sono ortogonali ($\theta = \pi/2$), la norma del prodotto vettoriale è 1.

Introduciamo un po' di terminologia.

Definizione 2.12. La base ortonormale $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ viene detta *triedro di Frenet*.

Questa base non è costante, ma varia da punto a punto. Ha interesse considerare i piani coordinati rispetto a questa base.

Definizione 2.13. Il piano generato da $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ è detto *piano osculatore*.

Il piano osculatore in un punto $P_0 = \alpha(s_0)$ è quindi il piano passante per P_0 e perpendicolare a $\mathbf{b}(s_0)$.

Una curva si dice *piana* se è contenuta in un piano (che non è necessariamente il piano $z = 0$.) Le curve piane hanno piano osculatore costante e in effetti giacciono in questo piano.

Lemma 2.14. *Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare piana. Allora il piano osculatore è costante e coincide con il piano che contiene la curva. Inoltre anche il vettore binormale $\mathbf{b}(s)$ è costante.*

Dimostrazione. Sia $P_0 = \alpha(s_0)$ un punto della curva e supponiamo che il piano che contiene la curva sia il piano passante per P_0 e perpendicolare al vettore (costante) \mathbf{v} . La sua equazione è dunque

$$(\mathbf{x} - P_0) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Poiché i punti della curva soddisfano l'equazione del piano si ha

$$(\alpha(s) - P_0) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall s \in I$$

e derivando (due volte) con la regola di Leibniz e ricordando che \mathbf{v} è costante, si ha:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) \cdot \mathbf{v} &\equiv 0, & \forall s \in I \\ \alpha''(s) \cdot \mathbf{v} &\equiv 0, & \forall s \in I \end{aligned}$$

e quindi i vettori $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono sempre perpendicolari al vettore costante \mathbf{v} . Allora il piano che generano, e cioè il piano osculatore, coincide per ogni $s \in I$ con il piano che contiene la curva ed è dunque costante.

Di conseguenza anche il vettore $\mathbf{b}(s)$ è costante. \square

Osservazione. Le rette sono ovviamente curve piane, ma non sono biregolari e quindi il Lemma precedente non si applica. Una retta non ha vettore normale e binormale e quindi non ha piano osculatore. D'altra parte, una retta è contenuta in infiniti piani (tutti i piani del fascio di centro la retta) e quindi non identifica un piano particolare.

Avevamo già visto che curvatura costante nulla implica che la curva è una retta e abbiamo appena osservato che le curve piane hanno vettore binormale costante. Dunque la variazione del vettore binormale dovrebbe esprimere di quanto una curva si discosta dal giacere in un piano e quindi essere veramente una curva "dello spazio".

Per studiare questa variazione, calcoliamo la derivata di $\mathbf{b}(s)$ a partire dalla sua definizione come prodotto vettoriale, ricordando che la regola di Leibniz vale anche per il prodotto vettoriale.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= (\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)) \\ &= \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) \\ &= k(s) \underbrace{\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{n}(s)}_{=0} + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) \end{aligned}$$

Questo calcolo mostra che $\mathbf{b}'(s)$ è ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ (anche a $\mathbf{n}'(s)$ ma questa informazione non serve).

Poiché il campo binormale ha norma costante (sono tutti versori), dal [Lemma 2.10](#) si ottiene che $\mathbf{b}'(s)$ è anche ortogonale a $\mathbf{b}(s)$. Essendo ortogonale a due dei versori di una terna ortonormale, deve perciò essere parallelo al terzo: $\mathbf{b}'(s)$ è parallelo a $\mathbf{n}(s)$ e possiamo scrivere

$$\boxed{\mathbf{b}'(s) = -\tau(s) \mathbf{n}(s)}$$

dove la funzione $-\tau(s)$ (di classe \mathcal{C}^∞) esprime il coefficiente di proporzionalità fra i vettori $\mathbf{b}'(s)$ e $\mathbf{n}(s)$.

Definizione 2.15. La funzione $\tau(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ è detta *torsione*.

ATTENZIONE. Su (quasi) tutti i libri sulla teoria delle curve, la definizione di torsione è quella data qui sopra. Solo sul do Carmo, che però è proprio il testo maggiormente seguito in queste dispense, la torsione è definita con il segno opposto.

Questo non porta nessuna conseguenza se non che leggendo gli esercizi e le soluzioni del do Carmo, occorre ricordarsi di cambiare il segno tutte le volte che compare la torsione.

Osservazione. Anche la torsione è un invariante geometrico e cioè non dipende dalla parametrizzazione. Sia infatti $\alpha(s)$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza e sia $\beta(\sigma)$ equivalente ad α , anch'essa parametrizzata per arcolunghezza. Come abbiamo visto nel ragionamento che porta alla [Proposizione 2.6](#), si ha $\sigma = \pm s + c$. Nel caso $\sigma = s + c$ è chiaro che le derivate di α e β sono uguali, quindi il triedro di Frenet è lo stesso e le torsioni sono uguali. Se invece $\sigma = -s + c$ si ha

$$\mathbf{t}_\alpha(s) = -\mathbf{t}_\beta(\sigma), \quad \mathbf{n}_\alpha(s) = \mathbf{n}_\beta(\sigma), \quad \mathbf{b}_\alpha(s) = -\mathbf{b}_\beta(\sigma)$$

e dunque $\mathbf{b}'_\alpha(s) = \mathbf{b}'_\beta(\sigma)$ e anche in questo caso la torsione resta invariata.

Concludiamo questo paragrafo con una caratterizzazione delle curve piane.

Proposizione 2.16. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Allora $\alpha(s)$ è una curva piana se e solo se $\tau(s) \equiv 0$ per ogni $s \in I$

Dimostrazione. Se una curva è piana, il [Lemma 2.14](#) afferma che il vettore binormale è costante. Dunque la derivata $\mathbf{b}'(s) = 0$ per ogni $s \in I$ e quindi, dalla [Definizione 2.15](#), la torsione è identicamente nulla.

Viceversa, se la torsione è identicamente nulla, allora il campo binormale $\mathbf{b}(s)$ è costante e poniamo $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$. Sia inoltre $P_0 = \alpha(s_0)$ un punto della curva e consideriamo la funzione di dominio I

$$g(s) = (\alpha(s) - P_0) \cdot \mathbf{b}$$

Derivando, si ottiene $g'(s) = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b} \equiv 0$ (perché i vettori tangente e binormale sono sempre ortogonali) e dunque la funzione $g(s)$ è *costante* (la sua derivata è identicamente nulla e il dominio è un intervallo). Calcolando nel punto s_0 si ha

$$g(s_0) = (\alpha(s_0) - P_0) \cdot \mathbf{b} = (\alpha(s_0) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{b} = 0$$

Allora la funzione $g(s)$ è *identicamente nulla* (è costante e vale 0 in un punto) e cioè $\alpha(s)$ è contenuta nel piano di equazione

$$(\mathbf{x} - P_0) \cdot \mathbf{b} = 0$$

□

3. Le formule di Frenet

Sia come sempre $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza. Per ogni $s \in I$ i vettori $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ formano una base (ortonormale) di \mathbb{R}^3 e perciò possiamo esprimere ogni vettore come loro combinazione lineare. Abbiamo già calcolato

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s)\end{aligned}$$

Completiamo il lavoro calcolando la derivata del campo normale. Dalla definizione del campo binormale

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

e dalle proprietà del prodotto vettoriale otteniamo che

$$\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$$

Derivando (per semplicità non scriviamo la variabile s) e usando le formule precedenti, si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{n}' &= \mathbf{b}' \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}' \\ &= -\tau\mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + k\mathbf{b} \wedge \mathbf{n} \\ &= -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}\end{aligned}$$

Queste tre formule sono note con il nome di *formule di Frenet*. Enunciamo in dettaglio quello che abbiamo ottenuto:

Teorema 3.1 (Formule di Frenet). *Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per arcolunghezza e siano $k(s)$ e $\tau(s)$ le funzioni curvatura e*

torsione. Allora le funzioni vettoriali $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ soddisfano il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & k(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s) \mathbf{t}(s) & + \tau(s) \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & -\tau(s) \mathbf{n}(s) \end{cases}$$

Dal punto di vista scalare, si tratta di un sistema di 9 equazioni differenziali in 9 incognite (le componenti delle tre funzioni vettoriali).

L'importanza di queste formule è duplice: da una parte, se α è una curva data, le formule di Frenet sono vere ed esprimono relazioni fra i vettori del triedro di Frenet e le loro derivate. A partire da queste relazioni se ne possono ottenere altre e vedremo negli esercizi come usare le formule di Frenet per ottenere ulteriori proprietà di una curva a partire dalla curvatura e dalla torsione.

D'altra parte, queste formule contengono (come coefficienti) la curvatura e la torsione. Ci possiamo chiedere se ci sono altre funzioni che sono necessarie per descrivere una curva. La risposta è NO e l'enunciato preciso, che spiega l'importanza della curvatura e della torsione, è il teorema noto con il nome di *Teorema fondamentale della teoria locale delle curve* che vedremo nel [paragrafo 5](#).

4. Formule per parametro qualunque

Vedremo dal *Teorema fondamentale* che curvatura e torsione contengono tutte le informazioni geometriche relative ad una curva. La loro definizione è stata data mediante una parametrizzazione per arcolunghezza, cosa che è quasi sempre impossibile da determinare.

Si pone dunque il problema se sia possibile calcolare curvatura e torsione anche senza preliminarmente trovare una parametrizzazione per arcolunghezza. Questo è in effetti possibile.

Le formule per la curvatura e la torsione in funzione di un parametro arbitrario si trovano enunciate nell'Esercizio 12, paragrafo 1.5 del do Carmo nelle pagine 25/26. Svolgiamo qui questo esercizio con tutti i dettagli. Lo svolgimento illustra anche l'uso delle formule di Frenet.

Sia dunque $\alpha : I_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, sia $s : I_t \rightarrow J_s$ l'arcolunghezza, $t : J_s \rightarrow I_t$ il diffeomorfismo inverso e sia $\alpha(t) = \beta(s(t))$, dove $\beta : J_s \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la parametrizzazione per arcolunghezza. Stiamo cioè

considerando il diagramma (già visto in precedenza)

$$\begin{array}{ccc} I_t & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ s(t) \downarrow & \nearrow \beta & \\ J_s & \uparrow t(s) & \end{array}$$

La curvatura e la torsione si ottengono calcolando le derivate di $\beta(s)$ rispetto ad s . Vogliamo esprimere queste quantità solo in termini di derivate di $\alpha(t)$ rispetto a t . Per maggior chiarezza, usiamo una convenzione tipica della Fisica (e risalente a Newton) e indichiamo con

$$\begin{aligned} (\dot{}) &= \text{derivata rispetto a } t \text{ (= tempo)} \\ ()' &= \text{derivata rispetto a } s \text{ (= spazio)} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\beta'(s) = \beta' = \mathbf{t} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}(t) = \beta'(s)\dot{s}(t) = \dot{s} \mathbf{t}$$

passando ai moduli e ricordando che $\|\mathbf{t}\| = 1$ si ha

$$(3) \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\| = \text{velocità scalare}$$

D'ora in poi non indichiamo le variabili da cui dipendono le funzioni, perché il differente simbolo per le derivate rende chiaro qual è la variabile indipendente. Mettiamo in evidenza le formule importanti:

$$(4) \quad \boxed{\dot{\alpha} = \dot{s} \mathbf{t}}$$

Derivando rispetto a t si ha:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s}(\dot{\mathbf{t}}) \\ &= \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s}(\mathbf{t}'\dot{s}) \\ &= \ddot{s} \mathbf{t} + (\dot{s})^2 \mathbf{t}' \\ &= \ddot{s} \mathbf{t} + (\dot{s})^2 k \mathbf{n} \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza viene dalla prima formula di Frenet. Dunque

$$(5) \quad \boxed{\ddot{\alpha} = \ddot{s} \mathbf{t} + (\dot{s})^2 k \mathbf{n}}$$

Da queste due equazioni si ottiene

$$(6) \quad \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = (\dot{s})^3 k \mathbf{b}$$

e passando ai moduli

$$\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\| = (\dot{s})^3 k$$

e dunque, dividendo per $(\dot{s})^3 = \|\dot{\alpha}\|^3$ e ricordando l'uguaglianza (3)

$$(7) \quad \boxed{k = \frac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|}{\|\dot{\alpha}\|^3}}$$

In questa formula ci sono solo derivate rispetto a t e quindi possiamo calcolare la curvatura. Per ottenere la torsione deriviamo la [formula \(5\)](#)

$$\ddot{\alpha} = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s} \dot{s} \mathbf{t}' + 2\dot{s} \ddot{s} k \mathbf{n} + (\dot{s})^2 (\dot{s} k') \mathbf{n} + (\dot{s})^2 k \dot{s} \mathbf{n}'$$

Scriviamo \mathbf{t}' e \mathbf{n}' in funzione di \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} usando le formule di Frenet e raccogliamo. Si ottiene (controllare i calcoli!):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= (\ddot{s} - (\dot{s})^3 k^2) \mathbf{t} \\ &+ (\dot{s} \ddot{s} k + 2\dot{s} \ddot{s} k + (\dot{s})^3 k') \mathbf{n} \\ &+ (\dot{s})^3 k \tau \mathbf{b} \end{aligned}$$

Adesso calcoliamo il prodotto scalare $(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}$. Dalla [formula \(6\)](#) sappiamo che il prodotto esterno è parallelo a \mathbf{b} e quindi nel prodotto scalare sopravvive solo il coefficiente di \mathbf{b} (la base è *ortonormale*):

$$(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha} = (\dot{s})^6 k^2 \tau$$

da cui possiamo ricavare la torsione:

$$\tau = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{(\dot{s})^6 k^2} = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|^6 \cdot \frac{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|^2}{\|\dot{\alpha}\|^6}}$$

e semplificando si ottiene finalmente

$$(8) \quad \boxed{\tau = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|^2}}$$

Le [formule \(7\)](#) e [\(8\)](#) sono le formule cercate. Notiamo che è anche facile ottenere i vettori del triedro di Frenet:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|} && \text{chiaro, stiamo normalizzando il vettore tangente} \\ \mathbf{b} &= \frac{\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}\|} && \text{la } \text{formula (6)} \text{ dice che } \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \text{ è parallelo a } \mathbf{b} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \end{aligned}$$

Esercizio 4.1. Sia $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ l'elica circolare di raggio $a > 0$ e passo $2\pi b$. Calcolare curvatura, torsione e triedro di Frenet di α senza prima ricavare la parametrizzazione per arcolunghezza. In particolare, osservare il risultato per $b = 0$, cioè per una *circonferenza*.

5. Il Teorema fondamentale della teoria locale delle curve

In questo paragrafo vediamo la dimostrazione del *Teorema fondamentale della teoria locale delle curve* (esistenza e unicità a meno di movimenti rigidi di una curva in \mathbb{R}^3 con curvatura e torsione assegnate).

La dimostrazione è sostanzialmente la stessa che c'è nel libro di do Carmo (Appendice al Capitolo 4), nel libro di Abate-Tovena (Teorema 1.3.37) e nel libro di Postnikov (Lecture 2, Theorem 1, pag. 47). La principale differenza è nel Passo 2 della dimostrazione del [Teorema 5.2](#): i calcoli sono gli stessi, ma qui sono presentati in forma matriciale. Questo semplifica l'esposizione e dovrebbe migliorare (si spera) la comprensione.

Vedremo poi vari esempi di curve e di uso del *Teorema fondamentale*.

5.1. L'enunciato. Per prima cosa dobbiamo enunciare con precisione il teorema che vogliamo dimostrare. Come sempre *differenziabile* significa *di classe* \mathcal{C}^∞ .

Sia $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza, e siano $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ i campi vettoriali che costituiscono il triedro di Frenet. Le formule di Frenet

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & k(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s) \mathbf{t}(s) & + \tau(s) \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & -\tau(s) \mathbf{n}(s) \end{cases}$$

esprimono le relazioni fra i vettori \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} e le loro derivate mediante due funzioni scalari, la *curvatura* $k(s)$ e la *torsione* $\tau(s)$ definite da

$$\begin{aligned} k(s) &= \|\mathbf{t}'(s)\| \\ \tau(s) &= -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

Consideriamo la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

La matrice Q ha per *righe* i vettori \mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} . Allora le formule di Frenet corrispondono all'uguaglianza di matrici

$$(9) \quad \frac{dQ}{ds} \cdot Q^t = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

Infatti le *righe* di $\frac{dQ}{ds}$ sono \mathbf{t}' , \mathbf{n}' , \mathbf{b}' mentre le *colonne* di Q^t sono \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} . Dunque il prodotto righe \times colonne delle due matrici ha come elementi i prodotti scalari $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}$, $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}$, \dots , $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}$ e poiché la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ è ortonormale, queste sono le componenti dei vettori \mathbf{t}' , \mathbf{n}' , \mathbf{b}' . Le formule di Frenet esprimono proprio queste componenti.

Il *Teorema fondamentale* afferma che curvatura e torsione caratterizzano unicamente una curva, a meno di movimenti rigidi. Cominciamo dunque con il verificare che curvatura e torsione sono invarianti per traslazioni e

rotazioni. La dimostrazione di questo fatto è lasciata per esercizio sia sul do Carmo (esercizio 1-5.6) che sull'Abate-Tovena (esercizio 1.25). Diamo qui la dimostrazione completa.

Proposizione 5.1. *Sia $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza e sia $\alpha(s)$ la curva ottenuta da $\beta(s)$ mediante un movimento rigido dello spazio (composizione di traslazioni e rotazioni). Allora le curve α e β hanno la stessa curvatura e la stessa torsione.*

Dimostrazione. Sia \mathbf{v} un vettore fissato: traslare di \mathbf{v} significa considerare $\alpha(s) = \beta(s) + \mathbf{v}$ e poiché le derivate di α e β sono uguali, i vettori \mathbf{t} , \mathbf{n} e (di conseguenza) \mathbf{b} non cambiano e perciò anche $k(s)$ e $\tau(s)$ rimangono invariate.

Il caso delle rotazioni è più interessante. Sia M la matrice di una rotazione: M è ortogonale ($M^t = M^{-1}$) e $\det M = 1$. Possiamo scrivere $\alpha = M\beta$, la rotazione di β (immaginiamo i vettori α e β come vettori colonna). Allora i vettori \mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} sono soggetti alla stessa rotazione, cioè

$$(10) \quad \mathbf{t}_\alpha = M\mathbf{t}_\beta, \quad \mathbf{n}_\alpha = M\mathbf{n}_\beta, \quad \mathbf{b}_\alpha = M\mathbf{b}_\beta$$

Scriviamo questa relazione in forma matriciale come:

$$Q_\alpha = Q_\beta M^t$$

Infatti nella matrice Q mettiamo i vettori \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} in riga mentre i vettori che compaiono nella [formula \(10\)](#) sono vettori colonna.

Calcoliamo il membro sinistro dell'[uguaglianza \(9\)](#) ricordando che

- la matrice M è costante e quindi la sua derivata è la matrice nulla
- la matrice M è ortogonale e quindi ha trasposta uguale all'inversa

si ha:

$$\frac{dQ_\alpha}{ds} \cdot Q_\alpha^t = \frac{d(Q_\beta M^t)}{ds} \cdot (Q_\beta M^t)^t = \frac{dQ_\beta}{ds} (M^t M) Q_\beta^t = \frac{dQ_\beta}{ds} \cdot Q_\beta^t$$

Otteniamo dunque l'uguaglianza anche fra i membri destri dell'[uguaglianza \(9\)](#) e quindi curvatura e torsione non cambiano. \square

ATTENZIONE. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato l'ipotesi di ortogonalità $M^t = M^{-1}$ nel calcolo finale, ma l'ulteriore condizione $\det M = 1$, e cioè M è una *rotazione* (e quindi non cambia l'orientamento) non sembra essere stata usata.

In effetti, abbiamo usato questa ipotesi nel ricavare le [relazioni \(10\)](#). Facciamo in dettaglio tutti i passaggi per ottenerle e così facendo otteniamo un'altra dimostrazione della [Proposizione 5.1](#).

Sia M una matrice ortogonale (qualunque) e partiamo da $\alpha = M\beta$. Derivando si ha

- $\mathbf{t}_\alpha = \alpha' = (M\beta)' = M\beta' = M\mathbf{t}_\beta$
- $\mathbf{t}'_\alpha = M\mathbf{t}'_\beta \implies k_\alpha \mathbf{n}_\alpha = M(k_\beta \mathbf{n}_\beta)$

La prima è già una delle relazioni che vogliamo. Poiché M è ortogonale, la seconda ci dice che i vettori $k_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ e $k_\beta \mathbf{n}_\beta$ hanno la stessa norma e poiché i vettori normali sono entrambi di norma 1 e la curvatura è per definizione positiva si ottiene:

$$k_\alpha = k_\beta$$

e dividendo (la curva β è biregolare e quindi la curvatura è sempre diversa da 0)

$$\mathbf{n}_\alpha = M\mathbf{n}_\beta$$

che è la seconda relazione. Osserviamo che questo ragionamento dimostra che la curvatura non cambia e quindi la curvatura è invariante per *tutte* le isometrie e non solo per movimenti rigidi. Per esempio, la simmetria rispetto ad un piano non cambia la curvatura di una curva.

Invece la torsione è sensibile ai cambiamenti di orientazione. Infatti, per definizione, il vettore binormale si ottiene come prodotto vettoriale del tangente e del normale e cioè la terna (tangente, normale, binormale) è una terna *positiva*. Calcolando i prodotti vettoriali, si ha

$$\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{t}_\alpha \wedge \mathbf{n}_\alpha = M\mathbf{t}_\beta \wedge M\mathbf{n}_\beta = \det(M)M\mathbf{b}_\beta$$

perché se la matrice M cambia l'orientazione (ha determinate -1), la terna $\{M\mathbf{t}_\beta, M\mathbf{n}_\beta, M\mathbf{b}_\beta\}$ è orientata *negativamente* mentre la terna $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ è orientata positivamente e poiché i primi due vettori di queste terne sono uguali, deve essere il terzo a cambiare segno.

Di conseguenza derivando si ha

$$\mathbf{b}'_\alpha = \det(M)M\mathbf{b}'_\beta$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= -\mathbf{b}'_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = -\det(M)M\mathbf{b}'_\beta \cdot M\mathbf{n}_\alpha \\ &= -\det(M)\mathbf{b}'_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha && \text{perché } M \text{ è ortogonale e lascia} \\ & && \text{invariato il prodotto scalare} \\ &= \det(M)\tau_\beta \end{aligned}$$

In conclusione,

- M ortogonale e $\det(M) = 1 \implies k_\alpha = k_\beta$ e $\tau_\alpha = \tau_\beta$
- M ortogonale e $\det(M) = -1 \implies k_\alpha = k_\beta$ e $\tau_\alpha = -\tau_\beta$

Il *Teorema fondamentale della teoria locale delle curve* è il viceversa della [Proposizione 5.1](#) e cioè afferma che è sempre possibile trovare una curva

con curvatura e torsione assegnate in modo unico (a meno di traslazioni e rotazioni). L'enunciato preciso che dimostreremo è:

Teorema 5.2 (Teorema fondamentale). *Siano $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe \mathcal{C}^∞ , con $f(s) > 0$ per ogni $s \in I$ e supponiamo $0 \in I$.*

Per ogni $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e ogni base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbb{R}^3 orientata positivamente esiste una e una sola curva $\beta(s)$ differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza e definita su tutto l'intervallo I tale che:

- (1) $k_\beta(s) = f(s)$, $\tau_\beta(s) = g(s)$
- (2) $\beta(0) = P_0$, $\mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$

L'ipotesi di positività per la base ortonormale significa che $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. Questa ipotesi è chiaramente necessaria, perché il vettore binormale \mathbf{b} è proprio definito come $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Osserviamo anche che tutte le basi ortonormali che hanno matrice di passaggio con la base fissata con determinante positivo saranno orientate positivamente, mentre quelle con matrice di passaggio con determinante negativo saranno orientate negativamente.

La dimostrazione del Teorema 5.2 è basata in modo essenziale sul teorema di esistenza e unicità *globale* delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari. Enunciamo quindi con precisione la versione del teorema che useremo. Questo enunciato (con la dimostrazione) si può trovare sul Salsa-Pagani, Capitolo 4.2.1, pag. 242, enunciati iii) e iv) oppure sul Barutello-Conti-Ferrario-Terracini-Verzini, Teorema VIII.10, pag. 395.

Teorema 5.3. *Siano $\{a_{ij}(s)\}$ per $i, j = 1, \dots, n$ delle funzioni differenziabili sull'intervallo I e siano $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ numeri reali. Supponiamo anche $0 \in I$. Allora esiste ed è unica una famiglia di funzioni differenziabili $x_1(s), \dots, x_n(s)$ definite su tutto l'intervallo I tali che*

$$\begin{cases} x'_1(s) = a_{11}(s)x_1(s) + a_{12}(s)x_2(s) + \dots + a_{1n}(s)x_n(s) \\ \vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ x'_n(s) = a_{n1}(s)x_1(s) + a_{n2}(s)x_2(s) + \dots + a_{nn}(s)x_n(s) \end{cases}$$

e

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad \dots \quad x_n(0) = \bar{x}_n$$

5.2. La dimostrazione. La dimostrazione del Teorema 5.2 si svolge in tre passi.

Passo 1: determinare il triedro. Per ipotesi abbiamo le due funzioni $f(s)$ e $g(s)$ e una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Scriviamo quindi tre "sistemi

di Frenet” di equazioni differenziali per $i = 1, 2, 3$:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathbf{t}'_i(s) = & f(s)\mathbf{n}_i(s) \\ \mathbf{n}'_i(s) = -f(s)\mathbf{t}_i(s) & + g(s)\mathbf{b}_i(s) \\ \mathbf{b}'_i(s) = & -g(s)\mathbf{n}_i(s) \end{cases}$$

dove le funzioni vettoriali $\mathbf{t}(s) = (\mathbf{t}_1(s), \mathbf{t}_2(s), \mathbf{t}_3(s))$ e analogamente per $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ sono le *incognite* del sistema. Imponiamo anche le condizioni iniziali $\mathbf{t}_i(0) = \mathbf{e}_{1i}$, $\mathbf{n}_i(0) = \mathbf{e}_{2i}$, $\mathbf{b}_i(0) = \mathbf{e}_{3i}$ dove \mathbf{e}_{ij} è la componente j -esima del vettore \mathbf{e}_i .

Per il [Teorema 5.3](#), questi sistemi hanno una unica soluzione. Determiniamo in questo modo tre funzioni vettoriali $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$, che soddisfano le equazioni di Frenet e formano una base ortonormale per $s = 0$.

ATTENZIONE. I tre campi vettoriali $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ non sono, per ora, il triedro di Frenet di nessuna curva. Infatti le ipotesi del teorema ci danno solo le funzioni $f(s)$ e $g(s)$ e non una curva da cui partire. In particolare, non è per niente evidente che i tre campi vettoriali formino una base ortonormale per ogni $s \in I$. Questo fatto è proprio il contenuto del prossimo passo.

Passo 2: ortonormalità del triedro. Scriviamo come prima

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{bmatrix}$$

la matrice che ha per *righe* i vettori \mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} trovati come soluzioni del sistema precedente e poniamo

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix}$$

dove $f(s)$ e $g(s)$ sono le funzioni nell'ipotesi del teorema. Il fatto che $Q(s)$ sia la soluzione del [sistema di equazioni differenziali \(11\)](#) significa che

$$\frac{dQ}{ds} = A(s) \cdot Q(s), \quad \forall s \in I$$

Dobbiamo dimostrare che le tre righe della matrice $Q(s)$ formano una base ortonormale per ogni $s \in I$. Equivalentemente, dobbiamo dimostrare che la matrice $Q(s)$ è una matrice *ortogonale* per ogni $s \in I$ e cioè che

$$Q^t(s) \cdot Q(s) = I_3 \quad \text{per ogni } s \in I.$$

Consideriamo dunque la funzione matriciale $\varphi(s) = Q^t(s) \cdot Q(s)$. Per $s = 0$ si ha $\varphi(0) = I_3$ poiché i tre vettori iniziali sono ortonormali. Derivando, si

ha

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \left(\frac{dQ}{ds}\right)^t \cdot Q + Q^t \cdot \frac{dQ}{ds} \\ &= (AQ)^t \cdot Q + Q^t \cdot A \cdot Q \\ &= Q^t \cdot A^t \cdot Q + Q^t \cdot A \cdot Q \\ &= Q^t \cdot (A^t + A) \cdot Q \equiv 0\end{aligned}$$

perché $A = -A^t$ è antisimmetrica. Poiché la funzione matriciale $\varphi(s)$ ha derivata indenticamente nulla (e il dominio è un intervallo) deve essere costante e quindi $\varphi(s) = \varphi(0) = I_3$ per ogni $s \in I$, che è la tesi.

Dunque i vettori $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ formano una base ortonormale per ogni $s \in I$. Osserviamo inoltre che $\det Q(s)$ è una funzione continua e può valere solo 1 o -1 perché $Q(s)$ è ortogonale. Poiché $\det Q(0) = 1$, in quanto la base iniziale è orientata positivamente, allora $\det Q(s)$ vale costantemente 1 (l'intervallo I è connesso!). Dunque le basi $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ sono tutte orientate positivamente.

Passo 3: la curva β . Dimostriamo adesso che il triedro $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ è il triedro di Frenet di una curva con la curvatura e la torsione assegnate. Se $\mathbf{t}(s)$ deve essere il vettore tangente, per trovare la curva basta integrare (ricordiamo che il vettore tangente è la *derivata* di una curva). Poniamo

$$\beta(s) = P_0 + \int_0^s \mathbf{t}(u) du$$

Questa curva è quella cercata. La dimostrazione del teorema si conclude mostrando che questa curva ha le proprietà volute. Denotiamo, per maggiore chiarezza, \mathbf{t}_β , \mathbf{n}_β , \mathbf{b}_β i vettori del triedro di Frenet della curva $\beta(s)$ e $k_\beta(s)$ e $\tau_\beta(s)$ la sua curvatura e torsione.

$$\text{Per prima cosa } \beta(0) = P_0 + \int_0^0 \mathbf{t}(u) du = P_0.$$

Poiché $\|\beta'(s)\| = \|\mathbf{t}(s)\| = 1$ costantemente, la curva è parametrizzata per arcolunghezza e dunque $\mathbf{t}_\beta(s) = \beta'(s) = \mathbf{t}(s)$.

Poiché $\mathbf{t}_\beta = \mathbf{t}$, per la prima equazione del sistema di cui $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ sono soluzione, si ha

$$\mathbf{t}'_\beta = \mathbf{t}' = f\mathbf{n}$$

Passando ai moduli si ha $\|\mathbf{t}'_\beta\| = f$ e poiché per ipotesi $f(s) > 0$, la parametrizzazione è biregolare e quindi il vettore normale \mathbf{n}_β è sempre definito e possiamo scrivere la prima formula di Frenet per la curva β :

$$\mathbf{t}'_\beta = k_\beta \mathbf{n}_\beta$$

Confrontando le due equazioni si ha

$$k_\beta(s) = f(s), \quad \mathbf{n}_\beta(s) = \mathbf{n}(s) \quad \text{per ogni } s \in I$$

Per costruzione del triedro di Frenet e per la positività della base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ si ha infine

$$\mathbf{b}_\beta(s) = \mathbf{t}_\beta(s) \wedge \mathbf{n}_\beta(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)$$

e dunque anche la torsione di β è quella richiesta:

$$\tau_\beta(s) = -\mathbf{b}_\beta(s)' \cdot \mathbf{n}_\beta(s) = -\mathbf{b}(s)' \cdot \mathbf{n}(s) = g(s)$$

In conclusione, la curva β ha per curvatura e torsione le funzioni assegnate, passa per il punto P_0 e per $s = 0$ ha triedro di Frenet assegnato e quindi soddisfa tutte le richieste dell'enunciato.

L'unicità è chiara: il triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è unico con le condizioni iniziali assegnate, e la curva β è unica perché è l'unica primitiva di $\mathbf{t}(s)$ che vale P_0 per $s = 0$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema. \square

5.3. Esempi.

Esempio 5.4. CIRCONFERENZA. Sia $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$, dove $a > 0$ la parametrizzazione di una circonferenza di raggio a . La curva è biregolare e dalle formule già viste si ottiene subito

$$k \equiv \frac{1}{a}, \quad \tau \equiv 0$$

La circonferenza è una curva piana e quindi la torsione è identicamente nulla e dal calcolo si ottiene che anche la curvatura è costante, pari al reciproco del raggio.

Il teorema fondamentale allora dice: se α ha *torsione nulla* e *curvatura costante* $k = 1/a$, allora è una circonferenza o meglio, un arco di circonferenza, perché potrebbe essere di lunghezza inferiore a $2\pi a$

Esempio 5.5. ELICHE CIRCOLARI. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ e sia

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R}$$

l'elica circolare (di asse l'asse z). Il calcolo di curvatura e torsione è semplice e si ha:

$$k \equiv \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau \equiv \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Anche in questo caso la curvatura e la torsione sono costanti e il teorema fondamentale implica: se α ha *curvatura e torsione costanti*, allora è un arco di elica circolare.

Osserviamo che da curvatura e torsione possiamo ricavare i valori di a e b :

$$k^2 + \tau^2 = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

e quindi

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\tau}{k}$$

Ricavando b dalla seconda uguaglianza e sostituendo nella prima, si ottiene (ricordando che $a > 0$)

$$a = \frac{k}{k^2 + \tau^2}$$

Sostituendo adesso nella seconda si ottiene

$$b = \frac{\tau}{k^2 + \tau^2}$$

Chiudiamo questo paragrafo con un esercizio (Esercizio 2 del compito del 9 luglio 2019). Nella cartella di Moodle degli esami degli anni scorsi c'è il file con la soluzione. Provare a fare l'esercizio prima di guardare la soluzione.

Esercizio 5.6. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza. L'*indicatrice delle tangenti* di α è la curva data dal versore tangente

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$$

Sia ora $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ un'elica circolare retta. Dimostrare che l'indicatrice delle tangenti di σ è una circonferenza con centro sull'asse z e calcolarne il raggio.

Suggerimento: non è necessario riparametrizzare $\sigma(t)$ per arcolunghezza

6. Esercizi svolti dal do Carmo

In questo paragrafo riportiamo le soluzioni complete ad alcuni degli esercizi del libro di do Carmo. Il livello di difficoltà degli esercizi varia: alcuni sono semplici calcoli, altri richiedono dimostrazioni più elaborate. Molti usano in modo essenziale le formule di Frenet e quindi mostrano l'utilità di queste formule nello studio delle proprietà delle curve.

Le soluzioni sono complete e scritte con tutti i dettagli. Come sempre, è più utile provare a fare gli esercizi prima di leggere le soluzioni. Inoltre è utile svolgere, o almeno provare a svolgere, altri esercizi presenti sul do Carmo e sull'Abate-Tovena.

Esercizio 6.1. (do Carmo, Esercizio 1-3.1) Dimostrare che le rette tangenti alla curva regolare parametrizzata

$$\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$$

formano un angolo costante con la retta $y = 0, z = x$.

Soluzione. La curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ ha vettore tangente $\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$. La retta $y = x - z = 0$ ha equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = t$ e quindi è parallela al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Il prodotto scalare vale quindi

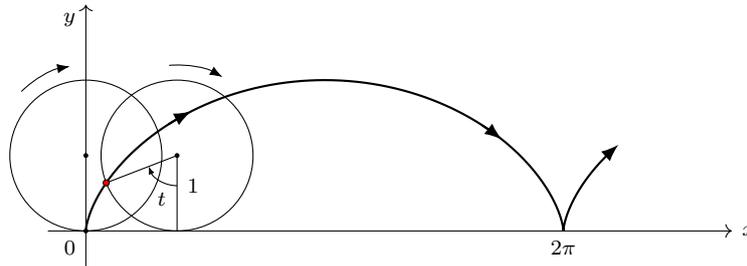
$$\alpha'(t) \cdot \mathbf{v} = 3 + 6t^2$$

e si ha, ponendo $\theta(t) =$ angolo fra $\alpha'(t)$ e \mathbf{v}

$$\cos \theta(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \mathbf{v}}{\|\alpha'(t)\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi l'angolo $\theta(t)$ è costante e in effetti $\theta(t) = \pi/4$.

Esercizio 6.2. (do Carmo, Esercizio 1-3.2) Un disco circolare di raggio 1 nel piano xy rotola senza scivolamento lungo l'asse x . La curva descritta da un punto della circonferenza (in rosso nel disegno) è chiamata *cicloide*.



- Scrivere la parametrizzazione di una curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ il cui sostegno sia la cicloide e determinare i punti singolari.
- Calcolare la lunghezza di un arco di cicloide corrispondente ad un giro completo del disco.

Soluzione.

a. Come si vede dalla figura, il punto sulla curva cercata sta sulla circonferenza di centro $(t, 1)$. Infatti, t è la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo al centro t (in radianti) e poiché la circonferenza rotola senza scivolamento, t è anche la lunghezza orizzontale percorsa durante il rotolamento.

Parametizziamo questa circonferenza. Rispetto alla parametrizzazione usuale, ci sono due differenze:

- andiamo in verso *orario* e quindi il parametro sarà $-s$
- il punto di partenza è il *minimo* e cioè l'angolo iniziale è $\pi/2$

La parametrizzazione è dunque (usiamo il parametro s per misurare l'angolo al centro e poiché la circonferenza ha raggio 1, il parametro è l'arcodistanza):

$$\begin{cases} x = t + \cos(-s + \pi/2) = t + \sin(-s) = t - \sin(s) \\ y = 1 + \sin(-s + \pi/2) = 1 - \cos(-s) = 1 - \cos(s) \end{cases}$$

La cicloide è formata dai punti per cui $s = t$: infatti un punto sta sulla cicloide se l'angolo al centro che determina ($= s$) è uguale alla distanza orizzontale percorsa ($= t$). Si ottiene dunque (usiamo il parametro t perché questa parametrizzazione non è per arcodistanza):

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

Calcolando il vettore tangente

$$\dot{\alpha}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

si vede subito che i punti singolari sono tutti quelli della forma $\alpha(2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$ e cioè tutti i punti al termine di ogni giro completo del disco.

b. La lunghezza si ottiene integrando la norma del vettore velocità. Dal calcolo precedente si ha:

$$\begin{aligned} \|\dot{\alpha}(t)\|^2 &= 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) \\ \|\dot{\alpha}(t)\| &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} \end{aligned}$$

e dunque

$$L = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

Ricordiamo le formule dell'angolo metà

$$\left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$$

e poiché nell'integrazione t varia fra 0 e 2π , il seno di $t/2$ è sempre positivo e non abbiamo bisogno del valore assoluto. Si ottiene:

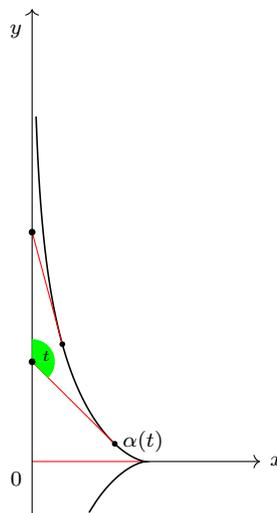
$$L = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8$$

Esercizio 6.3. (do Carmo, Esercizio 1-3.4) Sia $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva data da

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$$

dove t è l'angolo che l'asse y fa con il vettore $\alpha'(t)$ (in verde nel disegno). Il sostegno della curva $\alpha(t)$ si chiama *trattrice*. Dimostrare che

- a. α è una curva parametrizzata differenziabile, regolare in tutti i punti tranne $t = \pi/2$
- b. la lunghezza del segmento della retta tangente alla trattrice fra il punto di tangenza e l'asse y (in rosso nel disegno) è costantemente uguale a 1



Soluzione.

a. L'equazione parametrica della trattrice è:

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$$

dove notiamo che $t \in (0, \pi)$. La derivata è

$$\alpha'(t) = \cos t \left(1, \frac{\cos t}{\sin t} \right) = \cos t (1, \cot t)$$

Nota Bene: $\cot = \cotangente$. Da questo è chiaro che l'unico punto in cui il vettore tangente si annulla è $t = \pi/2$.

b. Sia $P(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$ un punto generico sulla trattrice. La retta tangente alla trattrice in P ha equazione (parametrica)

$$\mathbf{r}(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t)$$

La coordinata x ha dunque equazione

$$x(u) = \sin t + u \cos t$$

e perciò l'intersezione con l'asse y si trova ponendo $x(u) = 0$ e cioè $u = -\tan t$. Dunque il punto $Q(t)$, intersezione fra la trattrice e l'asse y ha coordinate

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left(0, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} - \tan t \cos t \cot t \right) \\ &= \left(0, \log \tan \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

e la distanza fra $P(t)$ e $Q(t)$

$$d(P(t), Q(t))^2 = (\sin t - 0)^2 + \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} - \log \tan \frac{t}{2} \right)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

vale costantemente 1.

Esercizio 6.4. (do Carmo, Esercizio 1-5.1) Consideriamo la curva parametrizzata (*elica* di raggio a e passo $2\pi b$):

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right)$$

dove $c^2 = a^2 + b^2$.

- a. Dimostrare che il parametro s è l'arcolunghezza.
- b. Determinare la curvatura e la torsione di α
- c. Determinare i piani osculatori di α
- d. Dimostrare che le rette contenenti $\mathbf{n}(s)$ e passanti per $\alpha(s)$ incontrano l'asse z formando un angolo costante $\pi/2$
- e. Dimostrare che le rette tangenti ad α formano un angolo costante con l'asse z .

ATTENZIONE. Il testo del do Carmo qui è un po' impreciso: le rette tangenti all'elica non incontrano l'asse z e quindi non formano nessun angolo. La domanda e. va perciò intesa considerando l'angolo formato dalle *direzioni* delle rette e cioè dai vettori a cui sono parallele.

Soluzione. Abbiamo già visto parti di questo esercizio in precedenza. Riportiamo qui i calcoli completi, per futura referenza.

a. Il parametro s è l'arcolunghezza: basta calcolare la norma del vettore derivata:

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right) = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right)$$

e quindi

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \frac{1}{c^2} \left(a^2 \sin^2 \frac{s}{c} + a^2 \cos^2 \frac{s}{c} + b^2 \right) = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

b. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0\right) = \frac{a}{c^2} \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0\right) \\ \alpha''' &= \left(\frac{a}{c^3} \sin \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^3} \cos \frac{s}{c}, 0\right) = \frac{a}{c^3} \left(\sin \frac{s}{c}, -\cos \frac{s}{c}, 0\right) \\ \alpha' \wedge \alpha'' &= \left(\frac{ab}{c^3} \sin \frac{s}{c}, -\frac{ab}{c^3} \cos \frac{s}{c}, \frac{a^2}{c^3}\right) = \frac{a}{c^3} \left(b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a\right) \\ (\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' &= \frac{a^2 b}{c^6}\end{aligned}$$

La curvatura si ottiene dalla prima formula di Frenet

$$k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2} \sqrt{\cos^2 \frac{s}{c} + \sin^2 \frac{s}{c}} = \boxed{\frac{a}{a^2 + b^2}}$$

Per la torsione, calcoliamo con le formule per parametro qualunque, ricordando che $c^2 = a^2 + b^2$:

$$\tau(s) = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha''\|^2} = \frac{a^2 b}{c^6} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2} = \boxed{\frac{b}{a^2 + b^2}}$$

ATTENZIONE. Anche se la parametrizzazione è per arcolunghezza, calcolare la torsione mediante le formule di Frenet è complicato perché dovremmo prima calcolare i vettori normale e binormale. Invece le formule per parametro qualunque funzionano ovviamente anche quando si usano parametrizzazioni per arcolunghezza.

Se sappiamo che la parametrizzazione è per arcolunghezza, allora la formula della torsione si semplifica: infatti in questo caso $\alpha'(s)$ è di norma 1 e i vettori $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$ sono perpendicolari e quindi

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = \|\alpha'\| \cdot \|\alpha''\| \cdot \sin(\pi/2) = \|\alpha''\|$$

e quindi è giustificata la formula usata qui sopra.

Un'altra dimostrazione della formula si trova nel prossimo esercizio.

c. Il piano osculatore è quello generato da \mathbf{t} ed \mathbf{n} o, equivalentemente, il piano perpendicolare a \mathbf{b} . Il vettore binormale è parallelo a $\alpha' \wedge \alpha''$ e quindi, per scrivere l'equazione del piano osculatore, possiamo usare direttamente $\alpha' \wedge \alpha''$. Perciò il piano osculatore nel punto $\alpha(s)$ ha equazione:

$$b \sin \frac{s}{c} \left(x - a \cos \frac{s}{c}\right) - b \cos \frac{s}{c} \left(y - a \sin \frac{s}{c}\right) + a \left(z - b \frac{s}{c}\right) = 0$$

d. Poiché la parametrizzazione è per arcolunghezza,

$$\mathbf{t}' = \alpha'' = k \mathbf{n}$$

e quindi il vettore normale ha la direzione di α'' . Allora le rette richieste hanno equazione parametrica $r(u) = \alpha(s) + u\alpha''(s)$ e cioè

$$\begin{cases} x = a \cos \frac{s}{c} - u \cos \frac{s}{c} \\ y = a \sin \frac{s}{c} - u \sin \frac{s}{c} \\ z = b \frac{s}{c} \end{cases}$$

dunque incontrano tutte l'asse z , per il valore $u = a$ del parametro. Inoltre, poiché la componente z è costante, sono tutte rette parallele al piano xy e cioè sono perpendicolari all'asse z .

e. Basta ricordare che il vettore tangente è

$$\mathbf{t} = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right)$$

e quindi il prodotto scalare con il versore $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ è costante e dunque l'angolo formato da $\mathbf{t}(s)$ e \mathbf{k} è costante.

$$\cos \widehat{\mathbf{t}(s)\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{t}(s)\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{b}{c} = \tau(s)$$

Esercizio 6.5. (do Carmo, Esercizio 1-5.2) Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per arcolunghezza. Dimostrare che

$$\tau(s) = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{|k(s)|^2}$$

Suggerimento: usare le formule

$$\alpha' = \mathbf{t}, \quad \alpha'' = k\mathbf{n}, \quad \alpha''' = k\mathbf{n}' + k'\mathbf{n}$$

ATTENZIONE. Sul do Carmo la formula ha un segno $-$, perché la definizione di torsione è l'opposto di quella data in queste dispense. Inoltre, il valore assoluto per la curvatura non serve.

Soluzione. Usiamo il suggerimento e svolgiamo i calcoli. Usando le formule di Frenet si ha:

$$\alpha''' = k\mathbf{n}' + k'\mathbf{n} = -k^2\mathbf{t} + k\tau\mathbf{b} + k'\mathbf{n}$$

Dunque $\alpha' \wedge \alpha'' = k\mathbf{b}$ e moltiplicando scalarmente per α''' si ha

$$(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha''' = k^2\tau$$

e da qui la tesi.

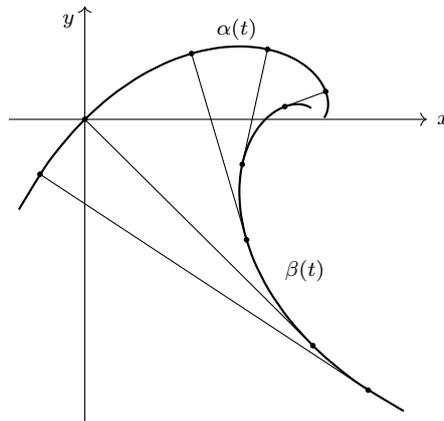
Esercizio 6.6. (do Carmo, Esercizio 1-5.7) Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata regolare piana (il parametro è arbitrario) e poniamo

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(t), \quad k = k(t)$$

cioè rispettivamente il vettore normale e la curvatura al tempo t . Supponiamo che $k(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. La curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}(t), \quad t \in I$$

è detta l'*evoluta* di α



- a. Dimostrare che la retta tangente in t all'evoluta è la retta normale in t alla curva α .
- b. Consideriamo le rette normali ad α in due punti vicini t_1 e t_2 , con $t_1 \neq t_2$. Far tendere t_2 a t_1 e dimostrare che i punti di intersezione delle rette normali convergono ad un punto sul sostegno dell'evoluta di α .

Suggerimento: Parametrizzare α per arcolunghezza.

Soluzione. Osserviamo che la curva è piana, e quindi la torsione τ è identicamente nulla.

a. Sia $\alpha(s)$ la parametrizzazione per arcolunghezza. Allora la curva β diventa:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s)$$

Calcoliamo il vettore tangente a β :

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \alpha'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t} - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} - \frac{1}{k(s)}k'(s)\mathbf{t} \\ &= -\frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}\end{aligned}$$

Notiamo che questo vettore non ha norma costante 1 e quindi la parametrizzazione di β non è per arcolunghezza. Considerando solo la direzione si ha comunque che il vettore tangente a β è normale ad α . Vediamo che proprio le rette coincidono: la retta tangente nel punto $\beta(s)$ è

$$\begin{aligned}r(u) &= \beta(s) - u \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} \\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s) - u \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n} \\ &= \alpha(s) + \frac{k(s) - uk'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}\end{aligned}$$

e questa è la retta normale nel punto $\alpha(s)$.

b. Questo punto è svolto sul do Carmo. Riportiamo qui la soluzione con tutti i calcoli sviluppati e i passaggi spiegati in dettaglio. Come prima, la curva $\alpha(s)$ è parametrizzata per arcolunghezza. In due punti s_1 e s_2 le rette normali ad α sono

$$\mathbf{r}_1(u) = \alpha(s_1) + u\mathbf{n}(s_1), \quad \mathbf{r}_2(v) = \alpha(s_2) + v\mathbf{n}(s_2)$$

Consideriamo s_1 fissato e facciamo variare s_2 . L'intersezione si ottiene per valori $u(s_2)$, $v(s_2)$ che dipendono da s_2 tali che $\mathbf{r}_1(u(s_2)) = \mathbf{r}_2(v(s_2))$ e per questi valori si ha:

$$\alpha(s_2) - \alpha(s_1) = u(s_2)\mathbf{n}(s_1) - v(s_2)\mathbf{n}(s_2);$$

dividendo entrambi i membri per la stessa quantità $(s_2 - s_1)$ si ottiene

$$\frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(s_2)\mathbf{n}(s_1) - v(s_2)\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

e passando al limite si trova

$$\alpha'(s_1) = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{u(s_2)\mathbf{n}(s_1) - v(s_2)\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

Moltiplichiamo scalarmente il primo e l'ultimo termine per $\alpha'(s_1)$. Ricordando che $\alpha'(s_1) = \mathbf{t}(s_1)$ si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha'(s_1) \cdot \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{u(s_2) \mathbf{n}(s_1) - v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} && \text{perché } \alpha'(s_1) \text{ ha norma } 1 \\ &= \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{u(s_2) \mathbf{n}(s_1) - v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right) && \text{perché } \alpha'(s_1) \text{ è costante} \\ &= - \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{v(s_2) \mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right) && \text{perché } \alpha'(s_1) \text{ è perpendicolare a } \mathbf{n}(s_1) \end{aligned}$$

Usando il teorema sul prodotto dei limiti si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= - \left(\lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{\mathbf{n}(s_2)}{s_2 - s_1} \right) \\ &= - \left(\lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left(\alpha'(s_1) \cdot \frac{\mathbf{n}(s_2) - \mathbf{n}(s_1)}{s_2 - s_1} \right) \\ &= - \left(\lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \alpha'(s_1) \cdot \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \left(\frac{\mathbf{n}(s_2) - \mathbf{n}(s_1)}{s_2 - s_1} \right) \\ &= - \left(\lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) \right) \alpha'(s_1) \cdot \mathbf{n}'(s_1) \end{aligned}$$

dove il secondo uguale risulta nuovamente dal fatto che $\alpha'(s_1) = \mathbf{t}(s_1)$ è perpendicolare a $\mathbf{n}(s_1)$ e il terzo uguale dal fatto che $\alpha'(s_1)$ è costante al variare di s_2 . Dunque

$$\lim_{s_2 \rightarrow s_1} v(s_2) = - \frac{1}{\mathbf{t}(s_1) \cdot \mathbf{n}'(s_1)} = \frac{1}{k(s_1)}$$

dalla seconda formula di Frenet e si ha la tesi: il punto limite è

$$\lim_{s_2 \rightarrow s_1} \alpha(s_2) + v(s_2) \mathbf{n}(s_2) = \alpha(s_1) + \frac{1}{k(s_1)} \mathbf{n}(s_1)$$

e cioè appartiene all'evoluta (ricordare che $\alpha(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono continue).

Esercizio 6.7. (do Carmo, Esercizio 1-5.10) Consideriamo la parametrizzazione

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

- Dimostrare che α è una curva differenziabile.
- Dimostrare che α è regolare per ogni t e che la curvatura $k(t) \neq 0$ per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ e che $k(0) = 0$
- Dimostrare che il limite dei piani osculatori per $t \rightarrow 0^+$ è il piano $y = 0$, mentre il limite dei piani osculatori per $t \rightarrow 0^-$ è il piano

$z = 0$ (questo implica che il vettore normale è discontinuo in $t = 0$ e spiega perché abbiamo escluso i punti in cui $k = 0$).

- d. Dimostrare che la torsione τ può essere estesa per continuità in modo che sia $\tau \equiv 0$, anche se la curva α non è piana.

Soluzione. Questo esercizio spiega l'importanza della condizione di biregolarità. Se la curvatura si annulla in un punto isolato, potremmo pensare di definire il vettore normale in quel punto come il limite dei vettori normali. Questo esempio mostra una curva per cui la funzione "vettore normale" non ammette limite e quindi non si può estendere la definizione di vettore normale per continuità. È però possibile definire la torsione in modo continuo in questi punti ottenendo una curva non piana la cui torsione è sempre nulla (l'equivalenza fra planarità e torsione nulla è stato dimostrato con l'ipotesi di curva biregolare).

- a. La coordinata $x(t) = t$ è evidentemente di classe \mathcal{C}^∞ . Il punto dell'esercizio è calcolare le derivate della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Questa è la coordinata $z(t)$. La $y(t)$ ha gli intervalli scambiati e il calcolo è lo stesso. È chiaro che $f(t)$ è di classe \mathcal{C}^∞ per $t \neq 0$. Inoltre, tutte le derivate *sinistre* di $f(t)$ per $t = 0$ sono nulle. Dobbiamo quindi calcolare le derivate *destr*e. Usiamo un lemma di Analisi, la cui dimostrazione è un esercizio sull'uso del teorema di Lagrange:

Lemma 6.8. Sia $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definita e continua in un intorno di 0. Se f è:

- (1) derivabile in tutti i punti dell'intorno tranne al più in $t = 0$
- (2) esistono i limiti $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t)$ e $\lim_{t \rightarrow 0^-} f'(t)$

allora esistono i limiti

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

e sono uguali ai limiti precedenti.

Dimostrazione. Sia $0 < t < \varepsilon$ e applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[0, t]$. Si ha che

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(u)$$

con $0 < u < t$. Prendendo il limite per $t \rightarrow 0$ si ha il risultato per il limite destro. La dimostrazione per il limite sinistro è identica.

□

Dunque per avere le derivate destre *nulle* in $t = 0$ basta dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n)}(t) = 0$$

Lemma 6.9. Per ogni $n \geq 0$ esiste un polinomio $p_n(T)$ di grado $3n$ tale che per $t > 0$ si ha

$$\left(e^{-1/t^2}\right)^{(n)} = e^{-1/t^2} p_n(1/t)$$

Dimostrazione. La formula vale ovviamente per $n = 0$, con $p_0(T) = 1$.

Supponiamo la formula vera per un valore fissato n . Allora

$$\begin{aligned} \left(e^{-1/t^2}\right)^{(n+1)} &= \left(e^{-1/t^2} p_n(1/t)\right)' \\ &= e^{-1/t^2} (2/t^3) p_n(1/t) - e^{-1/t^2} p_n'(1/t) (1/t^2) \\ &= e^{-1/t^2} \left[(2/t^3) p_n(1/t) - p_n'(1/t) (1/t^2) \right] \\ &= e^{-1/t^2} p_{n+1}(1/t) \end{aligned}$$

dove $p_{n+1}(T) = 2T^3 p_n(T) - T^2 p_n'(T)$ è un polinomio di grado $3n + 3$. □

Dunque

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(e^{-1/t^2}\right)^{(n)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{p_n(T)}{e^{T^2}} = 0$$

e perciò la curva $\alpha(t)$ è di classe \mathcal{C}^∞ su tutto \mathbb{R} .

b. Il vettore tangente è

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1, 0, \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (1, \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (1, 0, 0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e quindi la curva è regolare. Calcolando la derivata seconda, si ha

$$\alpha''(t) = \begin{cases} (0, 0, -2 \frac{3t^2 - 2}{t^6} e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (0, -2 \frac{3t^2 - 2}{t^6} e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e quindi la curvatura non è nulla per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$. Inoltre è chiaro che la curvatura $k(0) = 0$.

c. Il piano osculatore è generato dal vettore tangente e dal vettore normale, o anche dai vettori α' e α'' . Quando sono entrambi non nulli, il piano

osculatore è perpendicolare al vettore $\alpha' \wedge \alpha''$. Per valori di t vicini a 0 si ha:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{cases} (0, 2\frac{3t^2 - 2}{t^6}e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t > 0 \\ (0, 0, -2\frac{3t^2 - 2}{t^6}e^{-1/t^2}) & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

e quindi il piano osculatore è costantemente il piano xz per $t > 0$ e il piano xy per $t < 0$. In particolare, il vettore normale non può essere esteso con continuità per $t = 0$. Notiamo che invece il vettore tangente è continuo (questo è ovvio, la curva è regolare).

d. È chiaro che la curva è contenuta nel piano xz per $t > 0$ e nel piano xy per $t < 0$. Quindi la torsione è identicamente nulla per $t \neq 0$ e può essere estesa con continuità ponendo $\tau(0) = 0$.

Osservazione. Al posto della funzione $f(t)$ come funzione di classe \mathcal{C}^∞ non costante, ma con tutte le infinite derivate nulle in un punto si può usare

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Il **Lemma 6.9** vale con un enunciato simile, ma con un polinomio $p_n(T)$ di grado $2n$. Per maggiori dettagli, vedere il libro di Postnikov, Lemma 1 a pag. 20.

Esercizio 6.10. (do Carmo, Esercizio 1-5.13) Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per arcolunghezza. Supponiamo che $\tau(s) \neq 0$ e $k'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostrare che una condizione necessaria e sufficiente affinché il sostegno $\alpha(I)$ sia contenuto in una sfera è:

$$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{costante}$$

dove $R = 1/k$, $T = 1/\tau$ e R' è la derivata di R rispetto a s .

Soluzione. La soluzione è scritta sul do Carmo. Rivediamo insieme i passaggi, ricordando che la nostra convenzione sulla torsione è all'opposto di quella del do Carmo. L'enunciato non cambia, perché coinvolge solo il quadrato della torsione ma i calcoli sono leggermenti diversi. In particolare poniamo, come il do Carmo, $T = 1/\tau$ dove τ è la torsione come definita nel corso.

necessaria. Possiamo ovviamente supporre che $\alpha(s)$ sia parametrizzata per arcolunghezza. Dall'ipotesi che la curva sia su una sfera e supponendo che il centro della sfera sia l'origine, cosa possibile a meno di una traslazione, si ha che

$$\|\alpha(s)\|^2 = c$$

è costante. Derivando si ottiene

$$2\alpha(s) \cdot \alpha'(s) = 0$$

e cioè $\alpha(s) = A(s) \mathbf{n}(s) + B(s) \mathbf{b}(s)$ (perché è perpendicolare a $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$). Derivando e usando le formule di Frenet si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \alpha' &= A' \mathbf{n} + A \mathbf{n}' + B' \mathbf{b} + B \mathbf{b}' \\ &= A' \mathbf{n} + A(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + B' \mathbf{b} - \tau B \mathbf{n} \\ &= -kA\mathbf{t} + (A' - \tau B)\mathbf{n} + (A\tau + B')\mathbf{b} \end{aligned}$$

e poiché $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ è una base, possiamo uguagliare i coefficienti e otteniamo

$$1 = -kA, \quad 0 = A' - \tau B$$

Ricordando che per ipotesi la torsione è sempre non nulla ricaviamo

$$A = -1/k, \quad B = A'/\tau$$

ottenendo (ricordare che $R = 1/k$, $T = 1/\tau$)

$$A = -R, \quad B = -R'T$$

e finalmente possiamo scrivere:

$$\alpha(s) = -R(s) \mathbf{n}(s) - R'(s) T(s) \mathbf{b}(s)$$

che ha norma costante per ipotesi. Poiché

$$\|\alpha(s)\|^2 = R^2 + (R'T)^2$$

(\mathbf{n} e \mathbf{b} sono parte di una terna ortonormale), si ha la tesi.

sufficiente. Poniamo

$$\beta(s) = \alpha(s) + R(s) \mathbf{n}(s) + R'(s) T(s) \mathbf{b}(s)$$

(di nuovo, attenzione al segno). Da quello che abbiamo visto prima, questo dovrebbe essere costante (è il centro della sfera che stiamo cercando). Senza il suggerimento è difficile che venga in mente di considerare questa espressione. Dopo aver fatto la dimostrazione della necessità si capisce che questa è proprio quello che serve analizzare.

Per dimostrare che è effettivamente costante, deriviamo usando le formule di Frenet per α :

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha' + R' \mathbf{n} + R \mathbf{n}' + (R'T)' \mathbf{b} + R'T \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{t} + R' \mathbf{n} + R(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + (R'T)' \mathbf{b} - R'T \tau \mathbf{n} \\ &= (1 - Rk)\mathbf{t} + (R' - R'T\tau)\mathbf{n} + (R\tau + (R'T)')\mathbf{b} \end{aligned}$$

e ricordando che $R = 1/k$ e $T = 1/\tau$ si ottiene

$$\beta' = (R\tau + (R'T)')\mathbf{b}$$

Usiamo ora l'ipotesi e cioè $R^2 + (R'T)^2 = \text{costante}$. Derivando e ricordando che $T = 1/\tau$:

$$0 = 2RR' + 2(R'T)(R'T)' = \frac{2R'}{\tau} (R\tau + (R'T)')$$

e poiché $\tau \neq 0$ e $k' \neq 0$ (per ipotesi) deve essere $(R\tau + (R'T)') = 0$ e quindi $\beta'(s) \equiv 0$. Dunque $\beta(s) = p_0$ è costante e allora

$$\|\alpha(s) - p_0\|^2 = R^2 + (R'T)^2$$

è costante e cioè $\alpha(s)$ sta su una sfera di centro p_0 .

I teoremi di Fenchel e Milnor

Fino ad ora abbiamo considerato le curve come funzioni definite su un intervallo e cioè abbiamo considerato quelle che più propriamente dovremmo chiamare *archi di curva*. La definizione di curva coinvolge ipotesi di natura *locale*, come l'esistenza di derivate e anche le quantità che abbiamo introdotto, la curvatura e la torsione, sono di natura locale in quanto definite tramite derivate.

Un aspetto interessante della geometria differenziale è vedere come le quantità locali diano informazioni sulla geometria o sulla topologia *globale* della curva, pensata quindi come sottoinsieme dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 o come spazio topologico a se stante.

Sul libro di do Carmo (così come sull'Abate-Tovena e su quasi tutti i libri di geometria differenziale) vi sono alcuni esempi di *teoria globale* delle curve. In generale questi teoremi sono per curve piane e sono di natura geometrica. Per esempio, citiamo qui un paio di questi risultati:

Disuguaglianza Isoperimetrica. *Sia C una curva piana chiusa e semplice di lunghezza ℓ e sia A l'area della regione di cui C è bordo. Allora*

$$4\pi A \leq \ell^2$$

e l'uguaglianza vale se e solo se C è una circonferenza.

Vedi, per esempio, do Carmo, Paragrafo 1.7, Theorem 1 a pag. 34, oppure Abate-Tovena, Complementi al Capitolo 2, Teorema 2.7.3 a pag. 103. Osserviamo solo che una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

- *chiusa* se $I = [a, b]$ è chiuso e limitato e $\alpha(a) = \alpha(b)$

- *semplice* se la funzione α è iniettiva (nel caso di una curva chiusa, gli unici punti ad avere la stessa immagine sono gli estremi a e b)

Questo risultato dice che, a parità di area, la circonferenza è la curva di perimetro *minimo* fra tutte le curve che circondano una regione di area data o equivalentemente che fra tutte le curve di lunghezza fissata la circonferenza è quella che racchiude l'area maggiore. Questo enunciato era ben noto già nell'antichità, come dimostra l'episodio di Didone e la fondazione di Cartagine, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Didone, ma fu dimostrato rigorosamente solo da Jakob Steiner nel 1838. Per maggiori informazioni sulla disuguaglianza isoperimetrica, si può cominciare da Wikipedia, vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Isoperimetric_inequality

Un altro risultato, sempre per curve piane chiuse e semplici, è il cosiddetto *Teorema dei quattro vertici*. In una curva piana, un *vertice* è un punto in cui $k'(t) = 0$ e cioè la curvatura è massima o minima. La parametrizzazione di una curva chiusa ha per dominio un intervallo chiuso e limitato e dunque compatto. Ci sono allora sicuramente almeno *due* vertici, corrispondenti al massimo e al minimo assoluto. Il teorema afferma che in effetti ci sono sempre almeno *quattro* vertici

Teorema dei quattro vertici. *Una curva piana chiusa e semplice ha almeno quattro vertici.*

Vedi, per esempio, do Carmo, Paragrafo 1.7, Theorem 2 a pag. 39, oppure Abate-Tovena, Complementi al Capitolo 2, Teorema 2.6.3 a pag. 98. Sul do Carmo la dimostrazione è solo per curve convesse, sull'Abate-Tovena c'è una dimostrazione che vale per ogni curva, ma è più complicata.

In questo capitolo, che conclude la parte del corso sulle curve, vedremo due teoremi sull'interazione locale-globale di natura un po' diversa e che legano la *curvatura totale* a caratteristiche non geometriche ma piuttosto *topologiche* della curva.

1. Curvatura totale

Iniziamo lo studio definendo gli oggetti che sono coinvolti nei due teoremi che studieremo. Per prima cosa, precisiamo il concetto di curva chiusa *differenziabile*:

Definizione 1.1. Sia $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare parametrizzata per arcolunghezza e sia C la curva determinata da α . La curva C si dice *chiusa* se $\alpha(0) = \alpha(L)$

Notiamo che nei punti 0 e L , gli estremi dell'intervallo di definizione, ci sono solo le derivate destre, rispettivamente sinistre, della funzione α . Dire

che la curva C è differenziabile, significa che

$$\alpha'_+(0) = \alpha'_-(L), \quad \alpha''_+(0) = \alpha''_-(L), \quad \dots \quad \alpha_+^{(n)}(0) = \alpha_-^{(n)}(L), \dots$$

Useremo solo le derivate prime e seconde, quindi potremmo anche solo chiedere le prime due uguaglianze. Osserviamo ancora che:

- Non stiamo supponendo che la curva sia biregolare. Useremo il concetto di curvatura ma non useremo i vettori normale e binormale.
- Poiché la curva è parametrizzata per arcolunghezza, il numero reale L è la lunghezza della curva.

Introduciamo ora la *curvatura totale*. Notiamo che la definizione ha senso sia per curve chiuse che per curve non chiuse. Sia $k(s)$ la funzione curvatura della curva C :

Definizione 1.2. La *curvatura totale* di C è il numero

$$\kappa(C) = \int_0^L k(s) ds$$

dove l'integrale scritto è un integrale ordinario, perché la funzione $k(s)$ è definita sul dominio $[0, L]$.

Osservazione. Poiché le curve che consideriamo sono parametrizzate per arcolunghezza, il vettore tangente ha norma costante e quindi la sua derivata (la curvatura) misura la variazione di direzione del vettore tangente.

Di conseguenza, la curvatura totale è la *variazione totale di direzione del vettore tangente*. La curvatura è sempre *positiva* per definizione (è il modulo del vettore derivata seconda) e questo significa che ogni variazione di direzione contribuisce alla curvatura totale: non ci sono “cancellazioni”, come potremmo pensare considerando una curva il cui vettore tangente oscilla, come per esempio il grafico della funzione seno. La derivata prima (il vettore tangente) segue l'andamento della funzione coseno e la curvatura (la derivata seconda) segue l'andamento della funzione $-\text{seno}$. L'integrale di $-\text{seno}$ fra 0 e 2π è 0, ma la curvatura è il *valore assoluto* e l'integrale di $|\text{seno}|$ (cioè la curvatura totale) è non nullo.

I teoremi che vedremo legano il valore di $\kappa(C)$ con proprietà topologiche della curva C . Per la loro dimostrazione occorrono alcuni semplici fatti sulla teoria delle superfici, che affronteremo in seguito. Però l'unica superficie che considereremo sarà una sfera di raggio 1 e le proprietà che servono sono ben note dalla geometria elementare. In particolare:

- Se P e Q sono due punti sulla sfera, la curva di lunghezza minima che congiunge P e Q è l'arco di cerchio massimo da P a Q , cioè l'arco della circonferenza che si ottiene come intersezione della sfera e del piano passante per i tre punti P , Q e O (= centro della sfera).

- L'area della sfera vale 4π (in generale, l'area di una sfera di raggio R vale $4\pi R^2$).

2. Il teorema di Fenchel

Questo teorema è contenuto nella tesi di dottorato di Werner Fenchel¹, scritta nel 1928 sotto la direzione di Ludwig Bieberbach. Diamo subito l'enunciato:

Teorema 2.1. *Se C è una curva chiusa, allora $\kappa(C) \geq 2\pi$ e l'uguaglianza vale se e solo se C è una curva piana e convessa.*

Dall'interpretazione delle curvatura totale come la variazione totale di direzione del vettore tangente, possiamo enunciare questo teorema come

per avere una curva chiusa bisogna fare almeno un giro

Osserviamo che naturalmente il viceversa non vale: considerando un'elica, basta fare due o più giri e la curvatura totale aumenta senza che l'elica sia una curva chiusa. Quello che dice il teorema è: se la curvatura totale è troppo piccola (meno di 2π) la curva è necessariamente aperta.

Vedremo la dimostrazione della disuguaglianza e della planarità della curva, ma non ci occuperemo della condizione di convessità. Fissiamo le notazioni

$$\begin{aligned} \alpha : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^3 && \text{curva parametrizzata per arcolunghezza} \\ \mathbf{t}(s) &= (t_1(s), t_2(s), t_3(s)) && \text{il vettore tangente, di norma 1} \\ k(s) &= \|\mathbf{t}'(s)\| && \text{la funzione curvatura} \end{aligned}$$

La dimostrazione usa una curva associata alla curva C , l'*indicatrice delle tangenti* Γ definita da $\Gamma(s) = \mathbf{t}(s)$

$$\Gamma : [0, L] \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

e cioè pensiamo il punto finale del vettore tangente $\mathbf{t}(s)$ come punto nello spazio \mathbb{R}^3 . Poiché il vettore tangente ha norma costante 1, l'immagine di questa curva è tutta contenuta nella sfera S^2 di centro l'origine e raggio 1.

Una relazione immediata fra la curva C e la sua indicatrice delle tangenti Γ è:

$$\kappa(C) = \int_0^L k(s) ds = \int_0^L \|\mathbf{t}'(s)\| ds = \ell(\Gamma) = \text{lunghezza di } \Gamma$$

Facciamo un paio di esempi

¹vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Werner_Fenchel per una biografia di Fenchel

Esempio 2.2. Se C è una curva piana, possiamo scrivere $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$ e quindi $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s), 0)$. Perciò Γ è contenuta nell'equatore della sfera S^2 (intersezione della sfera con il piano orizzontale $z = 0$).

Esempio 2.3. Continuando con la terminologia geografica, la sfera S^2 è divisa in due parti dall'equatore: l'emisfero "nord" e l'emisfero "sud". La parte di Γ che sta nell'emisfero nord corrisponde a quando la curva C "sale", la parte che sta nell'emisfero sud corrisponde a quando la curva C "scende" (sale e scende relativamente all'altezza misurata sull'asse z).

Infatti, se il vettore tangente sta nell'emisfero nord, allora punta "all'insù" e cioè la curva sta salendo (la quota z aumenta) e il ragionamento è analogo per l'emisfero sud.

La dimostrazione originale si trova nell'articolo "Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven", apparso sulla rivista *Mathematischen Annalen*, 101 (1929), pp. 238-252. La dimostrazione che vediamo qui è tratta dall'articolo di R. A. Horn dal titolo "On Fenchel's Theorem", pubblicato sulla rivista *American Mathematical Monthly*, vol. 78, No. 4 (Apr. 1971), pp. 380-381. Il teorema di Fenchel è una conseguenza immediata dei due lemmi seguenti:

Lemma A.

- (1) L'indicatrice della tangenti Γ di una curva chiusa C non è contenuta in nessuna semisfera aperta.
- (2) L'indicatrice Γ è contenuta in una semisfera chiusa se e solo se C è piana.

Lemma B. Sia Γ una curva chiusa (qualunque) contenuta nella sfera S^2 di raggio 1.

- (1) Se $\ell(\Gamma) < 2\pi$ allora Γ è contenuta in una semisfera aperta.
- (2) Se $\ell(\Gamma) = 2\pi$ allora Γ è contenuta in una semisfera chiusa.

dove $\ell(\Gamma)$ indica la lunghezza della curva Γ .

Possiamo adesso dare la

Dimostrazione del teorema di Fenchel. Se C è chiusa allora per il punto 1 del Lemma A la sua indicatrice Γ non è contenuta in nessuna semisfera aperta e quindi, per il punto 1 del Lemma B si ha

$$\kappa(C) = \ell(\Gamma) \geq 2\pi$$

e questo dimostra la disuguaglianza.

Per l'uguaglianza, è chiaro che se C è piana e convessa (cioè la regione di cui C è bordo è convessa) allora l'indicatrice Γ è l'equatore percorso una sola volta e quindi $\kappa(C) = 2\pi$.

Viceversa, se $\kappa(C) = 2\pi$ allora $\ell(\Gamma) = 2\pi$ e quindi per il punto 2 del Lemma B l'indicatrice Γ è contenuta in una semisfera chiusa e per il punto 2 del Lemma A la curva C è piana.

Resta da dimostrare che in questo caso C è anche convessa. Non vedremo questa dimostrazione. \square

Per concludere, dimostriamo i due lemmi. Il primo è un semplice calcolo, il secondo è più interessante e richiede un argomento geometrico.

Dimostrazione del Lemma A. Supponiamo che l'indicatrice Γ sia contenuta in una semisfera. A meno di rotazioni, possiamo supporre che Γ sia nell'emisfero nord dato da $z \geq 0$. Allora per la componente $t_3(s)$ del vettore tangente si ha

$$t_3(s) \geq 0, \quad \text{per ogni } s \in [0, L]$$

e integrando:

$$\int_0^L t_3(s) ds = \left(\int_0^L \mathbf{t}(s) ds \right)_3 = (\alpha(L) - \alpha(0))_3 = 0$$

perché la curva è chiusa e quindi $\alpha(0) = \alpha(L)$ (Nota: con $(\dots)_3$ indichiamo la terza componente del vettore tra le parentesi).

Concludiamo che:

(1) $t_3(s)$ non può essere sempre strettamente positivo (altrimenti l'integrale sarebbe strettamente positivo) e quindi Γ non può essere contenuta nella semisfera aperta data dall'emisfero nord senza l'equatore.

(2) abbiamo $t_3(s) \geq 0$, $\int_0^L t_3(s) ds = 0$ e $t_3(s)$ è una funzione *continua*. Questo implica che $t_3(s)$ deve essere identicamente nulla e quindi C giace in un piano orizzontale (la componente $z(s)$ di $\alpha(s)$ ha derivata costantemente nulla e quindi è costante).

\square

Esercizio 2.4. Dimostrare l'affermazione di Analisi utilizzata nella dimostrazione del punto 2: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

- $f(s) \geq 0$ per ogni $s \in [a, b]$
- $\int_a^b f(s) ds = 0$

Allora la funzione f è costantemente nulla.

Vediamo adesso la dimostrazione del Lemma B. Usiamo le stesse notazioni dell'articolo di Horn citato all'inizio del paragrafo.

Dimostrazione del Lemma B. Il punto di partenza è una curva Γ chiusa contenuta nella sfera S^2 . Fissiamo un verso di percorrenza su Γ : tutti gli archi della curva saranno percorsi in questo verso.

Siano P e Q su Γ due punti in modo che la lunghezza dell'arco di curva che va da P a Q sia uguale alla lunghezza dell'arco da Q a P . Per vedere che è possibile, basta scegliere un punto P qualunque. Poiché la lunghezza di Γ è *finita*, basta prendere Q a distanza da P metà della lunghezza di Γ . In questo modo dividiamo Γ in due archi, di uguale lunghezza e scriviamo

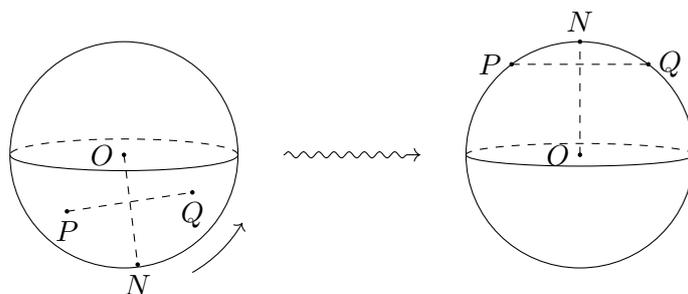
$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

dove $\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma_2) = \frac{1}{2} \ell(\Gamma)$.

Ora ruotiamo la sfera in modo che P e Q siano simmetrici rispetto al polo nord N e cioè si verifica una (e solo una) delle alternative seguenti

- $P = Q = N$ oppure
- P e Q hanno la stessa latitudine e longitudini che differiscono di 180°

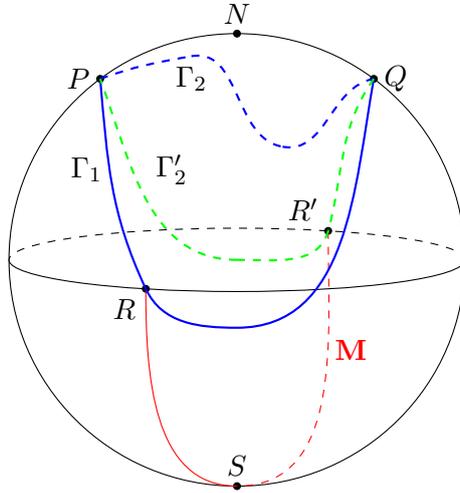
Se $P \neq Q$ basta prendere la corda \overline{PQ} , l'asse \overline{ON} della corda e ruotare in modo da avere N al polo nord, come nella figura seguente:



Se Γ non incontra l'equatore, la tesi è dimostrata, perché sta nell'emisfero nord, dove stanno i punti P e Q .

Se Γ incontra l'equatore, sia R un punto di Γ che sta sull'equatore e possiamo supporre che sia $R \in \Gamma_1$. Consideriamo adesso Γ'_2 la curva simmetrica di Γ_1 rispetto ad N , cioè la curva che si ottiene prendendo per ogni punto di Γ_1 il simmetrico rispetto ad N . Chiamiamo questa nuova curva Γ'_2 perché vogliamo confrontarla con Γ_2 .

Una figura può aiutare a visualizzare la situazione:



Per costruzione si ha $\ell(\Gamma'_2) = \ell(\Gamma_1)$ e poniamo

$$\Gamma' = \Gamma_1 + \Gamma'_2$$

cioè la curva che si ottiene percorrendo Γ_1 da P a Q e poi continuando su Γ'_2 per andare da Q a P . Si ha

$$\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma_1) + \ell(\Gamma'_2) = 2\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma)$$

perché ricordiamo che Γ_1 ha lunghezza metà di quella di Γ . Ma adesso la curva Γ' contiene due punti antipodali: R (l'intersezione di Γ con l'equatore) e il suo simmetrico R' . Scriviamo

$$\Gamma' = \Gamma_{RR'} + \Gamma_{R'R}$$

per indicare i due archi di estremi R e R' che compongono Γ' .

Sia M il meridiano che unisce R e R' e passa per il polo sud S . Si ha:

- (1) $\ell(M) = \pi$ perché è metà di una circonferenza massima
- (2) $\ell(M) \leq \ell(\Gamma_{RR'})$ e $\ell(M) \leq \ell(\Gamma_{R'R})$ perché il meridiano è il cammino più breve sulla sfera che unisce i punti R e R' .

da cui si ha

$$\ell(\Gamma) = \ell(\Gamma') = \ell(\Gamma_{RR'}) + \ell(\Gamma_{R'R}) \geq 2\pi$$

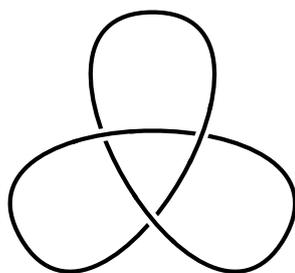
Abbiamo perciò la tesi:

- (1) se $\ell(\Gamma) < 2\pi$, allora Γ non attraversa l'equatore (R non può esistere) e quindi Γ è contenuta nell'emisfero nord *aperto*.
- (2) se $\ell(\Gamma) = 2\pi$, allora Γ tocca l'equatore ma non lo attraversa e quindi Γ è contenuta nell'emisfero nord *chiuso* (compreso l'equatore).

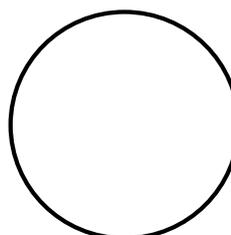
□

3. Il teorema di Milnor

Il teorema di Milnor parla di *nodi*: per esempio



trifoglio



non nodo

La definizione precisa è:

Definizione 3.1. Un *nodo* C è l'immagine omeomorfa di una circonferenza nello spazio e cioè l'immagine di una funzione continua $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

- (1) α è iniettiva su $[0, L)$
- (2) $\alpha(0) = \alpha(L)$
- (3) $\alpha([0, L]) = C$ con la topologia indotta da \mathbb{R}^3 è omeomorfa ad una circonferenza.

Come si vede nel secondo esempio, anche una semplice circonferenza rispetta la definizione di nodo, però è un caso speciale. Possiamo caratterizzarlo in questo modo: denotiamo con D^2 il disco in \mathbb{R}^2 e con S^1 la circonferenza bordo di D^2 .

Definizione 3.2. Un nodo C si dice *nodo banale* o *non nodo* se esiste una funzione continua $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F(S^1) = C$.

Intuitivamente un nodo banale può essere contratto ad un punto senza mai intersecarsi (è abbastanza intuitivo che questo non si può fare con un nodo trifoglio).

La curvatura totale di un nodo banale può essere piccola: nel caso della circonferenza è 2π , che è il minimo possibile per il teorema di Fenchel visto che un nodo è sempre una curva chiusa.

Però per fare un trifoglio sembra necessaria una curvatura totale maggiore di 2π . Il teorema di Milnor afferma proprio questo:

Primo teorema di Milnor. Sia C una curva chiusa in \mathbb{R}^3 . Se C è annodata (cioè non è un nodo banale) allora $\kappa(C) \geq 4\pi$.

Come per il teorema di Fenchel, dall'interpretazione delle curvatura totale come la variazione totale di direzione del vettore tangente, possiamo enunciare questo teorema come

per avere una curva annodata bisogna fare almeno due giri

Osserviamo che anche in questo caso il viceversa non vale: considerando un'elica, basta fare due o più giri e poi tornare al punto di partenza rimanendo all'esterno dell'elica e la curvatura totale aumenta senza che l'elica sia una curva annodata. Quello che dice il teorema è: se la curvatura totale è troppo piccola (meno di 4π) la curva è necessariamente snodata.

Osservazione. Il nome del teorema è dovuto al fatto che questo è il primo teorema dimostrato da John Milnor² quando aveva diciassette anni ed era studente al primo anno di università a Princeton.

La leggenda narra che un giorno Milnor, arrivato a lezione, avesse commentato con un suo compagno sulla grande difficoltà di un esercizio assegnato per quel giorno. Il suo compagno disse che i problemi non erano particolarmente difficili e Milnor rispose indicando il problema sulla curvatura totale dei nodi. A questo punto il compagno, sbalordito, replicò che quello non era un esercizio assegnato, ma una congettura!

Apparentemente Milnor era arrivato in ritardo a lezione la settimana prima e, entrando in classe, aveva visto il problema scritto sulla lavagna e aveva pensato che fosse uno degli esercizi da risolvere per la settimana dopo. Invece era una famosa congettura di Borsuk³, risolta da Milnor in pochi giorni.

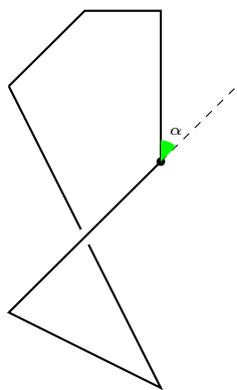
John Milnor è uno dei migliori matematici della seconda metà del Novecento, vincitore della Medaglia Fields nel 1962.

La dimostrazione non è particolarmente difficile, ma molto ingegnosa. Non vediamo tutti i dettagli, ma vogliamo almeno indicare la strategia. La dimostrazione completa, scritta in modo molto comprensibile, si trova nell'articolo di Spivak "A Brief Report of John Milnor's Brief Excursions into Differential Geometry", apparso nel volume *Topological Methods in Modern Mathematics*, Publish or Perish, Inc., 1993, che contiene gli atti di un convegno tenuto a SUNY, Stony Brook nel 1991, in occasione del sessantesimo compleanno di Milnor. La dimostrazione originale di Milnor è invece nell'articolo "On the Total Curvature of Knots", *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 52, No. 2 (Sep. 1950), pp. 248-257. L'articolo è molto chiaro,

²vedi <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Milnor.html> per una biografia di Milnor

³vedi <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Borsuk.html> per una biografia di Karol Borsuk

come tutti gli scritti di Milnor, e certamente vale la pena di leggere almeno l'introduzione. Poi diventa piuttosto difficile perché sono dimostrati in dettaglio i particolari sulla definizione di curvatura totale per i poligoni e come basti dimostrare il teorema per i poligoni, fatti che qui nel seguito sono appena accennati. Anche la parte geometrica è più complicata di come scritto da Spivak perché Milnor dimostra un teorema più generale di quello che abbiamo enunciato.



Milnor comincia con l'osservare che è sufficiente dimostrare il teorema nel caso dei poligoni. In effetti, nell'enunciato del teorema si parla di curvatura totale e quindi serve una curva di classe almeno \mathcal{C}^2 , però è possibile definire il concetto di curvatura totale di un poligono in modo geometrico.

La curvatura è nulla lungo i lati e nei vertici il contributo alla variazione di direzione del vettore tangente è l'*angolo esterno*. Definiamo perciò, per un poligono P

$$\kappa(P) = \sum \text{angoli esterni}$$

Ricordiamo che la formula della lunghezza di una curva regolare come integrale del modulo del vettore tangente è giustificata dal fatto che questa quantità è l'estremo superiore delle lunghezze dei poligoni inscritti nella curva. Allo stesso modo, Milnor dimostra che

Lemma 3.3. *Sia C una curva di classe \mathcal{C}^2 . Allora*

$$\kappa(C) = \int_0^L k(s) ds = \sup\{\kappa(P)\}$$

dove l'estremo superiore è preso sull'insieme di tutti i poligoni P inscritti nella curva C (cioè con i vertici appartenenti alla curva C).

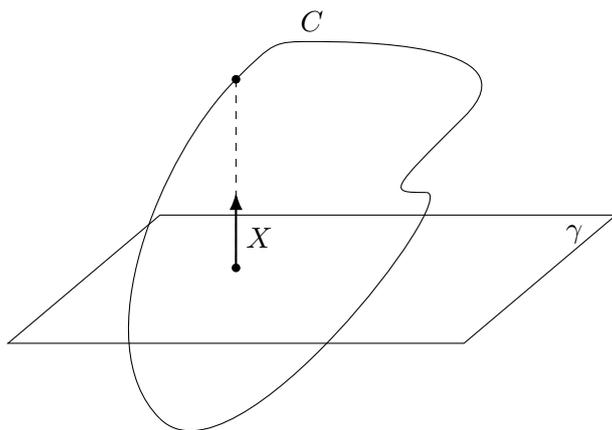
Milnor poi dimostra che se il teorema è vero per tutti i poligoni, allora è vero per tutte le curve. La dimostrazione di questo fatto è piuttosto tecnica e usa dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale che si studiano in corsi di Analisi più avanzati, per esempio nel corso di Analisi Matematica 3 del terzo anno (in particolare, il teorema della convergenza monotona). Per vedere l'argomento, leggere Spivak, seconda metà di pagina 36.

Dopo questi preliminari, d'ora in poi ci occuperemo solo di poligoni. Dobbiamo trovare un modo geometrico per capire quando una curva chiusa è il bordo di un disco in \mathbb{R}^3 . Milnor lo risolve in questo modo: sia γ un

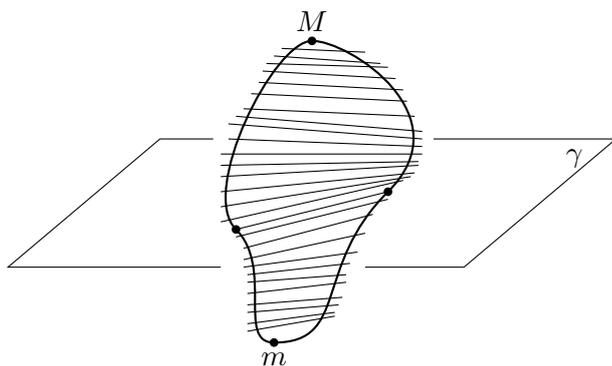
piano, determinato da un vettore perpendicolare X di norma 1. Allora la funzione

$$h_\gamma(s) = C(s) \cdot X$$

è la proiezione di $C(s)$ lungo X e quindi esprime l'altezza dei punti della curva al di sopra (o sotto) il piano γ (vedi figura)



Supponiamo che questa funzione abbia un *unico massimo locale* M e sia m il minimo assoluto. Allora i due archi da m a M sono *strettamente crescenti* perché non ci sono altri massimi locali e quindi ogni piano parallelo a γ , compreso fra le altezze minima e massima, incontra ognuno di questi due archi in un unico punto. Unendo questi punti a due a due con un segmento (parallelo al piano γ !) si ottiene un disco di cui C è il bordo e C non è annodata.



Dunque basta dimostrare

Proposizione 3.4. *Sia C una curva chiusa. Se $\kappa(C) < 4\pi$ allora esiste un vettore X tale che la funzione $h_\gamma(s) = C(s) \cdot X$ ha un unico massimo locale.*

Chi sono i vettori X che determinano i piani? Sono i vettori di norma 1 e quindi corrispondono ai punti della sfera unitaria S^2 . Ne dobbiamo trovare uno con una proprietà speciale e allora Milnor li considera tutti e pone

$$\mu_C(X) = \text{numero di massimi locali di } h_\gamma(s)$$

L'obiettivo è trovare un vettore X per cui $\mu_C(X) = 1$. La funzione $\mu_C(X)$ è definita per tutti i punti della sfera si può integrare. Il risultato dell'integrazione è:

$$(12) \quad \boxed{\int_{S^2} \mu_C(X) dA = 2\kappa(C)}$$

dove l'integrale è un integrale di superficie. Questa formula implica la [Proposizione 3.4](#) e quindi il teorema. Infatti

$$\begin{aligned} \kappa(C) < 4\pi &\implies \int_{S^2} \mu_C(X) dA < 8\pi = 2 \int_{S^2} dA && (2 \text{ volte l'area della sfera}) \\ &\implies \mu_C(X) < 2 \text{ per qualche } X \text{ in } S^2 \end{aligned}$$

perché se fosse $\mu_C(X) \geq 2$ per ogni X , l'integrando sarebbe sempre maggiore o uguale a 2 e quindi l'integrale sarebbe $\geq 8\pi$.

L'ultimo compito è quindi ricavare la [formula \(12\)](#). Il ragionamento di Milnor è puramente geometrico e riguarda l'area dei settori sferici. Per i dettagli, leggere Spivak, dalla fine di pag. 34 a metà pag. 36.

Superfici nello spazio

In questo capitolo iniziamo lo studio delle superfici, cioè oggetti di dimensione 2. Avendo appena visto il caso delle curve, la prima idea è imitarne la definizione.

Purtroppo, per vari motivi questo non è possibile e dovremo seguire una strada diversa. Nel caso delle curve siamo partiti dalla definizione di *curva parametrizzata*. L'ipotesi di regolarità permette di individuare una parametrizzazione particolare, quella per arcolunghezza e ogni curva regolare ammette una parametrizzazione di questo tipo. Questo consente di studiare solo curve parametrizzate per arcolunghezza e la teoria (triedro di Frenet, curvatura, torsione) è particolarmente semplice e completa.

Potremmo quindi definire una superficie parametrizzata come una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenziabile dove questa volta U è un aperto di \mathbb{R}^2 . L'immagine dovrebbe essere il sostegno della superficie e cioè un sottoinsieme dello spazio.

La prima difficoltà nasce dal fatto che non è chiaro quale sia l'analogo dell'arcolunghezza. Su una superficie ci sono molte curve e non si può pensare di avere una parametrizzazione in due variabili che le parametrizzi tutte contemporaneamente per arcolunghezza. Viene quindi a mancare una parametrizzazione standard presente per tutte le superfici. Si potrebbe tentare qualcosa con l'*area* invece della lunghezza, ma è presto chiaro che non è possibile definire una parametrizzazione standard su ogni superficie.

Il problema è però più grave: pensiamo per esempio al caso della sfera (o del toro). Una parametrizzazione iniettiva dà un omeomorfismo fra il dominio e la sua immagine. Ma una sfera è compatta e quindi non può essere omeomorfa ad un aperto del piano.

Questo problema si presenta anche per una curva: una circonferenza non è l'immagine di un intervallo aperto (stesso motivo di compattezza) ma si può ottenere come l'immagine di un intervallo chiuso (unendo gli estremi). In generale potremmo chiamare *curva* tutto ciò che ammette una parametrizzazione regolare, anche se non iniettiva o, meglio ancora, tale che ogni punto ha un intorno che ammette una parametrizzazione regolare iniettiva.

Si può dimostrare, ma non lo faremo in queste dispense, che con questa definizione una curva connessa è molto semplice topologicamente. Ci sono solo due casi: se la curva è compatta allora è omeomorfa ad una circonferenza, se non è compatta è omeomorfa ad un intervallo aperto. Per una dimostrazione si può vedere Abate-Tovena, paragrafo 1.6, pag. 54, oppure il libro di J. Milnor *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Appendix, pag. 55. Milnor considera anche il caso di *varietà con bordo* e quindi trova anche gli intervalli chiusi o semi-chiusi.

Per le superfici, il teorema di classificazione dice che i tipi topologici sono molti di più: già solo nel caso connesso e compatto, ci sono tutte le possibili somme connesse di tori e piani proiettivi, oltre alla sfera. Ci aspettiamo quindi una complicazione maggiore nell'ottenere tutti questi casi da una sola semplice definizione.

Vedremo che l'idea accennata per le curve (ogni punto ha un intorno che ammette una parametrizzazione regolare iniettiva) è quella corretta. Per prima cosa è praticamente la definizione di superficie topologica e bisogna solo fare attenzione a mettere le giuste ipotesi di derivabilità per poter usare gli strumenti dell'Analisi Matematica.

Poiché però le parametrizzazioni saranno funzioni di due variabili, le derivate coinvolte saranno derivate parziali e il controllo delle derivate parziali sulla funzione non è così forte come il controllo della derivata su una funzione di una variabile (una parola sola: niente teorema di Lagrange).

Dunque è necessario scrivere con cure le condizioni di differenziabilità per avere una teoria soddisfacente. Per fortuna, queste ipotesi sono abbastanza naturali e sono verificate in tutti i casi di superfici che si incontrano usualmente.

1. Superfici regolari

In questo primo paragrafo vedremo la definizione precisa di *superficie regolare* e dopo alcuni esempi, vedremo vari teoremi che consentono di produrre facilmente molte superfici regolari.

1.1. La definizione. Enunciamo subito la definizione di superficie regolare e discutiamo in dettaglio il significato delle varie condizioni presenti.

Definizione 1.1. Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice *superficie regolare* se per ogni $p \in S$ esistono

- un intorno V di p in \mathbb{R}^3
- una funzione $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$

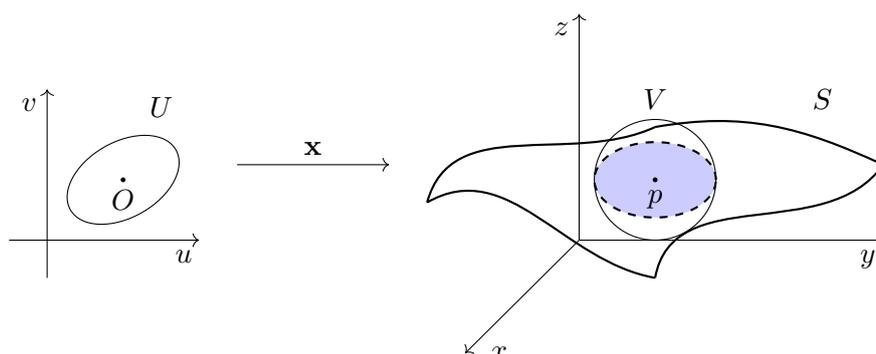
dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un *aperto* e \mathbf{x} è *suriettiva* tali che

- ① la funzione \mathbf{x} è differenziabile e cioè, scrivendo in componenti la funzione

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

le componenti $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ hanno derivate parziali continue di ogni ordine

- ② la funzione \mathbf{x} è un omeomorfismo
- ③ il differenziale $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettivo (e cioè ha rango massimo) per ogni $q \in U$



Nella figura si ha $\mathbf{x}(O) = p$ e la parte colorata è l'intersezione $V \cap S$ e cioè un intorno del punto p sulla superficie S nella topologia di sottospazio indotta dalla topologia di \mathbb{R}^3 .

La definizione è dunque di natura *locale*: una superficie S è un *sottoinsieme* dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 tale che ogni suo punto ha un intorno che soddisfa certe condizioni. Introduciamo subito la terminologia che useremo per riferirci a queste funzioni e intorni.

- \mathbf{x} si dice *parametrizzazione locale*
- \mathbf{x}^{-1} si dice *carta locale*
- $V \cap S = \mathbf{x}(U)$ si dice *intorno coordinato*
- le componenti della funzione \mathbf{x}^{-1} si dicono *coordinate locali*

La terminologia è di natura “geografica”. Il primo esempio è la sfera. Se pensiamo alla sfera come la superficie terrestre, molti dei nomi usati sono

quelli soliti. Per esempio, \mathbf{x}^{-1} associa ad ogni punto della superficie una *coppia di numeri* e cioè le sue coordinate. Nel caso di una carta geografica (= carta locale), queste sono la longitudine e latitudine.

Perciò, per verificare che un *sottoinsieme* S dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 è una superficie, dobbiamo trovare una *famiglia* di parametrizzazioni locali tale che l'unione delle immagini della famiglia sia tutto S . Si dice che la famiglia di parametrizzazioni *copre* la superficie S . Una tale famiglia viene detta *atlante* per ovvi motivi: un atlante è una famiglia di carte geografiche (i fogli dell'atlante) che coprono l'intera superficie terrestre (ogni punto della terra è in qualche foglio dell'atlante).

Leggiamo adesso con attenzione la definizione e vediamo il significato tutte le condizioni.

- *esiste un intorno V di P in \mathbb{R}^3* : possiamo supporre che V sia *aperto* perché per definizione dentro ogni intorno c'è un aperto che contiene il punto (e quindi è esso stesso un intorno). Non mettiamo “ V aperto” nell'ipotesi ma quando sarà conveniente lo prenderemo aperto.
- *una funzione $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$* : come scritto nella condizione ①, possiamo pensare alla parametrizzazione locale come una funzione

$$\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Il punto importante è che il *dominio* è un aperto del piano e l'*immagine* è contenuta in S . La ragione per avere il dominio aperto è per poter fare le derivate, come richiesto dalla successiva condizione ①. Poiché $S \in \mathbb{R}^3$, il sottoinsieme S è uno spazio topologico con la topologia indotta da \mathbb{R}^3 . L'insieme $V \cap S$ è un intorno di P in S in questa topologia. Riprenderemo questo aspetto nella discussione della condizione ②.

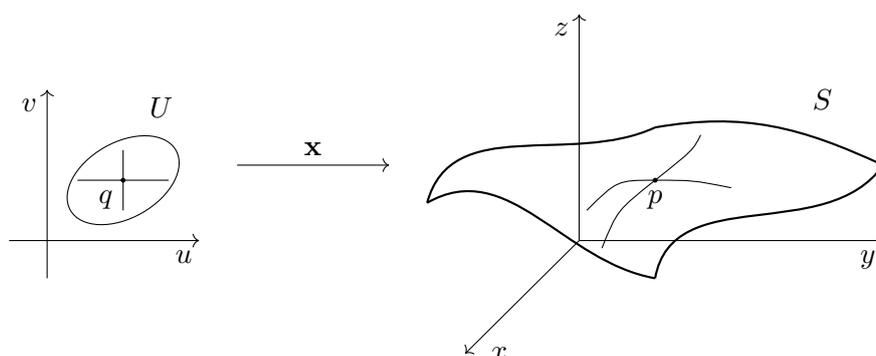
- \mathbf{x} è *suriettiva*: questo dice che $\mathbf{x}(U) = V \cap S$ e cioè l'immagine dell'aperto U è un intorno di P .
- *condizione ①*: questo è chiaro ed è uguale all'analoga ipotesi che abbiamo usato per le curve per dire che la parametrizzazione è differenziabile.
- *condizione ②*: questo è molto importante. Poiché dalle condizioni precedenti sappiamo già che \mathbf{x} è continua e suriettiva, questa ipotesi significa che
 - \mathbf{x} è iniettiva
 - l'inversa \mathbf{x}^{-1} è continua

quindi l'intorno $V \cap S$ è omeomorfo ad un aperto del piano. Questa ipotesi dice che S è una *superficie* e cioè che la dimensione è 2.

La condizione ② implica che una superficie regolare è una *varietà topologica di dimensione 2*: ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un disco aperto del piano (infatti in ogni aperto del piano è contenuto un disco aperto). Notiamo che le ulteriori condizioni topologiche sono automatiche, poiché \mathbb{R}^3 è di Hausdorff e a base numerabile ed entrambe queste proprietà passano ai sottospazi.

- *condizione ③*: il differenziale $d\mathbf{x}_q$ è l'usuale differenziale di una funzione, cioè l'applicazione lineare che ha per matrice, nelle basi canoniche, la matrice Jacobiana.

La condizione ③ è l'analogo della condizione di regolarità per le curve. Per capirla a fondo, scriviamo in dettaglio cosa significa, aiutandoci con un diagramma.



Siano $q = (u_0, v_0)$ e $\mathbf{x}(q) = p$. Il differenziale di \mathbf{x} porta il vettore tangente ad una curva in U nel vettore tangente alla curva immagine mediante \mathbf{x} . Per il punto q passano molte curve ma ci concentriamo su due in particolare, le rette orizzontali e verticali per q .

La retta orizzontale è parametrizzata da $\alpha_{\text{or}}(u) = (u, v_0)$ e il suo vettore tangente in q è $\mathbf{t}_{\text{or}} = (1, 0)$. La parametrizzazione della curva immagine si ottiene componendo: $\beta_{\text{or}}(u) = (\mathbf{x} \circ \alpha_{\text{or}})(u)$ e cioè

$$\beta_{\text{or}}(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

e il vettore tangente si ottiene derivando il parametro u (notiamo che la parametrizzazione non è necessariamente per arcolunghezza, quindi il vettore che troviamo può non avere norma 1) e calcolando in $p = \mathbf{x}(q)$:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

In modo analogo, la retta verticale ha equazione parametrica $\alpha_{\text{ver}}(v) = (u_0, v)$ e vettore tangente in q dato da $\mathbf{t}_{\text{ver}} = (0, 1)$: il vettore tangente alla

curva immagine $\beta_{\text{ver}}(v) = (\mathbf{x} \circ \alpha_{\text{ver}})(v)$ è quindi

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

La base $\{\mathbf{t}_{\text{or}}, \mathbf{t}_{\text{ver}}\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^2 e usando questa base in partenza e la base canonica di \mathbb{R}^3 in arrivo, la matrice del differenziale di \mathbf{x} nel punto q è la matrice Jacobiana:

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix}$$

e dunque la condizione ③ significa

$$\boxed{\text{i vettori } \mathbf{x}_u(q) \text{ e } \mathbf{x}_v(q) \text{ sono linearmente indipendenti per ogni } q \in U}$$

o in modo equivalente

$$\boxed{\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q) \neq 0 \quad \text{per ogni } q \in U}$$

e in particolare i vettori $\mathbf{x}_u(q)$ e $\mathbf{x}_v(q)$ sono entrambi non nulli.

Nel piano, le rette orizzontali e verticali passanti per q sono perpendicolari. Quando guardiamo le immagini di queste rette su S , otteniamo due curve *regolari* (perché i vettori tangenti sono non nulli) che passano per p con *direzioni diverse*: i due vettori tangenti non sono paralleli, anche se non è detto che siano perpendicolari. Queste curve sono dette *curve coordinate*. Per ogni punto p della superficie passa una coppia di curve coordinate, le immagini delle rette orizzontali e verticali passanti per la controimmagine $\mathbf{x}^{-1}(p) = q \in U$.

Ricordiamo che per una curva l'ipotesi che la parametrizzazione $\alpha(t)$ sia regolare significa che il vettore tangente è diverso da 0. Questo dice che il differenziale $d\alpha_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una funzione lineare non nulla e quindi iniettiva. Infatti, una funzione lineare non nulla ha immagine di dimensione almeno 1 e quindi il nucleo ha dimensione al massimo la dimensione del dominio meno 1. Poiché nel caso di una curva il dominio è uno spazio vettoriale di dimensione 1 allora il nucleo ha dimensione al più 0: il nucleo ha quindi dimensione 0 e cioè è banale e la funzione è iniettiva.

Invece, per una funzione lineare da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 , essere non nulla implica solo che il nucleo ha dimensione al massimo 1 ma potrebbe essere non banale e la generalizzazione giusta di regolarità è “differenziale iniettivo” e non solo “differenziale non nullo”.

1.2. La sfera. Il primo esempio che studiamo in dettaglio è la sfera di centro l'origine e raggio 1, cioè poniamo

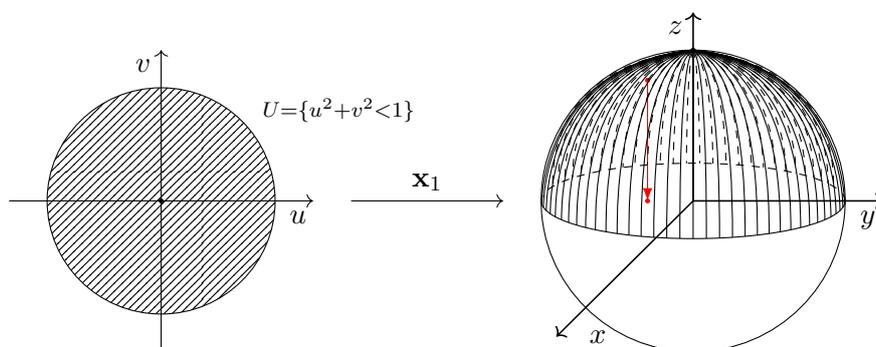
$$S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Da quello che vedremo sarà chiaro che le cose saranno identiche per un qualunque centro e raggio, con le semplici modifiche opportune.

Abbiamo già osservato che non è possibile descrivere tutta la sfera con una sola parametrizzazione. Infatti, se $\mathbf{x} : U \rightarrow S^2$ fosse suriettiva, la condizione ② direbbe che \mathbf{x} è un omeomorfismo e questo è falso perché la sfera è compatta e un aperto del piano non può essere compatto. Se anche ammettessimo domini più generali, per esempio un disco chiuso (dovremmo definire le derivate anche sul bordo, ma per ora non occupiamoci di questo problema), avremmo ancora un omeomorfismo, ma di nuovo è impossibile: il disco è contraibile, la sfera no.

Questo è un tipico esempio del fenomeno descritto nell'introduzione: ci sono motivi *topologici* che impediscono di definire le superfici semplicemente come superfici parametrizzate.

Cominciamo quindi a trovare una parametrizzazione "parziale", che copre cioè solo una parte della sfera.



Sul dominio $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ come nel disegno, definiamo

$$\mathbf{x}_1(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$$

cioè stiamo semplicemente scrivendo $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Verifichiamo le 3 condizioni:

- ① è chiaro che la funzione \mathbf{x}_1 è di classe \mathcal{C}^∞ . Infatti la radice quadrata è infinitamente differenziabile nei punti in cui l'argomento è strettamente maggiore di 0, come capita nel dominio U .
- ② \mathbf{x} è iniettiva (ovvio, le prime due componenti danno l'iniettività) e poiché l'immagine non è nient'altro che il grafico della funzione $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ e cioè l'emisfero nord *aperto*, la funzione

inversa è la proiezione sul piano xy (in rosso nel disegno) e quindi è continua (la proiezione è sempre una funzione continua).

③ I vettori delle derivate parziali

$$(\mathbf{x}_1)_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} \quad (\mathbf{x}_1)_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

sono sempre linearmente indipendenti. Con $*$ indichiamo le derivate parziali della terza componente, che non interessano (e NON calcoliamo) perché l'indipendenza lineare è già garantita dalle derivate parziali delle prime due componenti.

Questa parametrizzazione mostra che tutti i punti dell'emisfero superiore aperto soddisfano la condizione di superficie regolare. Usando la parametrizzazione

$$\mathbf{x}_2(u, v) = \left(u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2} \right)$$

con lo stesso dominio U copriamo l'emisfero inferiore e quindi le condizioni sono soddisfatte per tutti i punti della sfera tranne l'equatore.

Basta allora usare le altre 4 semisfere ottenute dividendo la sfera con i piani xz e yz per ottenere 6 parametrizzazioni locali che coprono l'intera sfera.

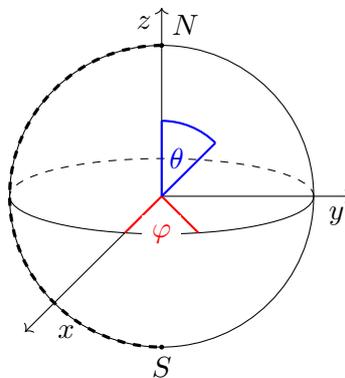
Esercizio 1.2. Scrivere le rimanenti 4 parametrizzazioni. (Suggerimento: il dominio U è lo stesso per tutte).

Possiamo coprire la sfera con un altro sistema di parametrizzazioni: le *coordinate polari*. Usiamo il dominio

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi\}$$

U è un rettangolo aperto e la parametrizzazione è:

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$



Nell'usuale terminologia "geografica", l'angolo φ è la *longitudine* e l'angolo θ la *co-latitudine*. L'immagine è la sfera tranne il meridiano dato da $\varphi = 0$. Anche i poli non sono compresi nell'immagine.

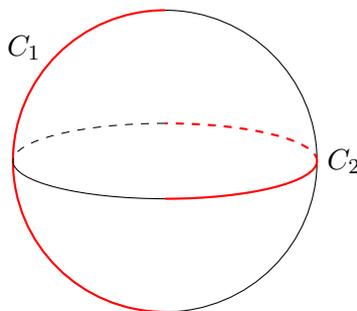
È chiaro che \mathbf{x} è differenziabile (condizione ①). Le derivate parziali sono:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1.3. Calcolare i tre determinanti 2×2 e verificare che non si annullano mai tutti e tre contemporaneamente sul dominio U .

Dall'esercizio abbiamo dunque la condizione ③. È semplice vedere che \mathbf{x} è biunivoca dal rettangolo U alla sfera meno il meridiano (Esercizio!). È invece molto meno evidente che \mathbf{x}^{-1} sia continua e la dimostrazione richiede scrivere con cura le funzioni trigonometriche inverse e usare la loro continuità. Non facciamo qui questo calcolo perché vedremo presto un teorema ([Proposizione 1.9 a pag. 74](#)) che garantisce che sotto ipotesi opportune (qui verificate) la funzione \mathbf{x}^{-1} è continua.

Ruotando adesso le funzioni (cioè scambiando le componenti nella parametrizzazione \mathbf{x} e cambiando anche la fase) si può coprire la sfera tranne metà equatore (vedi figura). Queste due parametrizzazioni insieme coprono la sfera.



Poiché sappiamo che non si può coprire la sfera con una sola parametrizzazione, questo è il numero minimo possibile.

È possibile coprire la sfera con due parametrizzazioni (diverse) anche tramite la *proiezione stereografica*.

Esercizio 1.4. Svolgere l'esercizio 16 a pag. 69 del do Carmo, dove è descritta la costruzione geometrica e sono scritte le equazioni della proiezione stereografica.

Vedremo in seguito altri esempi interessanti di superfici. Però come mostra il caso semplice della sfera, trovare parametrizzazioni e dimostrare

che tutte le condizioni sono soddisfatte è piuttosto laborioso. Passiamo allora a dimostrare alcune proposizioni che garantiscono che, in situazioni opportune, abbiamo una superficie regolare.

1.3. Grafico di una funzione. In questo paragrafo dimostriamo la prima proposizione generale della teoria delle superfici. Questa proposizione tratta il caso “parametrico”.

Proposizione 1.5. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^∞ , dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto. Allora il grafico di f è una superficie regolare:*

$$S = \Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

Dimostrazione. In questo caso basta una sola parametrizzazione per coprire tutta la superficie S . La dimostrazione è la stessa che abbiamo fatto per la prima parametrizzazione della sfera. Scriviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U &\longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Le verifiche della condizione ① e della condizione ③ sono immediate. La condizione ② è anche soddisfatta perché l'inversa $\mathbf{x}^{-1} : S \rightarrow U$ è la proiezione sul piano xy .

Notiamo che questo dice che il dominio U e il grafico S sono omeomorfi. Questo è ben noto (e ovvio). \square

Ricordiamo questa proposizione come:

Proposizione 1. Il grafico di una funzione differenziabile è una superficie regolare.

1.4. Due teoremi di Analisi Matematica. Nel seguito useremo spesso due importanti teoremi di Analisi sulle funzioni di più variabili. Per tutti i dettagli e le dimostrazioni si può vedere un qualunque libro di Analisi. In particolare questi teoremi si trovano nel Capitolo VII del libro V. Barutello, M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi Matematica, Vol. 2*, Apogeo. Per comodità riportiamo qui gli enunciati, copiati dal BCFTV. Questi teoremi sono nel programma dei corsi di Analisi del secondo anno e perciò li considereremo noti.

(VII.63) Teorema di Dini per sistemi. *Sia $\mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con A aperto, una funzione di classe \mathcal{C}^1 e sia $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ tale che*

- (1) $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$
- (2) $\det D_{\mathbf{y}} \mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$

allora esistono $\delta > 0$, $\sigma > 0$ e una funzione $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ definita in $I = B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in $J = B_\sigma(\mathbf{y}_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ tale che

- $\mathbf{y}_0 = \varphi(\mathbf{x}_0)$
- $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ in $I \times J \iff \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$
- la funzione φ è di classe \mathcal{C}^1

Riportiamo qui il seguente testo dal BCFTV, a pagina 369, che spiega esattamente l'uso che faremo di questo teorema.

(VII.64) Osservazione. Il Teorema di Dini¹ viene spesso utilizzato nel modo seguente. Consideriamo ancora $\mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe \mathcal{C}^1 e un punto $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+m}) \in A$ tale che $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Se sappiamo che il rango della matrice jacobiana $J_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}})$ è massimo (cioè uguale a m), allora, grazie al Teorema (IV.64) deduciamo l'esistenza di una sottomatrice di $J_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}})$, quadrata di ordine m , il cui determinante è non nullo. Ciò significa che è possibile individuare m variabili che soddisfano l'ipotesi 2 del teorema. Quindi, se il rango di $J_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}})$ è massimo, m variabili risultano esplicitabili in funzione delle restanti n in un intorno di $\bar{\mathbf{x}}$.

Enunciamo ancora il Teorema di inversione locale, che dà le condizioni affinché una funzione differenziabile ammetta inversa ancora differenziabile. Questa è la generalizzazione al caso delle funzioni di più variabili della formula per la derivata della funzione inversa.

Teorema di inversione locale. Siano $\mathbf{h} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A aperto, una funzione di classe \mathcal{C}^1 e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Sia $\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ l'immagine di \mathbf{x}_0 attraverso \mathbf{h} e supponiamo che

$$\det J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

Allora esistono $\delta, \sigma > 0$ e una unica funzione φ tali che

- $\mathbf{h}(B_\delta(\mathbf{x}_0)) = B_\sigma(\mathbf{y}_0)$
- $\varphi : B_\sigma(\mathbf{y}_0) \rightarrow B_\delta(\mathbf{x}_0)$ è di classe \mathcal{C}^1 in $B_\sigma(\mathbf{y}_0)$
- $\varphi(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{h}(\varphi(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{y} \in B_\sigma(\mathbf{y}_0)$
- $J_\varphi(\mathbf{y}_0) = (J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0))^{-1}$

Per concludere, osserviamo che le ipotesi di questi teoremi richiedono che le funzioni date siano di classe \mathcal{C}^1 e le conclusioni danno l'esistenza di altre funzioni, sempre di classe \mathcal{C}^1 . Questo perché di solito in Analisi si

¹vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dini/> per una biografia di Ulisse Dini. Il teorema è spesso chiamato "teorema del Dini", utilizzando l'articolo tipico in Toscana davanti ai cognomi. A Ulisse Dini è intitolato il Dipartimento di Matematica dell'Università di Firenze.

cerca di usare ipotesi minime di differenziabilità per avere teoremi di vasta applicazione.

Analizzando le dimostrazioni è però immediato osservare che se le funzioni nelle ipotesi sono di classe \mathcal{C}^∞ allora anche le funzioni che si ottengono sono di classe \mathcal{C}^∞ . La dimostrazione di questa affermazione segue da un ragionamento simile a quello fatto nella [Proposizione 1.1.10](#), anzi è proprio lo stesso: per avere la derivata di un certo ordine occorre che la funzione di partenza abbia derivate di quell'ordine e certe quantità siano diverse da 0. Le ipotesi contengono la condizione “diverso da 0” (per funzioni di più variabili, sono opportuni determinanti che devono essere diversi da 0) e quindi, aumentando l'ordine di derivabilità delle funzioni in ipotesi, si ottengono le corrispondenti proprietà di derivabilità nella tesi.

Notiamo ancora che in molti libri, specialmente in inglese, il Teorema del Dini (d'ora in poi scriveremo sempre Teorema *del* Dini) viene chiamato *Implicit Function Theorem* e cioè Teorema della funzione implicita, che descrive esattamente il suo contenuto.

1.5. Superfici di livello. Dopo questi preliminari di Analisi, trattiamo ora il caso “cartesiano” e cioè un sottoinsieme dello spazio dato come luogo di zeri di una funzione. Ricordiamo alcune definizioni.

Definizione 1.6. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile e sia $p \in \mathbb{R}^n$.

- p è un *punto critico* se il differenziale $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ non è suriettivo
- se p è un punto critico allora $f(p) \in \mathbb{R}^m$ è detto *valore critico*
- se $a \in \mathbb{R}^m$ non è un valore critico si dice che a è un *valore regolare*

Osserviamo che con questa definizione, se a non è nell'immagine di f allora è automaticamente un valore regolare. Questo è corretto, anche se a noi interesseranno solo valori regolari che appartengono all'immagine della funzione.

L'unico caso che consideriamo è quello di una funzione

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

In questo caso il differenziale in un punto $p \in U$ è data da una matrice Jacobiana di tipo 1×3

$$df_p = [f_x(p) \ f_y(p) \ f_z(p)]$$

e poiché il codominio del differenziale ha dimensione 1, l'unico modo per essere non suriettivo è essere nullo. Dunque

$$p \text{ critico} \iff f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0$$

La proposizione che vogliamo è una conseguenza immediata del Teorema del Dini, usando il ragionamento fatto nell'[Osservazione VII.64](#).

Proposizione 1.7. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e sia $a \in f(U)$ un valore regolare. Allora la controimmagine $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare.*

La superficie $f^{-1}(a)$ è la *superficie di livello a* . Scrivendo la funzione $g = f - f(a)$ si ha che $g^{-1}(0) = f^{-1}(a)$ e quindi la superficie regolare è descritta come il luogo di zeri di g .

Tipico esempio di applicazione di questo teorema è dato dalle quadriche non singolari, che sono tutte il luogo di zeri di una funzione che ha 0 come valore regolare. Per esempio, ellissoidi, iperboloidi, . . . , sono tutte superfici regolari.

Dimostrazione. Poniamo $S = f^{-1}(a)$. Per dimostrare che S è una superficie regolare dobbiamo trovare una parametrizzazione locale per ogni punto $p \in S$.

Fissiamo dunque $p \in S$. Poiché a è un valore regolare, il punto p non è un punto critico e quindi almeno una delle tre derivate parziali è diversa da 0. A meno di rinominare le variabili, possiamo supporre

$$f_z(p) \neq 0$$

Siamo esattamente nelle condizioni del Teorema del Dini, con $n = 2$ e $m = 1$: poiché il determinante Jacobiano rispetto alla variabile z è diverso da 0, possiamo esplicitare z in funzione di x, y con una funzione differenziabile in un intorno di p . Scriviamo questa funzione

$$z = \varphi(x, y)$$

Dal Teorema del Dini si ha che (con le notazioni attuali)

$$f(x, y, z) = a \iff z = \varphi(x, y)$$

Dunque, in un intorno di p la superficie di livello a è il grafico della funzione differenziabile φ e dunque, per la Proposizione 1, è una superficie regolare. \square

Osservazione. Sul do Carmo la dimostrazione di questa proposizione sembra ben più complicata perché è fatta senza citare il Teorema del Dini, ma ridimostrandolo in questo caso particolare come conseguenza del Teorema di inversione locale.

In effetti il teorema del Dini e il teorema di Inversione Locale sono equivalenti e la scelta di quale dimostrare per primo dipende dai gusti dell'autore. Sul BCFTV viene dimostrato il teorema del Dini e poi viene dedotto come conseguenza il teorema di inversione locale (BCFTV, Esercizio 43 a pag. 386).

do Carmo invece rimanda ad un libro di Analisi (R. C. Buck, Advanced Calculus) in cui prima si dimostra il teorema di inversione locale e da questo

si deduce il teorema della funzione implicita. Sul do Carmo i fatti fondamentali di Analisi sono raccolti nell'Appendice al Capitolo 2 da pag. 120 a pag. 135. Non c'è bisogno di leggere questa appendice perché tutti gli argomenti trattati sono già stati fatti nei corsi di Analisi.

Ricordiamo questa proposizione come:

Proposizione 2. La superficie di livello di un valore regolare è una superficie regolare.

1.6. Superfici regolari come grafici locali. La [Proposizione 1](#) dice che ogni grafico è una superficie regolare. Naturalmente il viceversa non può essere vero: basta pensare alla superficie della sfera che non è il grafico di nessuna funzione di due variabili. Però la prima descrizione della sfera come superficie regolare si ottiene proprio rappresentando la sfera come l'unione di grafici di funzioni, le 6 parametrizzazioni del tipo $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.

Dunque una sfera è "localmente" un grafico, anche se non globalmente. La prossima proposizione dice che questo è vero per ogni superficie.

Proposizione 1.8. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Allora esiste un intorno $V \subseteq S$ di p in S tale che V è il grafico di una funzione di classe \mathcal{C}^∞ di una delle seguenti forme

$$z = f(x, y) \quad \text{oppure} \quad y = g(x, z) \quad \text{oppure} \quad x = h(y, z)$$

L'enunciato dice quindi di più: è sempre possibile proiettare una superficie su uno dei tre piani coordinati e ottenere il grafico di una funzione.

Dimostrazione. Per $p \in S$, scegliamo un intorno coordinato e una parametrizzazione regolare $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

e sia $p = \mathbf{x}(q)$. Poiché la parametrizzazione \mathbf{x} è regolare, uno dei tre determinanti della matrice Jacobiana è diverso da 0 in $q \in U$:

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{bmatrix}$$

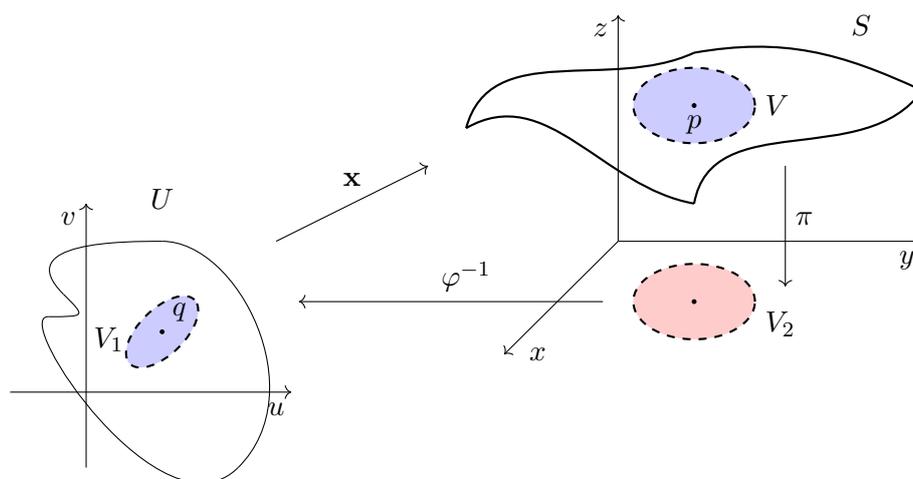
e possiamo supporre che sia

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u(q)y_v(q) - x_v(q)y_u(q) \neq 0$$

Sia allora $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proiezione $\pi(x, y, z) = (x, y)$ e sia

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

e cioè $\varphi = \pi \circ \mathbf{x}$ (vedi figura).



Calcolando il differenziale di φ si ha

$$d\varphi_q = \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{bmatrix}$$

e quindi, per il teorema della funzione inversa, esiste una funzione inversa differenziabile $\varphi^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ dove V_2 è un intorno di $\varphi(q) = \pi(p)$ e V_1 è un intorno di q .

Poiché \mathbf{x} è un *omeomorfismo* (dalla definizione di parametrizzazione regolare), l'immagine $V = \mathbf{x}(V_1)$ è un intorno di p . Basta allora porre

$$f(x, y) = (z \circ \varphi^{-1}) : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

e l'intorno V di p dentro la superficie S è il grafico della funzione $z = f(x, y)$. \square

Anche questa volta, ricordiamo la proposizione come:

Proposizione 3. Una superficie regolare è localmente un grafico.

Dunque per questioni di carattere locale, basta trattare il caso dei grafici di funzione. Non sarà così per questioni di natura globale, come l'orientazione.

Notiamo anche che se la superficie è data in forma cartesiana (superficie di livello di un valore regolare), questa proposizione è semplicemente il teorema del Dini.

Un altro modo di capire la Proposizione 3 è che, data una *qualunque* parametrizzazione regolare, possiamo ottenerne un'altra del tipo “grafico”, scegliendo in modo opportuno il sistema di coordinate e anzi, almeno uno dei piani coordinati del sistema originale va già bene come dominio per le variabili indipendenti.

Concludiamo questa parte introduttiva sulle superfici con una proprietà già annunciata: a volte, per dimostrare che una parametrizzazione è regolare, basta verificare solo le condizioni ① e ③.

Proposizione 1.9. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Sia*

$$\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

con $p \in \mathbf{x}(U)$ e \mathbf{x} soddisfa le condizioni ① e ③ della definizione di parametrizzazione.

Supponiamo che \mathbf{x} sia iniettiva. Allora \mathbf{x}^{-1} è continua.

Dunque, se sappiamo già che S è una superficie regolare, allora la condizione più delicata per essere parametrizzazione regolare è in realtà conseguenza delle altre ipotesi.

Per esempio, poiché la sfera è una superficie regolare (come abbiamo dimostrato usando le parametrizzazioni tipo “grafico”), allora le coordinate polari sono parametrizzazioni locali: la continuità dell'inversa è automatica.

Notiamo che NON è vero che la condizione ② è sovrabbondante. Solo se abbiamo già dimostrato che S è una superficie regolare possiamo controllare che *un'altra* funzione sia una parametrizzazione locale verificando per essa solo le condizioni ① e ③.

Dimostrazione. Facciamo riferimento alla figura della dimostrazione precedente e usiamo le stesse notazioni. Sia

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

la funzione che stiamo considerando. La funzione \mathbf{x} è differenziabile per la condizione ① e il rango della matrice Jacobiana 2 per la condizione ③. Per la [Proposizione 1.8](#) appena dimostrata, sappiamo che S è localmente un grafico vicino a p e, a meno di rinominare le variabili, possiamo supporre che sia il grafico di una funzione del tipo $z = f(x, y)$. Poiché l'immagine della funzione \mathbf{x} è contenuta in S , deve essere

$$z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

e dunque la terza riga della matrice Jacobiana di \mathbf{x} è combinazione lineare delle prime due. Poiché abbiamo supposto che il rango di $d\mathbf{x}$ sia 2 (condizione ③), le prime due righe devono essere linearmente indipendenti e cioè

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u(q)y_v(q) - x_v(q)y_u(q) \neq 0$$

Sia allora $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proiezione $\pi(x, y, z) = (x, y)$ e sia $\varphi = \pi \circ \mathbf{x}$.

Come prima,

$$\det(d\varphi_q) = \det \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{bmatrix} \neq 0$$

e quindi, per il teorema della funzione inversa, esiste una funzione inversa differenziabile $\varphi^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ dove V_2 è un intorno di $\varphi(q) = \pi(p)$ e V_1 è un intorno di q .

Dunque $\varphi : V_2 \rightarrow V_1$ è un *omeomorfismo*. Se \mathbf{x} è iniettiva e poniamo $V = \mathbf{x}(V_1)$ allora su V esiste l'inversa

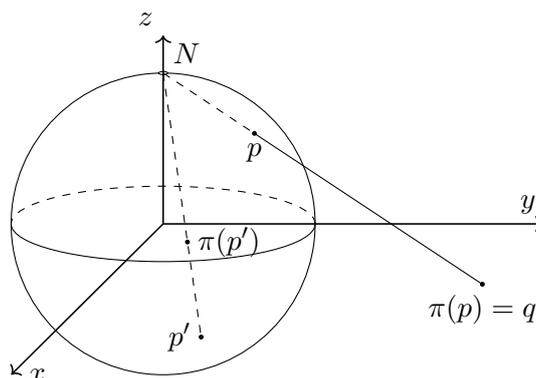
$$\mathbf{x}^{-1} : V \rightarrow V_1$$

e su questo dominio

$$\mathbf{x}^{-1} = \varphi^{-1} \circ \pi = (\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi$$

Poiché sia π che φ^{-1} sono continue, concludiamo che \mathbf{x}^{-1} è continua. \square

Esempio 1.10. La proiezione stereografica. Come esempio di ciò che abbiamo visto finora, svolgiamo in dettaglio l'[Esercizio 1.4](#) (do Carmo, esercizio 16 a pag. 69).



Come detto nel testo, la mappa che dobbiamo scrivere è un sistema di coordinate sulla sfera meno il polo nord

$$\pi : S^2 - N \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ottenuta proiettando ogni punto p della sfera sul punto $\pi(p)$ che si ottiene intersecando la retta Np con il piano xy . L'inversa di questa mappa è una

parametrizzazione locale, che manda l'aperto $U = \mathbb{R}^2$ sulla sfera meno un punto. È chiaro che l'analoga proiezione dal polo sud dà una seconda carta locale e le due insieme danno la struttura di superficie regolare su S^2 .

Per qualche motivo, do Carmo posiziona la sfera appoggiata sul piano xy mentre per ragioni di simmetria è meglio mettere la sfera con il centro nell'origine e proiettare sempre sul piano xy , come nella figura qui sopra.

Quindi la mappa che scriveremo non è la stessa che si trova sul do Carmo. Per esercizio, posizionare la sfera come detto da do Carmo e verificare che la risposta di pag. 69 del do Carmo è corretta.

Per il resto di questo esempio scriviamo:

$$S^2 = \text{sfera di centro } O \text{ e raggio } 1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Il polo nord è $N = (0, 0, 1)$. Scriviamo direttamente la mappa inversa π^{-1} e sia quindi $q = (u, v, 0)$ un punto del piano $z = 0$. Dobbiamo

- (1) tracciare la retta Nq
- (2) intersecare la retta con la sfera

Il punto di intersezione sarà $\pi^{-1}(q)$. Scritta la mappa, verificheremo le condizioni per un parametrizzazione locale. Poiché dobbiamo intersecare due oggetti (retta e sfera) è bene averne uno in forma parametrica e l'altro in forma cartesiana. La sfera è già data in forma cartesiana e quindi scriviamo la retta in forma parametrica, usando il parametro reale t .

L'equazione della retta (in forma vettoriale) è: $\ell : N + t(q - N)$ e cioè:

$$\ell : \begin{cases} x = 0 & + tu \\ y = 0 & + tv \\ z = 1 & - t \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della sfera si ha

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (1 - t)^2 = 1$$

da cui si ricavano le due soluzioni: $t = 0$ (che corrisponde al polo nord) e

$$t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$$

Sostituiamo adesso nelle equazioni parametriche della retta per trovare il punto di intersezione. Si ottiene

$$p = \pi^{-1}(q) = \mathbf{x}_N(u, v) = \begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases}$$

La mappa \mathbf{x}_N è chiaramente di classe C^∞ su tutto \mathbb{R}^2 (condizione ①). Dopo aver calcolato le derivate parziali e la matrice Jacobiana (esercizio!!), si trova che i tre minori 2×2 hanno determinante

$$J_{xy} = -4 \frac{u^2 + v^2 - 1}{(u^2 + v^2 + 1)^3}, \quad J_{xz} = 8 \frac{v}{(u^2 + v^2 + 1)^3}, \quad J_{yz} = -8 \frac{u}{(u^2 + v^2 + 1)^3}$$

Si ha $J_{xz} = J_{yz} = 0 \iff u = v = 0$ e in questo punto $J_{xy} \neq 0$. Dunque almeno uno dei determinanti è sempre diverso da zero e quindi il rango è 2 (condizione ③).

Dalla descrizione geometrica è chiaro che la funzione \mathbf{x}_N è iniettiva e quindi per la [Proposizione 1.9](#) l'inversa è continua ed è soddisfatta anche la condizione ②.

Esercizio 1.11. Scrivere l'analogia mappa \mathbf{x}_S proiettando dal polo sud. Inoltre:

- Per entrambe le proiezioni, i punti sulla circonferenza unitaria nel piano xy (l'equatore) sono punti fissi.
- La proiezione dal polo nord manda l'interno del disco unitario nell'emisfero sud e l'esterno nell'emisfero nord (tranne il polo nord, ovviamente)
- La proiezione dal polo sud scambia interno ed esterno nella frase precedente.

2. Funzioni differenziabili

Dopo aver introdotto gli oggetti di studio, le superfici regolari, vogliamo ora definire quali sono le funzioni fra questi oggetti: le *funzioni differenziabili* fra superfici. In questo paragrafo, dopo aver visto la definizione di funzione differenziabile, vedremo uno dei concetti fondamentali nello studio delle superfici: i *cambiamenti di coordinate*.

2.1. La definizione di funzione differenziabile. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione. Cominciamo con il caso di funzioni a valori scalari. Per funzioni a valori vettoriali andrà bene la stessa definizione applicata a tutte le componenti scalari della funzione.

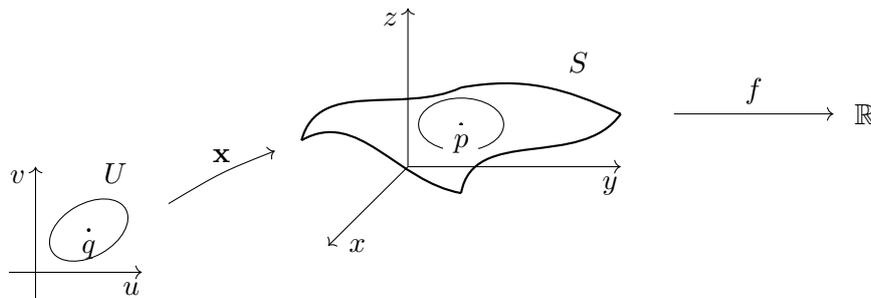
Per prima cosa, f deve essere continua: questo non è un problema perché S è uno spazio topologico come sottospazio di \mathbb{R}^3 e quindi sappiamo cosa vuol dire essere continua.

Cosa vuol dire differenziabile? Anche se stiamo solo cercando di definire le *derivate parziali* abbiamo comunque bisogno di un intorno del punto in

cui deriviamo e dentro una superficie non ci può essere nessun aperto di \mathbb{R}^3 : ogni punto di S ha un intorno omeomorfo ad un aperto del piano e, per il Teorema di Invarianza della Dimensione, questi intorni non sono omeomorfi ad aperti di \mathbb{R}^3 .

Inoltre, una superficie è un oggetto di dimensione due e quindi dovremmo poter fare *due* derivate parziali e non tre. Vogliamo quindi descrivere delle variabili indipendenti sulla superficie e fare le derivate rispetto a queste. Abbiamo già visto le *curve coordinate* e cioè le immagini delle rette orizzontali e verticali nel dominio U di una parametrizzazione. Queste linee sono come le coordinate nel piano.

Allora possiamo pensare di utilizzare le parametrizzazioni locali per “trasportare” le variabili indipendenti dal piano alla superficie. Facciamo un disegno:



Se $p \in S$ è un punto, per definizione di superficie regolare c'è una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ con $p \in \mathbf{x}(U)$. Possiamo allora considerare la composizione

$$(f \circ \mathbf{x}) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

e questa è una funzione da un aperto U del piano a valori reali e quindi sappiamo cosa vuole dire differenziabile. Diamo quindi la definizione:

Definizione 2.1. Sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $p \in S$. Si dice che f è *differenziabile in p* se esiste una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \rightarrow S$, con $p = \mathbf{x}(q) \in \mathbf{x}(U)$ e la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile in q .

Questa definizione è quella *corretta*, però così come è data non ha molto senso. Richiede infatti l'esistenza di *una* parametrizzazione con opportune proprietà. Cosa succede se troviamo una parametrizzazione \mathbf{x}_1 per cui $(f \circ \mathbf{x}_1)$ *non* è differenziabile? Per quello che sappiamo, potrebbe esistere un'altra parametrizzazione \mathbf{x}_2 per cui la composizione è differenziabile e quindi la funzione è differenziabile, oppure la composizione non è mai differenziabile e quindi la funzione non è differenziabile.

Consideriamo il diagramma di mappe

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\mathbf{x}_1} & S \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ & \nearrow \mathbf{x}_2 & \\ U_2 & & \end{array}$$

Nella situazione illustrata qui sopra potrebbe essere $(f \circ \mathbf{x}_1)$ non differenziabile mentre $(f \circ \mathbf{x}_2)$ è differenziabile. Questo renderebbe la definizione priva di senso, perché la differenziabilità della funzione deve dipendere solo da f e dalla superficie dominio S e non da dati aggiuntivi come la parametrizzazione.

Dobbiamo perciò dimostrare che questa situazione non si può verificare e cioè che o *per tutte* le parametrizzazioni la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile oppure *per nessuna* parametrizzazione la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile.

Questo fatto è vero ed è una conseguenza immediata della prossima proposizione, che è più precisa e tratta i cambiamenti di coordinate.

Proposizione 2.2 (cambiamento di coordinate). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Siano*

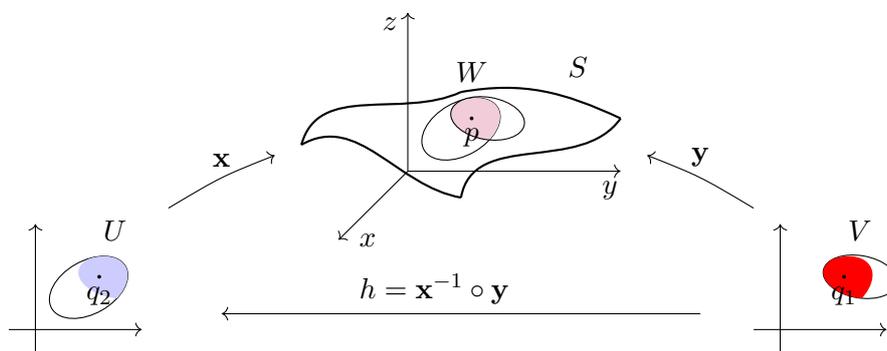
$$\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

due parametrizzazioni locali tali che $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Allora il cambiamento di coordinate

$$h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$$

è un diffeomorfismo.

Ricordiamo che *diffeomorfismo* vuol dire funzione differenziabile, biunivoca, con inversa differenziabile.



Il disegno illustra la situazione: abbiamo due parametrizzazioni e su un opportuno dominio, quello indicato nell'enunciato del teorema (in rosso nella figura), è possibile comporre una con l'inversa dell'altra. Osserviamo che

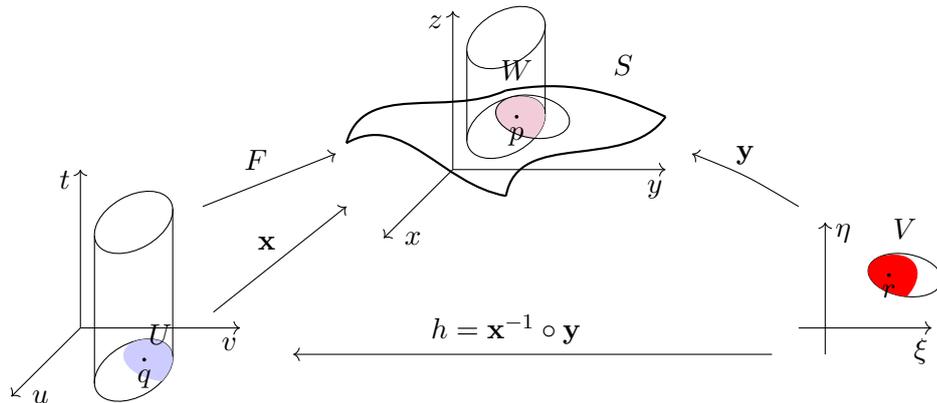
- (1) $h : (\text{aperto di } \mathbb{R}^2) \rightarrow (\text{aperto di } \mathbb{R}^2)$ e quindi sappiamo cosa vuole dire che h è differenziabile: questo è proprio il caso definito e studiato in Analisi
- (2) se $\mathbf{y}(q_1) = p = \mathbf{x}(q_2)$ allora $h(q_1) = q_2$ e questo è proprio il “cambiamento di coordinate”. Infatti (q_1) sono le coordinate del punto $p \in S$ nel sistema \mathbf{y} mentre (q_2) sono le coordinate dello stesso punto $p \in S$ nel sistema \mathbf{x}

Dunque la proposizione dice che questi cambiamenti sono diffeomorfismi. Nel caso delle superfici topologiche, è immediato dalla definizione che i cambiamenti di coordinate sono omeomorfismi e non si può dire di più perché abbiamo solo una struttura di spazio topologico, che permette di parlare di continuità ma non di differenziabilità.

In questo caso, la definizione che abbiamo dato di superficie regolare è forte a sufficienza per implicare che quando cambiamo coordinate, lo facciamo automaticamente in modo differenziabile. Dunque la nozione di differenziabilità è ben definita e dipende solo dalla superficie e non dalla particolare parametrizzazione scelta.

Il problema principale della dimostrazione che vedremo è che la funzione \mathbf{x}^{-1} è definita solo su un aperto di S che *non è aperto* in \mathbb{R}^3 e quindi non sappiamo bene cosa voglia dire differenziabile e non possiamo usare nessuno dei teoremi sulle funzioni differenziabili che conosciamo dall'Analisi. La dimostrazione affronta proprio questo problema: con una costruzione opportuna troveremo un'estensione di \mathbf{x}^{-1} ad un aperto di \mathbb{R}^3 e potremo concludere usando il teorema sulla composizione di funzioni differenziabili.

Dimostrazione. La figura seguente usa le stesse notazioni del do Carmo:



le coordinate si chiamano (ξ, η) per l'aperto V e (u, v) per l'aperto U . L'aperto U è disegnato nel piano $t = 0$ di uno spazio \mathbb{R}^3 . Introdurremo la

coordinata t nel corso della dimostrazione.

La prima cosa che osserviamo è che h è un *omeomorfismo*, perché sia \mathbf{x} che \mathbf{y} sono omeomorfismi. Dimostriamo adesso che h è differenziabile. La dimostrazione del fatto che h^{-1} è differenziabile è la stessa, scambiando i ruoli di \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Sia $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$ tale che $\mathbf{y}(r) = p = \mathbf{x}(q)$ di modo che $q = h(r)$. Per ipotesi, \mathbf{x} è una parametrizzazione e quindi il differenziale ha rango 2. Posto

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

possiamo supporre che sia

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$$

Definiamo allora

$$\begin{aligned} F : U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t) \end{aligned}$$

e cioè ogni sezione orizzontale del cilindro $U \times \mathbb{R}$ viene mandata in una “traslata verticale” della superficie S : questo è l’effetto di sommare la quantità t alla componente $z(u, v)$.

La funzione che stiamo cercando di costruire sarà l’inversa di questa funzione F . Dobbiamo dunque dimostrare che F è invertibile con inversa differenziabile. Per prima cosa osserviamo che

- a) F è differenziabile
- b) $F|_{U \times \{0\}} = \mathbf{x}$

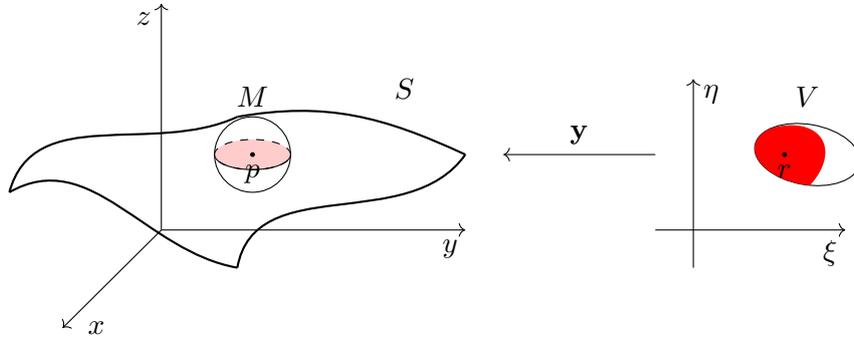
La a) è vera perché tutto ciò che interviene nella definizione di F è differenziabile (x, y, z per ipotesi sono differenziabili, in quanto le componenti della parametrizzazione \mathbf{x} , e poi facciamo solo una somma). Per la b), basta porre $t = 0$.

Dunque F è un’estensione della funzione \mathbf{x} ad un aperto di \mathbb{R}^3 . Calcoliamo il differenziale

$$\text{c) } dF_{(q,0)} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \\ z_u & z_v & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{la terza colonna è la derivata parziale rispetto a } t)$$

e quindi $\det(dF_{(q,0)}) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$.

Allora, per il teorema della funzione inversa, esiste un intorno M del punto $F(q, 0) = \mathbf{x}(q) \in \mathbb{R}^3$ su cui F è invertibile, con inversa F^{-1} differenziabile.



Questa è la parte “destra” del diagramma iniziale. Il punto fondamentale è che M è un intorno del punto p in \mathbb{R}^3 e cioè contiene una palla 3-dimensionale aperta di centro p . La funzione F^{-1} è definita su un *aperto* di \mathbb{R}^3 quindi è differenziabile nel senso usuale.

Finora abbiamo usato solo le proprietà della parametrizzazione \mathbf{x} . Adesso usiamo la continuità di \mathbf{y} : poiché $\mathbf{y}(r) = p = \mathbf{x}(q)$, esiste un intorno N di $r \in \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbf{y}(N) \subseteq M$.

Possiamo dunque scrivere:

$$h|_N = (\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})|_N = (F^{-1} \circ \mathbf{y})|_N$$

perché l'immagine di \mathbf{y} è in $S \cap M$ e quindi \mathbf{x} è il “livello 0” di F .

Quello che abbiamo ottenuto è che F^{-1} è proprio l'estensione di \mathbf{x}^{-1} da un aperto sulla superficie S ad un aperto di \mathbb{R}^3 .

Abbiamo finito: \mathbf{y} è differenziabile per ipotesi, F^{-1} è differenziabile su un intorno aperto di $p = \mathbf{y}(r)$ e dunque la composizione è differenziabile in un intorno del punto r . Poiché il punto r è stato scelto arbitrariamente in $\mathbf{y}^{-1}(W)$, la funzione h è differenziabile in tutti i punti del suo dominio $\mathbf{y}^{-1}(W)$ \square

Corollario 2.3. *Sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $p \in S$. Se esiste una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \rightarrow S$, con $p = \mathbf{x}(q) \in \mathbf{x}(U)$ tale che la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile in q allora per ogni altra parametrizzazione $\mathbf{y} : V \rightarrow S$, con $\mathbf{y}(r) = p$ si ha che $(f \circ \mathbf{y})$ è differenziabile in r .*

Dimostrazione. Basta scrivere

$$f \circ \mathbf{y} = f \circ (\mathbf{x} \circ h) = (f \circ \mathbf{x}) \circ h$$

(ricordare il diagramma di pag. 80) e quindi $f \circ \mathbf{y}$ è composizione di due funzioni differenziabili. \square

Dunque la [Definizione 2.1](#) è corretta.

Abbiamo già detto che la definizione di funzione differenziabile $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ richiede semplicemente che le componenti siano tutte funzioni differenziabili. Diamo ora la definizione di funzione differenziabile fra superfici (sia il dominio che il codominio sono superfici regolari).

Come sempre ci aiutiamo con un diagramma

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\varphi} & S_2 \\ \uparrow \mathbf{x}_1 & & \uparrow \mathbf{x}_2 \\ U_1 & \xrightarrow{\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1} & U_2 \end{array}$$

Definizione 2.4. Sia $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ una funzione continua e sia $p \in S_1$. La funzione φ si dice *differenziabile in p* se esistono due parametrizzazioni locali

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{x}_2 : U_2 \rightarrow S_2$$

tali che $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$ per cui la funzione

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

sia differenziabile in $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$.

Che il concetto di differenziabilità non dipenda dalle parametrizzazioni scelte è, come il Corollario precedente, una conseguenza immediata della [Proposizione 2.2](#) sul cambiamento di coordinate.

La funzione $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$ è una funzione da un aperto del piano in un altro aperto del piano. Le sue variabili indipendenti sono le coordinate locali per S_1 e le sue componenti sono le coordinate locali per S_2 . La funzione si dice *espressione in coordinate locali* di φ .

In tutti i casi in cui si vuole studiare una funzione particolare, la prima cosa da fare è trovare parametrizzazioni locali opportune per dominio e codominio e scrivere la funzione in coordinate locali. Questo è l'analogo del fissare un sistema di riferimento e scrivere la funzione rispetto al sistema fissato. In questo modo la funzione viene trasformata in una funzione "numerica", cioè trasforma numeri (le coordinate in partenza) in numeri (le coordinate in arrivo) e quindi si può studiare come una funzione usuale fra aperti di \mathbb{R}^2 e in particolare si possono utilizzare tutti i teoremi noti sulle funzioni differenziabili.

La [Proposizione 2.2](#) garantisce che tutto quello che otteniamo a riguardo delle proprietà di differenziabilità non dipende dalle coordinate locali scelte ed è quindi una proprietà delle superfici e delle funzioni considerate.

2.2. Esempi di funzioni differenziabili. Vediamo ora alcuni esempi di funzioni differenziabili, per fare pratica con la definizione appena data. Spesso si può concludere che una funzione è differenziabile usando la seguente (do Carmo, Example 1, pag. 75):

Osservazione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia V un aperto di \mathbb{R}^3 tale che $S \subseteq V$. Sia $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile. Allora la restrizione di f a S è differenziabile (in ogni punto $p \in S$). Infatti, per ogni parametrizzazione locale $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ la funzione $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile.

Cioè, la restrizione di una funzione differenziabile (definita su un aperto di \mathbb{R}^3) è differenziabile. Alcuni esempi di questo tipo sono:

Esempio 2.5 (La funzione *altezza*). Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia \mathbf{v} un vettore di norma 1. Per ogni punto $P \in S$, indichiamo con OP il vettore (applicato nell'origine) con punto finale P . La funzione

$$h_{\mathbf{v}}(P) = OP \cdot \mathbf{v}$$

è allora differenziabile come funzione $h_{\mathbf{v}} : S \rightarrow \mathbb{R}$ perché è definita su tutto \mathbb{R}^3 ed è differenziabile su \mathbb{R}^3 : rispetto alla base standard $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ possiamo scrivere

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}, \quad OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

dove (x, y, z) sono le coordinate del punto $P \in S \subseteq \mathbb{R}^3$. Si ha

$$h_{\mathbf{v}}(P) = h_{\mathbf{v}}(x, y, z) = ax + by + cz$$

che essendo lineare è differenziabile. Il numero $h_{\mathbf{v}}(P)$ rappresenta la distanza con segno (l'altezza) del punto P dal piano perpendicolare al vettore \mathbf{v} e passante per l'origine. In particolare, per $\mathbf{v} = \mathbf{k}$ si ha $h_{\mathbf{v}}(x, y, z) = z$ e usando gli altri vettori della base otteniamo che le funzioni coordinate sono funzioni differenziabili sulla superficie S .

Abbiamo già visto la funzione altezza nella dimostrazione del teorema di Milnor a pag. 56.

Esempio 2.6 (Il quadrato della distanza). Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto fissato. La funzione "distanza da P_0 " data da

$$d(P, P_0) = f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

è differenziabile su $\mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\}$ (che è un aperto) e quindi, se $P_0 \notin S$, la sua restrizione a S è una funzione differenziabile su tutta S .

Se invece $P_0 \in S$, possiamo considerare la "distanza al quadrato",

$$(d(P, P_0))^2 = g(P) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

che è differenziabile anche in P_0 e quindi è differenziabile come funzione su S .

Consideriamo adesso il caso di funzioni il cui dominio e codominio siano superfici. Una generalizzazione dell'Osservazione precedente ci dà un semplice criterio:

Osservazione (do Carmo, Example 3, pag. 77). Siano S_1 e S_2 due superfici regolari e sia V un aperto di \mathbb{R}^3 tale che $S_1 \subseteq V$. Sia $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione differenziabile tale che $f(S_1) \subseteq S_2$. Allora la restrizione di f a S_1 è una funzione differenziabile $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$.

Infatti, dato $p \in S_1$ e due parametrizzazioni $\mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow S_1$ e $\mathbf{x}_2 : U_2 \rightarrow S_2$ tali che $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $f(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$ la funzione

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

è differenziabile e cioè la funzione f è differenziabile come funzione fra superfici.

La parametrizzazione \mathbf{x}_1 esiste sempre, per definizione di superficie regolare, e basta prendere \mathbf{x}_2 tale che $f(p) \in \mathbf{x}_2(U_2)$. Per la continuità di \mathbf{x}_1 , f e \mathbf{x}_2^{-1} , la condizione $f(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$ può essere soddisfatta restringendo, se necessario, l'aperto U_1 .

Di nuovo, la restrizione di una funzione differenziabile (definita su un aperto di \mathbb{R}^3) è differenziabile.

Esempio 2.7. Sia S simmetrica rispetto al piano xy e cioè $(x, y, z) \in S \implies (x, y, -z) \in S$ (per esempio, una sfera centrata nell'origine). Allora la funzione

$$f(x, y, z) = (x, y, -z)$$

è differenziabile come funzione $f : S \rightarrow S$. È chiaro che questa funzione è un diffeomorfismo, perché è uguale alla sua inversa, che è dunque ancora differenziabile.

Esempio 2.8. Come prima, per una superficie invariante per una rotazione di angolo θ intorno all'asse z . Allora la rotazione di angolo θ è un diffeomorfismo di S in se stessa.

Esempio 2.9. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

dove a, b, c sono tutti non nulli. La funzione f è differenziabile (con inversa differenziabile) e manda la sfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

nell'ellissoide

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

Quindi la sfera e l'ellissoide sono superfici diffeomorfe.

3. Il differenziale di una funzione differenziabile

Passiamo ora alla definizione di *differenziale* di una funzione. La difficoltà maggiore è identificare il *dominio*: poiché il differenziale è un'applicazione lineare, il suo dominio deve essere uno spazio vettoriale e in particolare non potrà mai essere (tranne in casi banali) la superficie dominio della funzione. La definizione richiede di identificare i *vettori tangenti* e introdurremo lo *spazio tangente*. Saremo quindi in grado di riconoscere la relazione usuale fra differenziale e matrice Jacobiana.

3.1. Il fibrato tangente. Ricordiamo che sullo spazio \mathbb{R}^3 in cui è contenuta la superficie convivono le strutture di spazio affine (i cui elementi sono i punti, per esempio i punti della superficie) e di spazio vettoriale (i cui elementi sono vettori). I vettori tangenti stanno nello spazio vettoriale, però abbiamo già discusso il fatto che i vettori tangenti ad una curva devono essere considerati come “vettori applicati” e cioè ci dobbiamo ricordare in quale punto della curva il vettore è tangente.

Introduciamo quindi alcuni concetti astratti che ci permetteranno di distinguere le due strutture e di definire i vettori tangenti ad una superficie. Poiché il discorso è generale e in seguito sarà utile considerare uno spazio ambiente di dimensione qualunque, diamo le definizioni per \mathbb{R}^n .

Fissiamo una notazione speciale: scriviamo \mathbb{R}_a^n per indicare \mathbb{R}^n come spazio *affine* e \mathbb{R}_v^n per indicare \mathbb{R}^n come spazio *vettoriale*.

Definizione 3.1. Sia $p \in \mathbb{R}_a^n$. Un *vettore tangente* \mathbf{v}_p a \mathbb{R}_a^n in p è una coppia $\mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v})$ dove p è il punto considerato e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_v^n$ è un vettore.

Dato un vettore tangente $\mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v})$, \mathbf{v} si dice *parte vettoriale*, p si dice *punto di applicazione*.

Leggiamo con attenzione la definizione: i vettori sono tangenti *allo spazio* \mathbb{R}_a^n e cioè ad un oggetto geometrico. Inoltre, ogni vettore tangente è tangente *in un punto* e in particolare non ha senso confrontare vettori tangenti in punti diversi. Cosa è l'insieme di *tutti* i vettori tangenti a \mathbb{R}_a^n ?

Definizione 3.2. L'insieme di tutti i vettori tangenti a \mathbb{R}_a^n si chiama *fibrato tangente* di \mathbb{R}_a^n e si indica con $T\mathbb{R}_a^n$.

C'è una funzione canonica $\pi : T\mathbb{R}_a^n \rightarrow \mathbb{R}_a^n$ data da $\pi(p, \mathbf{v}) = p$ che associa ad ogni vettore tangente il suo punto di applicazione. Cosa è la controimmagine $\pi^{-1}(p)$? È l'insieme di tutti i vettori tangenti in p : si scrive

$$\pi^{-1}(p) = T_p\mathbb{R}_a^n$$

e si dice che $T_p\mathbb{R}_a^n$ è lo *spazio tangente a \mathbb{R}_a^n in p* . Naturalmente $T_p\mathbb{R}_a^n$ è in corrispondenza biunivoca “naturale” con \mathbb{R}_v^n , data da $\varphi_p(p, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$ e dunque possiamo considerare $T_p\mathbb{R}_a^n$ come spazio vettoriale, con somma di vettori

$$\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p = (p, \mathbf{v}) + (p, \mathbf{w}) = (p, \mathbf{v} + \mathbf{w})$$

e moltiplicazione per scalari

$$\lambda \mathbf{v}_p = \lambda(p, \mathbf{v}) = (p, \lambda \mathbf{v})$$

Notiamo che le operazioni algebriche di somma e moltiplicazione per scalari coinvolgono solo la parte vettoriale dei vettori tangenti, mentre il punto di applicazione deve essere lo stesso in tutti i vettori considerati.

ATTENZIONE. Non confondiamo le notazioni:

- $T\mathbb{R}_a^n$ = fibrato tangente = *tutti* i vettori tangenti
- $T_p\mathbb{R}_a^n$ = spazio tangente in p = vettori tangenti *applicati* in p

Gli spazi $T_p\mathbb{R}_a^n$ si dicono le *fibre* della mappa π . Essendo controimmagini di punti diversi sono tutte disgiunte a due a due e hanno tutte la struttura di spazio vettoriale reale di dimensione n e sono quindi isomorfe fra loro. Possiamo perciò immaginare il fibrato tangente $T\mathbb{R}_a^n$ come tante “fibre” uguali messe una accanto all'altra, parametrizzate dai punti della “base” \mathbb{R}_a^n .

Se guardiamo nuovamente le [definizioni 3.1](#) e [3.2](#) possiamo notare che in realtà

$$T\mathbb{R}_a^n = \mathbb{R}_a^n \times \mathbb{R}_v^n$$

e cioè il fibrato tangente $T\mathbb{R}_a^n$ è un prodotto e la mappa π è la proiezione sul primo fattore. Si esprime questo fatto dicendo che

il fibrato tangente a \mathbb{R}_a^n è banale

Questo significa che il fibrato tangente è il prodotto dello spazio geometrico (in questo caso \mathbb{R}_a^n) e uno spazio vettoriale fissato (in questo caso \mathbb{R}_v^n) e la mappa “punto di applicazione” è la proiezione sul primo fattore. Quando il fibrato tangente è banale tutte le fibre sono “naturalmente isomorfe” e si possono confrontare tramite la proiezione sul secondo fattore.

Non abbiamo mai parlato di dimensione per oggetti che non siano spazi vettoriali. Se interpretiamo (in modo intuitivo) la parola “dimensione” come “numero di parametri liberi” che servono per descrivere tutti i punti di un oggetto, allora possiamo dire che

- la dimensione di \mathbb{R}_a^n è n
- la dimensione dello spazio tangente in un punto $T_p\mathbb{R}_a^n$ è $n = \dim \mathbb{R}_a^n$
- la dimensione del fibrato tangente $T\mathbb{R}_a^n$ è $2n = 2 \dim \mathbb{R}_a^n$

Consideriamo adesso $S \subseteq \mathbb{R}_a^n$ un *sottoinsieme*. È ragionevole pensare che i vettori tangenti ad S in un suo punto p siano *alcuni* dei vettori tangenti a tutto \mathbb{R}_a^n in p e cioè che il *fibrato tangente ad S* sia un sottoinsieme di $T\mathbb{R}_a^n$.

Osservazione.

- (1) affinché le fibre siano spazi vettoriali (isomorfi fra loro), occorre fare delle ipotesi sul sottoinsieme S
- (2) non sempre il fibrato tangente è un prodotto del tipo $S \times V$, dove V è uno spazio vettoriale fissato

Affrontiamo adesso il caso delle superfici: sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Non scriveremo più \mathbb{R}_a^3 e \mathbb{R}_v^3 perché è chiaro che:

- se $p \in S$, vuol dire che $p \in \mathbb{R}_a^3$ (nello spazio affine)
- se \mathbf{v} è un vettore, allora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_v^3$

Sia

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$$

una curva differenziabile il cui sostegno sia contenuto in S e tale che $\alpha(0) = p$. Il dominio non è importante, basta che sia un intorno di 0. La curva α passa per il punto p ed è *tracciata* (cioè contenuta) su S . Nel punto p ci sarà il vettore tangente $\alpha'(0)$ ed è naturale richiedere che questo vettore sia anche tangente alla superficie.

Definizione 3.3. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, $p \in S$ e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_v^3$ un vettore. Si dice che \mathbf{v} è *tangente a S in p* se esiste una curva differenziabile $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq S, \quad \alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \mathbf{v}$$

Al variare della curva α , troviamo molti vettori tangenti. Otteniamo in questo modo un *insieme* di vettori, tutti i vettori tangenti a S in p . Questo insieme si chiama *cono tangente a S in p* e si indica con $C_p S$. Ricordando la discussione precedente sul fibrato tangente a \mathbb{R}_a^3 è chiaro che $C_p S \subseteq T_p \mathbb{R}_a^3$:

$$C_p S = \{ \mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v}) \in T_p \mathbb{R}_a^3 \mid \mathbf{v} \text{ è tangente a } S \text{ in } p \}$$

Il nome è dovuto al fatto che questo insieme è un cono. Ricordiamo che

Definizione 3.4. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K . Un sottoinsieme $C \subseteq V$ è un *cono con vertice l'origine* se $\mathbf{v} \in C \implies \lambda \mathbf{v} \in C, \forall \lambda \in K$.

e cioè un cono è chiuso rispetto alle dilatazioni (moltiplicazioni per scalari). È chiaro che ogni sottospazio vettoriale è anche un cono, ma il viceversa non è vero: l'usuale cono $x^2 + y^2 = z^2$ di \mathbb{R}^3 è un cono che non è un sottospazio.

I vettori tangenti in un punto formano un cono: se $\mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v}) \in C_p S$ allora esiste una curva $\alpha(t)$ come nella definizione. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ consideriamo la curva

$$\beta(t) = \alpha(\lambda t)$$

Allora α e β hanno lo stesso sostegno e quindi anche β è contenuta in S . Inoltre

$$\beta(0) = \alpha(0) = p, \quad \beta'(0) = \lambda \alpha'(0) = \lambda \mathbf{v}$$

e quindi anche $\lambda \mathbf{v}$ è tangente a S in p e cioè $\lambda \mathbf{v}_p = (p, \lambda \mathbf{v}) \in C_p S$.

Notiamo che il caso $\lambda = 0$ non è escluso: in questo caso la curva β è la curva costante $\beta(t) = \alpha(0) = p$ che ha vettore tangente nullo. Dunque il vettore nullo è sempre un vettore tangente.

Nella definizione di vettore tangente e di cono tangente, l'insieme S può essere arbitrario. Vediamo un paio di esempi:

Esempio 3.5. Sia $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora $C_p U = T_p \mathbb{R}_a^n$. Infatti per il punto p passano rette per ogni direzione e poiché U è aperto, ogni retta interseca U in un intervallo aperto e dunque tutti i vettori sono vettori tangenti ad U .

Esempio 3.6. Sia S il cono $x^2 + y^2 = z^2$ contenuto in \mathbb{R}_a^3 . Allora il cono tangente nell'origine O è il cono stesso: se una curva è contenuta nel cono e passa per l'origine (il vertice) in quel punto deve avere come direzione tangente una delle generatrici del cono e quindi $C_O S$ è nuovamente il cono (l'insieme delle sue generatrici).

Invece, il cono tangente nel punto $p = (1, 0, 1)$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2: i vettori tangenti sono i vettori che appartengono al piano tangente nel punto p che è un punto regolare della superficie.

L'origine è speciale perché in quel punto la superficie non è regolare e non c'è piano tangente.

Vogliamo adesso dimostrare che il cono tangente ad una superficie regolare in ogni suo punto è uno spazio vettoriale di dimensione 2 (ricordare il [punto 1](#) dell'Osservazione nella pagina precedente).

In quello che segue, identificheremo sempre $T_p \mathbb{R}_a^3$ con lo spazio vettoriale \mathbb{R}_v^3 che scriveremo semplicemente \mathbb{R}^3 .

Ricordiamo ancora dall'Analisi il differenziale (in un punto!) di una funzione differenziabile: se $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una funzione differenziabile e $\mathbf{x}(q) = p$, il differenziale

$$d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 (= T_q U) \rightarrow \mathbb{R}^3 (= T_p \mathbb{R}_a^3)$$

è la funzione lineare che ha, rispetto alle basi canoniche, la matrice $[\mathbf{x}_u(q) \ \mathbf{x}_v(q)]$ e cioè è definita da

$$d\mathbf{x}_q(1, 0) = \mathbf{x}_u(q), \quad d\mathbf{x}_q(0, 1) = \mathbf{x}_v(q)$$

Proposizione 3.7 (do Carmo, Proposition 1, Capitolo 2-4). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Sia*

$$\mathbf{x} : U \rightarrow S$$

una parametrizzazione locale e sia $q \in U$ tale che $\mathbf{x}(q) = p$. Allora

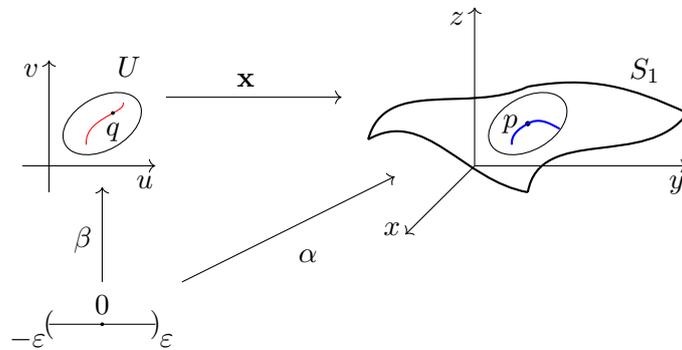
$$C_p S = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$$

cioè un vettore è tangente a S in p se e solo se è nell'immagine del differenziale di una parametrizzazione.

Dimostrazione. Dimostriamo che i due insiemi sono l'uno contenuto nell'altro. Sia dunque $\mathbf{w} \in C_p$ un vettore tangente a S in p . Allora, per definizione, esiste una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq S, \quad \alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \mathbf{w}$$

Come al solito, un disegno aiuta



La funzione $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$ è differenziabile poiché \mathbf{x}^{-1} è differenziabile in quanto inversa di una parametrizzazione locale. Verifichiamo questa affermazione: affinché la funzione $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \subseteq S \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ sia differenziabile (Definizione 2.1) deve esistere una parametrizzazione locale $\mathbf{y} : V \rightarrow S$ tale che $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ è differenziabile. Ma poiché \mathbf{x} è una parametrizzazione locale, possiamo prendere $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ e quindi $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} = \text{id}_U : U \rightarrow U$ che è certamente differenziabile.

Possiamo dunque scrivere

$$\alpha(s) = (\mathbf{x} \circ \beta)(s)$$

e derivando

$$\mathbf{w} = \alpha'(0) = \frac{d}{ds}[\mathbf{x} \circ \beta]_{|s=0} = u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q)$$

dove $\beta(s) = (u(s), v(s))$ come funzione a valori in \mathbb{R}^2 . Quindi \mathbf{w} è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_u(q)$ e $\mathbf{x}_v(q)$ e dunque è nell'immagine del differenziale $d\mathbf{x}_q$.

Viceversa, sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e sia $\mathbf{w} = d\mathbf{x}_q(\mathbf{v})$. Consideriamo la curva (retta in \mathbb{R}^2 passante per p e di direzione data da \mathbf{v})

$$\gamma(t) = q + t\mathbf{v}$$

Poiché U è aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ e inoltre $\gamma(0) = q$. Dunque la curva $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ è differenziabile, contenuta in S e $\alpha(0) = p$ e perciò, per definizione, il vettore $\alpha'(0)$ è tangente a S in p . Calcolando come prima con la formula del differenziale per una funzione composta e osservando che $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ si ha

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}[\mathbf{x} \circ \gamma]_{|t=0} = d\mathbf{x}_q(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

e cioè $\mathbf{w} \in C_p S$. □

Da questa proposizione ricaviamo alcuni fatti importanti, che mettiamo in evidenza:

- (1) poiché $d\mathbf{x}_q$ è un'applicazione lineare, la sua immagine è un *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^3 = T_p\mathbb{R}_a^3$. Dunque, il cono tangente ad una superficie regolare in un suo punto è uno *spazio vettoriale*, che si indica con $T_p S$ e si chiama *spazio tangente a S in p* . In particolare, la somma di due vettori tangenti è ancora un vettore tangente: questo non è per niente ovvio. Se anche conosciamo due curve tali che $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ e $\beta'(0) = \mathbf{w}$, come troviamo una curva γ per cui $\gamma'(0) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$? Osserviamo che la scelta ovvia, $\gamma(t) = \alpha(t) + \beta(t)$ non va bene, perché non è detto che γ sia contenuta in S (oltre al doversi preoccupare di definire la "somma di punti"). Sottolineiamo che il fatto che lo spazio tangente sia uno spazio vettoriale è conseguenza diretta dell'esistenza di una parametrizzazione locale e cioè del fatto che la superficie è *regolare*;
- (2) l'immagine di $d\mathbf{x}_q$ a priori dipende dalla parametrizzazione scelta \mathbf{x} . Poiché l'immagine è $C_p S$, che è definito senza far riferimento a nessuna parametrizzazione, si ha: per *ogni* parametrizzazione locale, l'immagine del differenziale è sempre la stessa. Dunque per calcolare lo spazio tangente, possiamo usare la parametrizzazione

che vogliamo e cioè: lo *spazio tangente* dipende solo dalla superficie S (e dal punto p , naturalmente) e non dalle coordinate locali scelte;

- (3) poiché \mathbf{x} è una parametrizzazione locale, l'applicazione lineare $d\mathbf{x}_q$ ha rango 2 (condizione ③ della definizione). Dunque $\dim T_p S = 2$ per ogni punto $p \in S$ e tutti gli spazi tangenti sono isomorfi fra di loro (ma, in generale, non in modo naturale). Inoltre, una base per $T_p S$ è data da $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$. Quindi una parametrizzazione non solo dà coordinate locali sulla superficie ma produce anche (gratuitamente) una base per lo spazio tangente $T_p S$;
- (4) se $\mathbf{w} = \alpha'(0) \in T_p S$ e poniamo $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$ come nella dimostrazione precedente, abbiamo che

$$\mathbf{w} = u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q)$$

e cioè nella base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ possiamo scrivere $\mathbf{w} = (u'(0), v'(0))$ e quindi le coordinate di \mathbf{w} non dipendono dalla curva α scelta ma solo dalla sua derivata prima in 0;

- (5) quello che usualmente si chiama il *piano tangente* è il piano affine in \mathbb{R}_a^3 che passa per il punto p e “tocca” (o “si appoggia a”) S . Questo piano affine è il traslato dello spazio tangente, portando l'origine di $T_p S$ in p e cioè è il piano affine H_p di equazione parametrica

$$H_p : p + T_p S = p + \lambda \mathbf{x}_u(q) + \mu \mathbf{x}_v(q)$$

- (6) l'insieme di tutti i vettori tangenti alla superficie S si chiama *fibrato tangente* ed è l'unione di tutti gli spazi tangenti

$$TS = \bigcup_{p \in S} T_p S$$

Per definizione, $T_p S \subseteq T_p \mathbb{R}_a^3$ e quindi tutti gli spazi tangenti $T_p S$ sono disgiunti a due a due e $TS \subseteq T\mathbb{R}_a^3$. In particolare TS è un oggetto di dimensione 4 dentro un oggetto di dimensione 6 e quindi non è di facile visualizzazione. La mappa “punto di applicazione” è la restrizione della proiezione $\pi : T_p S \rightarrow S$. Le fibre (controimmagini) di π sono gli spazi tangenti $\pi^{-1}(p) = T_p S$ e sono tutti spazi vettoriali isomorfi fra loro. In generale però, TS non è il prodotto $S \times \mathbb{R}^2$. Per esempio, vedremo che il fibrato tangente alla sfera non è un prodotto. Invece il fibrato tangente di un toro è banale.

Esempio 3.8. Sia $S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria e sia $p = (0, 0, 1)$ il polo nord. Usando la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right)$$

abbiamo $p = \mathbf{x}(q)$ dove $q = (0, 0)$ e le derivate sono:

$$\mathbf{x}_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \right), \quad \mathbf{x}_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \right)$$

e quindi $T_p S$ è il sottospazio vettoriale generato da $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ cioè il sottospazio vettoriale $z = 0$, mentre il *piano tangente* è il piano affine di equazione $z = 1$.

Bisogna prestare attenzione al fatto che il do Carmo non sempre distingue i due concetti. Nel seguito useremo sempre la terminologia usata fin qui e cioè: spazio tangente per indicare il sottospazio vettoriale e piano tangente per indicare il sottospazio affine.

3.2. Piano tangente e vettore normale a una superficie. Sia $p \in S$ e sia $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale di un intorno di p . Sia $q \in U$ tale che $\mathbf{x}(q) = p$. Lo spazio tangente a S in p è generato dai vettori $\mathbf{x}_u(q)$ e $\mathbf{x}_v(q)$. Poniamo

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

sottointendendo la variabile indipendente $q = (u, v)$. Il vettore \mathbf{N} è quindi una *funzione* vettoriale, dipendente dai parametri (u, v) e si dice *vettore normale*. Il prodotto esterno è sempre non nullo perché i vettori tangenti \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v sono linearmente indipendenti e quindi si può dividere per la norma e ottenere un vettore di norma costante 1. Dunque

$$\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$$

è una base dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 , che varia al variare del punto $p \in S$. È simile al triedro di Frenet, anche se non è in generale ortonormale, e sarà uno strumento importante nello studio delle superfici.

Utilizzando i concetti di spazio tangente e fibrato tangente, scriviamo con precisione:

- $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ è una base di $T_p S$
- $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), \mathbf{N}(q)\}$ è una base di $T_p \mathbb{R}_a^3 = \mathbb{R}_v^3$

Lo spazio tangente alla superficie T_p varia al variare del punto p mentre lo spazio tangente a \mathbb{R}_a^3 è sempre lo stesso, o meglio tutti gli spazi tangenti sono identificati in modo naturale fra loro. Quello che varia in questo caso è la *base*, proprio come il triedro di Frenet è una base variabile dello spazio vettoriale fisso \mathbb{R}_v^3 .

Per la descrizione ben nota dei piani nello spazio, il *piano tangente* a S in p è dunque il piano *passante per p e perpendicolare a \mathbf{N}* . Indicando con

$\mathbf{x} = (x, y, z)$ le coordinate di un punto dello spazio, l'equazione cartesiana del piano tangente è dunque

$$(\mathbf{x} - p) \cdot \mathbf{N} = 0$$

Il vettore normale \mathbf{N} è sempre considerato di norma 1. Quando interessa solo il piano tangente, si può però usare il vettore $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$ che è parallelo a \mathbf{N} e quindi individua lo stesso piano ortogonale, evitando di dover normalizzare.

3.3. Il differenziale di una funzione differenziabile. Dopo aver definito lo spazio tangente ad una superficie, possiamo finalmente parlare del differenziale di una funzione.

Iniziamo con una caratterizzazione geometrica del differenziale usuale. Sia dunque $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione differenziabile (non necessariamente una parametrizzazione) e sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ un vettore. Consideriamo una curva (qualunque) $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tale che $\alpha(0) = q \in U$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Per esempio, α potrebbe essere un segmento sufficientemente piccolo sulla retta $q + t\mathbf{w}$, ma qualunque curva che rispetti le condizioni richieste va bene.

La curva $\mathbf{x} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva differenziabile nello spazio e dal calcolo fatto nella dimostrazione della [Proposizione 3.7](#) si ha

$$d\mathbf{x}_q(\mathbf{w}) = (\mathbf{x} \circ \alpha)'(0)$$

che possiamo esprimere come:

per trovare l'immagine di un vettore tangente ad una curva mediante il differenziale di una funzione, basta prendere il vettore tangente alla curva immagine mediante la funzione

Questa frase contiene solo condizioni geometriche e non richiede di conoscere il differenziale: può dunque essere usata come definizione generale di differenziale di una mappa.

Definizione 3.9. Sia $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ una funzione differenziabile fra superfici regolari e sia $p \in S_1$. Sia $\mathbf{w} \in T_p S_1$ e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ una curva tale che $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Poniamo per definizione

$$d\varphi_p(\mathbf{w}) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

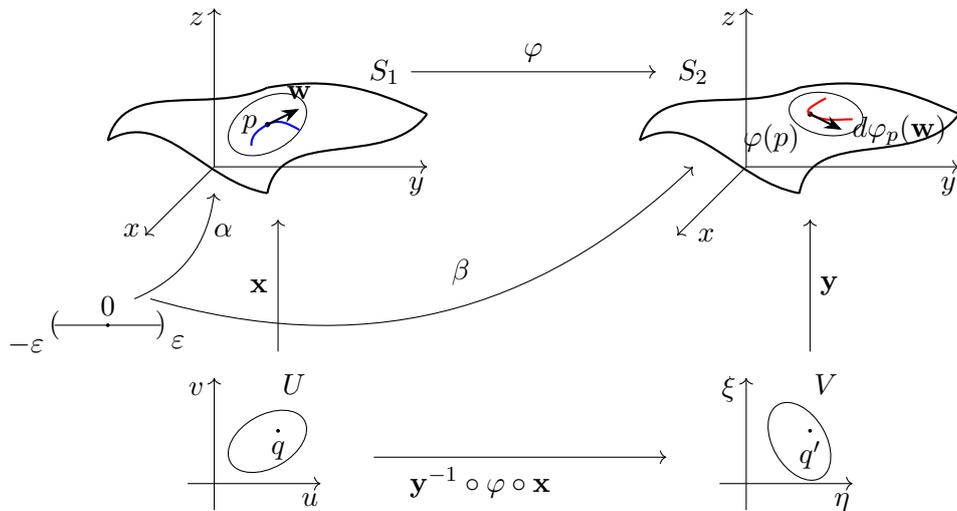
La curva α esiste per definizione di vettore tangente. Abbiamo in questo modo una funzione

$$d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$$

La definizione di $d\varphi_p$ richiede la scelta di una curva α per ogni elemento del dominio e perciò dobbiamo per prima cosa dimostrare che questa funzione è ben definita. Inoltre, anche se sia dominio che codominio sono spazi vettoriali non è per niente evidente che questa funzione sia lineare. La prossima proposizione affronta questi problemi.

Proposizione 3.10 (do Carmo, Proposition 2, Capitolo 2-4). *La funzione $d\varphi_p$ è ben definita (e cioè non dipende dalla scelta di α) ed è lineare.*

Dimostrazione. Disegniamo con cura la situazione. Le lettere scelte dal do Carmo sono particolarmente scomode e useremo lettere leggermente diverse. La dimostrazione è però la stessa.



Sia $\mathbf{w} \in T_p S_1$ e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ tale che $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Per calcolare, usiamo due parametrizzazioni locali per S_1 e S_2 , intorno ai punti p e $\varphi(p)$ rispettivamente. Abbiamo perciò

$$\mathbf{x} : U \rightarrow S_1, \quad \mathbf{y} : V \rightarrow S_2$$

In componenti, $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ mentre per la parametrizzazione \mathbf{y} le variabili indipendenti sono (ξ, η) . Poniamo anche $\mathbf{x}(q) = p$, $\mathbf{y}(q') = \varphi(p)$ i punti negli aperti che hanno come immagine i punti che ci interessano sulle superfici. Dovremo calcolare quindi le derivate in questi punti.

Le basi per gli spazi tangenti dati dalle parametrizzazioni sono

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\} &= \text{base di } T_p S_1 \\ \{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\} &= \text{base di } T_{\varphi(p)} S_2 \end{aligned}$$

Scriviamo le funzioni in coordinate locali:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) &= (u(t), v(t)) && \text{la curva } \alpha \\ \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} &= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) && \text{la funzione } \varphi \end{aligned}$$

e dobbiamo calcolare

$$\beta'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

Osserviamo che (questo è il calcolo fondamentale)

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}) \circ (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha) = \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha = \mathbf{y}^{-1} \circ \beta$$

e cioè la curva β in coordinate locali. Dunque

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \beta)(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$$

Le coordinate di $\beta'(0)$ nella base $\{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\}$ si trovano derivando rispetto a t l'espressione in coordinate locali e si ha, usando la solita formula per le derivate della funzione composta:

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \beta)'(0) = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(q) \cdot v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(q) \cdot v'(0) \right]$$

che si può scrivere come

$$d\varphi_p(\mathbf{w}) = \beta'(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$$

dove il vettore $\beta'(0)$ è scritto usando le sue coordinate rispetto alla base $\{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\}$. Il calcolo mostra che

- (1) $d\varphi_p(\mathbf{w})$ dipende solo dalle derivate di φ e dalle coordinate di \mathbf{w} e non dalla curva $\alpha(t)$ scelta e quindi è ben definita;
- (2) la funzione $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ è lineare perché è data, in coordinate rispetto alle basi $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ e $\{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\}$, dalla moltiplicazione di matrici. In particolare, rispetto alle basi degli spazi tangenti date dalle parametrizzazioni, la matrice del differenziale è la *matrice Jacobiana* della funzione φ in coordinate locali e cioè dalla matrice $J(\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x})(q)$.

e queste sono proprio le affermazioni che dovevamo dimostrare. \square

4. Esempi di superfici regolari

In questo paragrafo vediamo in dettaglio vari esempi di superfici, in modo da avere una panoramica abbastanza estesa dei casi che studieremo e per avere materiale a cui applicare le tecniche che svilupperemo in seguito.

4.1. Superfici di rotazione. Sia C una curva *regolare* nel piano xz e che non incontra l'asse z . Possiamo dunque scriverla in forma parametrica come

$$\begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}$$

con $a < v < b$ e $f(v) > 0, \forall v \in (a, b)$. Questa seconda condizione deriva dal fatto che la curva non incontra l'asse z . Non supponiamo che la curva sia parametrizzata per arcolunghezza ma osserviamo che la curva è regolare e quindi la parametrizzazione è iniettiva, cioè la funzione

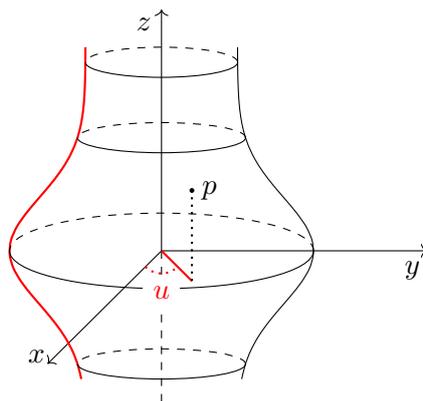
$$\alpha(v) = (f(v), g(v))$$

è iniettiva. In particolare, questo vuol dire che ogni punto della curva è preso una sola volta o che, equivalentemente, se conosciamo le coordinate $(x_0, z_0) \in C$ di un punto della curva, allora esiste un *unico* $v_0 \in (a, b)$ tale che $x_0 = f(v_0)$ e $z_0 = g(v_0)$. Se pensiamo al parametro v come al *tempo*, v_0 è l'unico istante di tempo in cui la curva passa per (x_0, z_0) .

Usiamo il nome v per il parametro della curva perché questo è uno dei due parametri per la superficie che costruiremo e di solito abbiamo usato (u, v) come variabili indipendenti di una parametrizzazione locale.

Ruotando la curva C intorno all'asse z , si ottiene una *superficie di rotazione* S . Se $p \in S$, indichiamo con u l'angolo (in radianti) fra il semiasse positivo x e la proiezione di p sul piano xy (vedi figura). La superficie S ha equazioni parametriche:

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$



Ricordiamo che le *linee coordinate* su una superficie sono l'immagine delle rette verticali e orizzontali nel dominio U e hanno quindi equazioni $v = \text{costante}$ e $u = \text{costante}$. In questo caso:

- ogni curva della forma $v = \text{costante}$ è una circonferenza di raggio $f(v)$ e centro sull'asse z , sul piano orizzontale $z = g(v)$

- ogni curva della forma $u = \text{costante}$ è la rotazione della curva C di angolo u

Nel caso delle superfici di rotazione queste curve si chiamano, rispettivamente, *paralleli* e *meridiani*, in accordo con il significato geografico usuale.

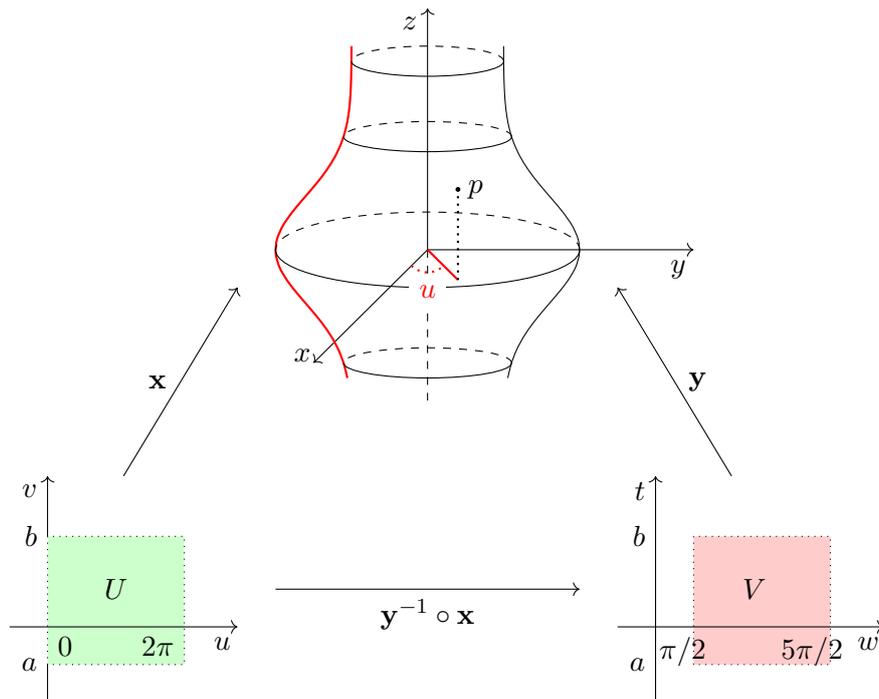
Affinché la parametrizzazione \mathbf{x} sia iniettiva, il dominio deve essere scelto in modo opportuno. Il dominio più grande che si può scegliere è

$$U = (0, 2\pi) \times (a, b)$$

e in questo modo \mathbf{x} copre tutta la superficie “meno un meridiano”. Ruotando di $\pi/2$ (in realtà, va bene un angolo qualunque) si ottiene un'altra parametrizzazione

$$\mathbf{y} : (\pi/2, 5/2\pi) \times (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(w, t) \longmapsto (f(t) \cos w, f(t) \sin w, g(t))$$



Scriviamo il cambiamento di coordinate:

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x})(u, v) = (u + \pi/2, v)$$

e cioè il cambiamento di coordinate è

$$\begin{cases} w = u + \pi/2 \\ t = v \end{cases}$$

che è chiaramente \mathcal{C}^∞ e invertibile, come previsto dal teorema generale.

Non abbiamo ancora dimostrato che \mathbf{x} e \mathbf{y} sono parametrizzazioni. È chiaro che la dimostrazione è la stessa e scriviamo il caso di \mathbf{x} . La funzione \mathbf{x} è di classe \mathcal{C}^∞ perché lo sono sia le funzioni seno e coseno e anche le funzioni $f(v)$ e $g(v)$ perché la curva è regolare. Verifichiamo la condizione ③ sul rango del differenziale: la matrice delle derivate parziali è

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -f(v) \sin u & f'(v) \cos u \\ f(v) \cos u & f'(v) \sin u \\ 0 & g'(v) \end{bmatrix}$$

I determinanti dei tre minori 2×2 sono

$$-f(v)f'(v) \quad -f(v)g'(v) \sin u \quad f(v)g'(v) \cos u$$

Poiché $f(v) > 0$, possiamo dividere (e cambiare segno) e consideriamo le tre quantità

$$f'(v) \quad g'(v) \sin u \quad g'(v) \cos u$$

Se $f'(v) \neq 0$ siamo a posto. Se $f'(v) = 0$ allora, poiché la curva C è regolare, sarà $g'(v) \neq 0$ e poiché $\sin u$ e $\cos u$ non sono mai contemporaneamente nulli, almeno uno fra il secondo e il terzo termine sarà diverso da 0. Dunque almeno un determinante è sempre diverso da 0 e cioè la matrice ha rango 2.

Dobbiamo adesso dimostrare che \mathbf{x} è iniettiva e che l'inversa è ancora continua. Sia dunque $\mathbf{x}(u, v) = (x, y, z)$. Allora

$$f(v) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g(v) = z$$

e quindi da (x, y, z) ricaviamo $(f(v), g(v))$ e da queste ricaviamo v perché abbiamo già osservato che la parametrizzazione della curva C è iniettiva. Queste formule mostrano anche che $f(v)$ e $g(v)$ sono funzioni continue di (x, y, z) .

La parametrizzazione $\alpha(v)$ è regolare e cioè la sua derivata è diversa da 0. Allora l'inversa (che abbiamo visto esistere) è differenziabile e in particolare continua. Dunque la composizione

$$(x, y, z) \mapsto \alpha(v) = (f(v), g(v)) \mapsto v$$

è continua, cioè v è una funzione continua di (x, y, z) . Resta da dimostrare che anche u è funzione continua di (x, y, z) .

Per questo, supponiamo prima che sia $u \neq \pi$ e quindi $\cos(u/2) \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} \tan \frac{u}{2} &= \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} \\ &= \frac{y/f(v)}{1 + x/f(v)} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

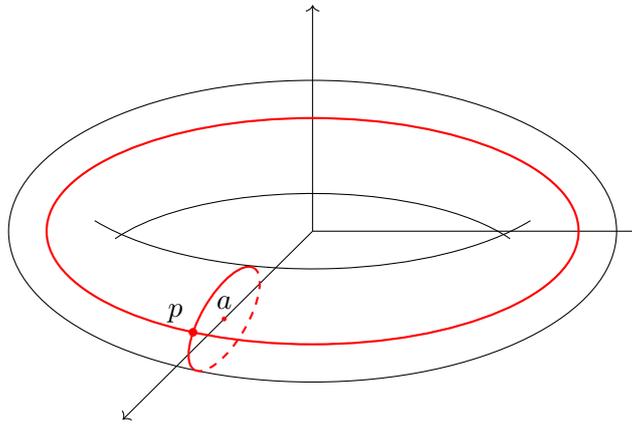
dove gli ultimi passaggi sono giustificati dal fatto che $f(v) \neq 0$ e quindi si può dividere per $f(v)$. Allora

$$u = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

che mostra che si può ottenere u da (x, y, z) in modo continuo. Per un intorno di $u = \pi$, basta prendere l'analogia espressione per la cotangente e si ottiene ancora u come funzione continua di (x, y, z) .

Dunque \mathbf{x} ammette inversa continua ed è quindi una parametrizzazione.

4.2. Il toro. Il toro si ottiene ruotando una circonferenza intorno ad una retta che non la incontra. La situazione è simile alla precedente, con una importante differenza che spiegheremo.



Fissiamo $0 < r < a$ e sia C la circonferenza nel piano xz di centro $(a, 0, 0)$ e raggio r . Poiché $r < a$, la circonferenza non incontra l'asse z e possiamo ruotare. La parametrizzazione di C è:

$$\begin{cases} x = a + r \cos v \\ z = r \sin v \end{cases}$$

e quindi

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = (a + r \cos v) \cos u \\ y = (a + r \cos v) \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$$

Le *linee coordinate* sono:

- i meridiani $u = \text{costante}$, che sono delle circonferenze verticali, rotazioni della circonferenza C
- i paralleli $v = \text{costante}$, che sono delle circonferenze orizzontali. Osserviamo che l'intersezione di un piano orizzontale con il toro

è l'unione di due circonferenze e queste sono paralleli distinti. Le circonferenze interne si trovano per i valori $\pi/2 < v < 3\pi/2$ e le circonferenze esterne per i valori $0 < v < \pi/2$ e $3\pi/2 < v < 2\pi$

Qual è il dominio di \mathbf{x} ? Per poter essere iniettiva, deve essere $U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ e dunque l'immagine non solo non copre il "meridiano" $u = 0$ ma non copre nemmeno il parallelo $v = 0$, che è la circonferenza esterna sul piano xy .

Ristretta a questo dominio, la curva C non è una circonferenza, ma una circonferenza meno un punto (il punto esterno $(a + r, 0, 0)$). Dunque per coprire l'intero toro non basta ruotare rispetto a u come prima per coprire il meridiano mancante, ma anche rispetto a v . Si ottengono quindi 4 parametrizzazioni locali e non 2.

Il motivo è che la curva C in questo caso è una curva *chiusa* e quindi non può essere parametrizzata iniettivamente da un intervallo aperto e dobbiamo considerare 2 parametrizzazioni la cui unione copre tutta la circonferenza. Scritte con questi domini, le 4 parametrizzazioni sono tutte del tipo considerate nell'esempio precedente e quindi soddisfano le 3 condizioni. Dunque anche il toro è una superficie regolare.

Esempio 4.1. Calcoliamo lo spazio tangente ad una superficie di rotazione. Una base dello spazio tangente è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0) \\ \mathbf{x}_v &= (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \sin u, -f(v)f'(v)) \\ &= f(v) [g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v)]\end{aligned}$$

e poiché $f(v) > 0$ si può semplificare e la *direzione* e il *verso* non cambiano. Dunque il vettore normale a una superficie di rotazione è parallelo al vettore

$$[g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v)]$$

Per esempio, si può osservare che quando $g'(v) = 0$ il piano tangente è orizzontale: infatti $g(v)$ è la funzione che dà l'altezza della curva rispetto all'asse z e anche l'altezza della superficie rispetto al piano xy . Quando la derivata è nulla, siamo in un minimo o un massimo dell'altezza e quindi il piano tangente è orizzontale.

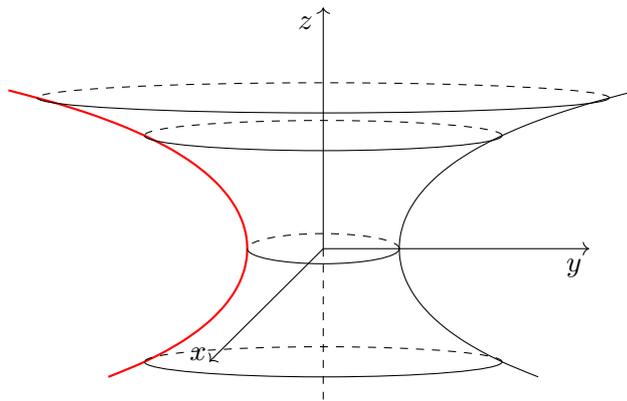
Invece, quando $f'(v) = 0$, allora il vettore normale è orizzontale (appartiene al piano xy) e quindi il piano tangente è verticale. Anche qui la spiegazione geometrica è chiara: la funzione $f(v)$ dà la distanza dall'asse z e quindi quando la derivata è nulla siamo in punti a distanza minima o massima dall'asse z e il piano tangente è parallelo all'asse z (è "verticale").

Esercizio 4.2. Calcolare vettore normale e spazio tangente ad un toro e verificare quanto appena detto.

4.3. La catenoide. Sia C la curva data da

$$\begin{cases} x = \cosh v \\ z = v \end{cases}$$

dove $\cosh v$ è il *coseno iperbolico*.



La superficie S che si ottiene ruotando la curva C intorno all'asse z si chiama *catenoide*. La curva C si chiama *catenaria*, ed è la curva che si ottiene fissando una *catena* oppure una fune pesante in due punti e lasciandole assumere la forma sotto la forza di gravità. La catenaria è una curva famosa: Galileo pensava fosse una parabola e solo dopo l'invenzione del Calcolo Infinitesimale, Leibniz, Huygens e Johann Bernoulli nel 1691 scoprirono che la sua forma era quella del coseno iperbolico. Il problema di trovare la forma della catenaria era stato proposto da Jacob Bernoulli.

Eulero dimostrò nel 1744 che ruotando la catenaria si otteneva una superficie particolare, la catenoide, che è un esempio di *superficie minima* e cioè che ha area minima a parità di perimetro (in questo caso il perimetro è formato da *due* circonferenze su piani paralleli con i centri su una retta perpendicolare ai piani) e dimostrò che la catenoide è l'unica superficie di rotazione ad essere una superficie minima. Studieremo le superfici minime più avanti.

La parametrizzazione della catenoide è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = \cosh v \cos u \\ y = \cosh v \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Esercizio 4.3. Calcolare vettore normale e spazio tangente ad una catenoide e verificare quanto detto sopra sui piani tangenti orizzontali e verticali.

Per maggiori informazioni sulla catenaria, potete consultare <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Catenary.html> oppure <https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary>.

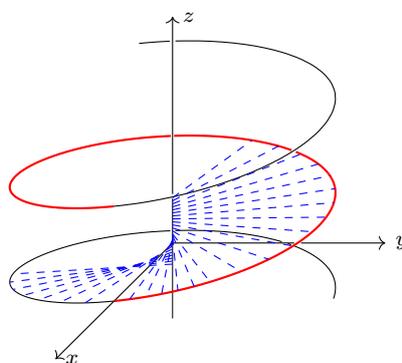
Esercizio 4.4. In questo tempo ormai troppo lungo di isolamento sociale è bene avere radici condivise per sentirsi parte, nonostante tutto, di una comunità. Cercate informazioni su tutti i matematici nominati in precedenza e cercate di avere un'idea della progressione dei loro lavori. Il sito MacTutor è un ottimo posto per cominciare <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>

4.4. L'elicoide. Concludiamo questa rassegna di esempi con una superficie non di rotazione. Questa superficie è quella che intuitivamente possiamo immaginare come una rampa per automobili in un parcheggio.

Si comincia con un'elica circolare, di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = a \sin u \\ z = bu \end{cases}$$

Per ogni punto dell'elica, tracciamo la retta orizzontale che passa per quel punto e incontra l'asse z e cioè la retta fra i punti $(a \cos u, a \sin u, bu)$ e $(0, 0, bu)$.



Usando il parametro v per i punti sulle rette, la parametrizzazione per la superficie è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = av \cos u \\ y = av \sin u \\ z = bu \end{cases}$$

Le linee coordinate sono

- $u = \text{costante}$: è una retta orizzontale, ad altezza $z = bu$ e ad angolo u con la semiretta positiva dell'asse x
- $v = \text{costante}$: è un'elica, di raggio $|av|$ e passo $2\pi b$

Esercizio 4.5. Determinare il dominio U su cui \mathbf{x} è una parametrizzazione regolare (occorre verificare che il rango del differenziale sia 2 e che \mathbf{x} sia iniettiva).

5. Esercizi svolti dal do Carmo

Nella risoluzione degli esercizi tratti dalle sezione 2-2 useremo spesso le proposizioni dimostrate nel [paragrafo 1](#). Prima di risolvere (o leggere) quello che segue, è bene dunque essere sicuri di conoscere quegli argomenti.

Esercizio 1. (do Carmo, Esercizio 2-2.1) Dimostrare che il cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

è una superficie regolare e trovare delle parametrizzazioni i cui intorni coordinati coprono l'intera superficie.

Soluzione. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Il differenziale di questa funzione, nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (2x_0, 2y_0, 0)$$

e quindi i punti in cui non è suriettivo sono i punti di coordinate $(0, 0, z)$ e cioè i punti dell'asse z . In questi punti la funzione vale 0 e perciò l'unico valore critico di f è 0.

Allora 1 è un valore regolare e poiché il cilindro è $f^{-1}(1)$, è una superficie regolare per la [Proposizione 1.7](#).

Il cilindro può essere coperto con le due parametrizzazioni regolari:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (\cos s, \sin s, t) \end{aligned}$$

Sono entrambe funzioni differenziabili, con il differenziale di rango massimo in ogni punto e iniettive (verifiche per esercizio).

Esercizio 2. (do Carmo, Esercizio 2-2.2)

L'insieme $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ è una superficie regolare?

L'insieme $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$ è una superficie regolare?

Soluzione. X è un disco chiuso (bordo compreso) nel piano $z = 0$ e **non è** una superficie regolare. Consideriamo per esempio il punto $p = (1, 0, 0) \in X$ (si può fare lo stesso ragionamento in un qualunque punto del bordo): se X

fosse una superficie regolare, dalla [Proposizione 1.8](#) avremmo che esiste un intorno $V \subseteq X$ del punto p che è il grafico di una funzione differenziabile di forma particolare. È chiaro che V non può essere il grafico di una funzione $y = g(x, z)$ oppure $x = h(y, z)$: in questi casi, poiché z è costantemente nullo, il grafico sarebbe una curva e non un intorno di p .

Resta il caso: V grafico di una funzione $z = f(x, y)$. In questo caso f è identicamente nulla, ma il dominio deve essere uguale a V in \mathbb{R}^2 e V non è un aperto di \mathbb{R}^2 .

Y è un disco aperto nel piano $z = 0$ ed è una superficie regolare. Per esempio, ponendo $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ si ha che Y è il grafico della funzione differenziabile $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(u, v) = 0$.

Osservazione. Questo ragionamento dimostra che *ogni* aperto del piano \mathbb{R}^2 è una superficie regolare. Infatti, se $V \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, possiamo considerare l'immersione $i : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $i(u, v) = (u, v, 0)$ e sia $Y = i(V)$ l'immagine. Allora Y è una superficie regolare in \mathbb{R}^3 .

Ci sono due modi di vedere Y come superficie regolare:

- $Y =$ grafico della funzione differenziabile $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(u, v) = 0$.
- $Y =$ immagine della parametrizzazione regolare $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$ (osserviamo che $\mathbf{x} = i$).

Esercizio 3. (do Carmo, Esercizio 2-2.3) Dimostrare che il cono a due falde con vertice nell'origine, e cioè l'insieme dato da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

non è una superficie regolare.

Soluzione. Usiamo nuovamente la [Proposizione 1.8](#): sia $p = (0, 0, 0) \in S$ il vertice del cono. Proiettando sui tre piani coordinati xy , xz e yz , si vede subito che S non è il grafico di una funzione regolare (non può essere il grafico di una funzione perché le proiezioni non sono iniettive) e quindi S non è una superficie regolare intorno a p .

Esercizio 4. (do Carmo, Esercizio 2-2.4) Sia $f(x, y, z) = z^2$. Dimostrare che 0 non è un valore regolare e tuttavia $f^{-1}(0)$ è una superficie regolare.

Soluzione. Il differenziale di f , nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (0, 0, 2z_0)$$

che si annulla nel punto $p = (0, 0, 0)$ e dunque $f(p) = 0$ non è un valore regolare.

Però

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

e quindi è il piano xy , che è una superficie regolare

Esercizio 5. (do Carmo, Esercizio 2-2.5) Sia

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$$

(un piano) e sia $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione data da

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + v, uv)$$

dove $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v\}$. È chiaro che $\mathbf{x}(U) \subseteq P$. La funzione \mathbf{x} è una parametrizzazione di P ?

Soluzione. La risposta è SI. Verifichiamo le tre condizioni per una parametrizzazione. La funzione $\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + v, uv)$ è chiaramente differenziabile (condizione ①).

Il differenziale è

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$$

e il minore formato dalle righe 2 e 3 ha determinante $u - v$ che è sempre diverso da 0 sul dominio U (condizione ③).

Poiché P è un piano, sappiamo già che è una superficie regolare e quindi, per la [Proposizione 1.9](#), basta verificare che \mathbf{x} è iniettiva. In componenti, la funzione \mathbf{x} è

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u + v \\ z = uv \end{cases}$$

Per scrivere l'inversa, dati y e z dobbiamo trovare u e v . I valori u e v sono due numeri la cui somma è y e il cui prodotto è z e si trovano risolvendo l'equazione di secondo grado $t^2 - yt + z = 0$. Le radici sono $t = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4z}}{2}$ e poiché sappiamo che $u > v$, si ottiene

$$u = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4z}}{2}, \quad v = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4z}}{2}$$

e abbiamo quindi anche la condizione ②.

Possiamo chiederci se l'espressione sotto radice è sempre positiva. Si ha

$$y^2 - 4z = (u + v)^2 - 4uv = u^2 + 2uv + v^2 - 4uv = (u - v)^2$$

e sul dominio U questa espressione è sempre strettamente positiva e quindi la funzione inversa è differenziabile sull'immagine di U .

Ultima domanda: il dominio U è un semipiano, delimitato dalla retta $u = v$. Qual è la forma dell'immagine? È un semipiano contenuto nel piano P oppure ha un'altra forma? Fare un disegno.

Esercizio 6. (do Carmo, Esercizio 2-2.7) Sia $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

- Determinare i punti critici e i valori critici di f .
- Per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(c)$ è una superficie regolare?
- Rispondere alle stesse domande per la funzione $f(x, y, z) = xyz^2$.

Soluzione.

a. Sia $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$. Per determinare i punti e i valori critici calcoliamo il differenziale: nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (2(x_0 + y_0 + z_0 - 1), 2(x_0 + y_0 + z_0 - 1), 2(x_0 + y_0 + z_0 - 1))$$

che si annulla in tutti i punti del piano $x + y + z = 1$, che sono quindi punti critici. In tutti questi punti la funzione si annulla e dunque 0 è l'unico valore critico.

b. Di conseguenza, l'insieme

$$X_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + z - 1)^2 = c\}$$

è una superficie regolare per ogni $c > 0$ (per $c < 0$ l'insieme X_c è vuoto). Osserviamo che X_c è l'unione di due piani paralleli

$$x + y + z - 1 = \sqrt{c}, \quad x + y + z - 1 = -\sqrt{c}$$

e quindi ha due componenti connesse.

Osserviamo che, come nell'esercizio precedente, anche $X_0 = \{x + y + z - 1 = 0\}$ è una superficie regolare, anche se 0 non è un valore regolare.

c. Poniamo ora $f(x, y, z) = xyz^2$. Il differenziale nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (y_0 z_0^2, x_0 z_0^2, 2x_0 y_0 z_0) = z_0(y_0 z_0, x_0 z_0, 2x_0 y_0)$$

che si annulla in tutti i punti del piano $z = 0$, che sono quindi punti critici. In tutti questi punti la funzione si annulla e dunque 0 è un valore critico.

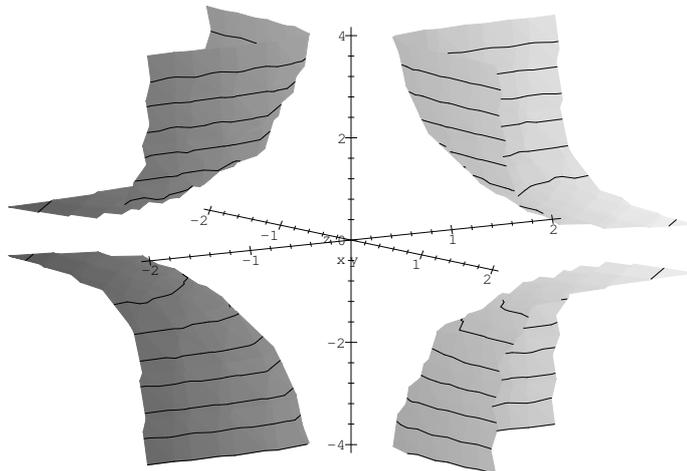
Quando $z \neq 0$, il differenziale si annulla solo per $x = y = 0$ e cioè sull'asse z . Anche questi punti sono critici. La funzione si annulla anche su tutti questi punti e dunque 0 è l'unico valore critico.

Dunque

$$X_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz^2 = c\}$$

è una superficie regolare per ogni $c \neq 0$. Osserviamo che X_c è sconnessa (non ha mai punti sui piani coordinati $x = 0$, $y = 0$ oppure $z = 0$). Determinare quante sono le componenti connesse, al variare di c .

Questa è la superficie per $c = 1$:



Notiamo ancora che X_0 è l'unione dei tre piani coordinati, ed è quindi connessa in quanto unione di connessi con intersezione non vuota (l'origine). Il piano $z = 0$ è però “contato 2 volte”. Inoltre, i punti sui tre assi coordinati non sono punti regolari.

Gli esercizi seguenti, tratti dal paragrafo 2-3 del do Carmo, chiedono tutti di dimostrare che certe funzioni sono differenziabili. Per risolverli useremo spesso le due osservazioni fatte nel [sotto-paragrafo 2.2](#) a pagina [84](#) e [85](#) e cioè che la restrizione di una funzione differenziabile (definita su un aperto di \mathbb{R}^3) è differenziabile. Faremo riferimento a questo enunciato con il termine *Osservazione* (in corsivo).

Esercizio 7. (do Carmo, Esercizio 2-3.1) Sia

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

la sfera unitaria e sia $A : S^2 \rightarrow S^2$ la mappa *antipodale*, data da $A(x, y, z) = -x, -y, -z$. Dimostrare che A è un diffeomorfismo.

Soluzione. Dire che una funzione è un diffeomorfismo significa che è differenziabile, biunivoca e l'inversa è ancora differenziabile. In questo esercizio, la mappa antipodale $A : S^2 \rightarrow S^2$ è la restrizione della mappa $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data dalla stessa formula $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Per prima cosa notiamo che $A^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ e quindi $A^{-1} = A$ e in particolare A è biunivoca e lo resta quando ristretta alla sfera S^2 . Inoltre A è chiaramente differenziabile su tutto \mathbb{R}^3 e quindi concludiamo con l'*Osservazione*.

Esercizio 8. (do Carmo, Esercizio 2-3.2) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione che manda un punto $p \in S$ nella sua proiezione ortogonale sul piano \mathbb{R}^2 dato da $z = 0$. La mappa π è differenziabile?

Soluzione. Anche in questo caso la proiezione $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ è la restrizione della proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ e dunque π è differenziabile per l'*Osservazione*.

Esercizio 9. (do Carmo, Esercizio 2-3.3) Dimostrare che il paraboloido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$$

è diffeomorfo a un piano.

Soluzione. In questo caso dobbiamo costruire una coppia di applicazioni differenziabili, inverse l'una dell'altra. Sia \mathbb{R}^2 il piano di equazione $z = 0$. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (x, y, 0) &\mapsto (x, y, x^2 + y^2) \\ \pi : S &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$

Le mappe \mathbf{x} e π sono inverse l'una dell'altra. Inoltre \mathbf{x} è differenziabile (ovvio) e π è differenziabile come nell'esercizio precedente in quanto restrizione della proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Più in generale, con lo stesso ragionamento si dimostra che

Proposizione. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ il grafico di f . Allora S è una superficie regolare (lo sappiamo) diffeomorfa ad U .

Esercizio 10. (do Carmo, Esercizio 2-3.8) Siano

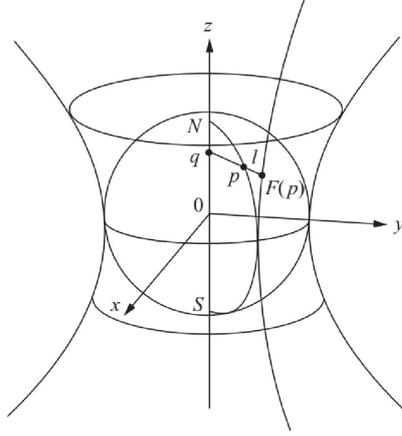
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

Denotiamo con $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ i poli nord e sud della sfera. Definiamo una funzione $F : S^2 - \{N, S\} \rightarrow H$ come segue: per ogni punto p , sia q l'intersezione fra l'asse z e la retta perpendicolare all'asse z condotta da p . Sia ℓ la semiretta di origine q che contiene p . Poniamo $F(p) = \ell \cap H$. Dimostrare che F è differenziabile.

Soluzione. Facciamo riferimento alla figura del do Carmo:



La funzione F “apre” la sfera nei poli e la deforma fino ad “adagiarla” sull’iperboloide.

Anche in questo caso, scriviamo la funzione F in coordinate. Sia $p = (x, y, z)$. La proiezione perpendicolare di p sull’asse z è $q = (0, 0, z)$ e poniamo $\mathbf{v} = p - q = (x, y, 0)$. La semiretta ℓ ha equazione parametrica $r = q + t\mathbf{v} = (tx, ty, z)$, con $t \geq 0$. L’intersezione $\ell \cap H$ si ottiene risolvendo l’equazione $(tx)^2 + (ty)^2 - z^2 = 1$. Ricordando che $t \geq 0$ si ha

$$t = \sqrt{\frac{1 + z^2}{x^2 + y^2}}$$

e dunque la funzione F è

$$F(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{1 + z^2}{x^2 + y^2}} x, \sqrt{\frac{1 + z^2}{x^2 + y^2}} y, z \right)$$

che è differenziabile sull’aperto $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$. Sempre per l’*Osservazione*, $F : S^2 \setminus \{P, N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è differenziabile in quanto restrizione di una funzione differenziabile.

Gli esercizi di questo ultimo gruppo, tratti dal paragrafo 2-4 del do Car-
mo, riguardano la determinazione del piano tangente ad una superficie. Il
primo esercizio del paragrafo, che non svolgiamo, dà la formula del piano
tangente ad una superficie in forma cartesiana, ben nota dai corsi di Analisi.
Per comodità, la riportiamo qui:

Osservazione. Il piano tangente alla superficie $f(x, y, z) = 0$ nel pun-
to (x_0, y_0, z_0) , dove 0 è un valore regolare, ha equazione

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Esercizio 11. (do Carmo, Esercizio 2-4.2) Determinare i piani tangenti alla superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nei punti della forma $(x, y, 0)$ e dimostrare che sono tutti paralleli all'asse z

Soluzione. La superficie data può essere vista come il luogo di zeri della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

Il differenziale di questa funzione nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

che si annulla solo nel punto $p = (0, 0, 0)$ e dunque l'unico valore critico è $f(p) = -1$. Dunque la superficie è regolare e nei punti del tipo $(x_0, y_0, 0)$ i suoi piani tangenti hanno equazione:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$$

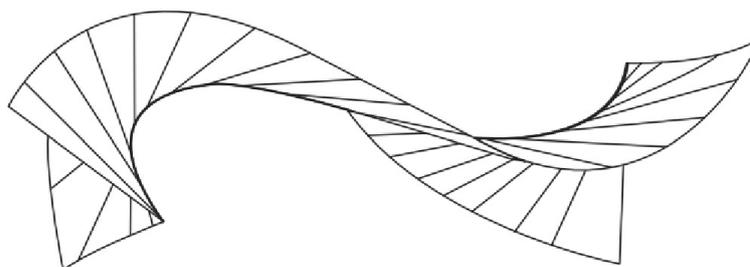
e sono quindi paralleli all'asse z .

Esercizio 12. (do Carmo, Esercizio 2-4.6) Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata biregolare. Consideriamo la *superficie tangente di α* (vedi Example 5 del paragrafo 2-3 del do Carmo), data dalla parametrizzazione

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad t \in I, v \neq 0$$

Per ogni $t_0 \in I$, dimostrare che i piani tangenti lungo la curva $\mathbf{x}(t_0, v)$ sono tutti uguali.

Soluzione. La superficie è l'unione di tutte le rette tangenti alla curva α .



Nella parametrizzazione data

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad t \in I, \quad v \neq 0$$

il parametro t rappresenta il movimento lungo la curva α e il parametro v è il movimento lungo le rette tangenti. La condizione $v \neq 0$ è indispensabile perché, come vedremo, per $v = 0$ il differenziale $d\mathbf{x}$ non ha rango 2 e quindi la parametrizzazione non è regolare.

La curva $\mathbf{x}(t_0, v)$ è dunque la retta tangente ad α nel punto $\alpha(t_0)$. Poiché $v \neq 0$, questa curva è in realtà l'unione di 2 semirette, date da $v > 0$ e

da $v < 0$. Ovviamente le due semirette stanno sulla stessa retta e si uniscono nel punto $\alpha(t_0) \in S$, che però è un punto non regolare della superficie.

Possiamo interpretare la domanda dell'esercizio in due modi: gli *spazi* tangenti (e cioè i sottospazi generati da \mathbf{x}_t e \mathbf{x}_v) sono tutti uguali oppure i *piani* tangenti sono uguali e cioè tutti i piani tangenti affini passanti per i punti della curva coincidono. In questo caso è vera l'affermazione più forte e cioè i piani tangenti affini coincidono.

Calcoliamo le derivate parziali della funzione \mathbf{x}

$$\mathbf{x}_t = \alpha'(t) + v\alpha''(t), \quad \mathbf{x}_v = \alpha'(t)$$

Si ha

$$\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_v = v(\alpha''(t) \wedge \alpha'(t))$$

Ricordiamo la formula della curvatura per parametrizzazioni qualunque:

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Per ipotesi la curvatura è sempre non nulla e quindi il vettore $\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_v$ è diverso da zero quando $v \neq 0$ (cioè fuori dalla curva α) e quindi i due vettori sono linearmente indipendenti e la parametrizzazione ha differenziale di rango 2. In particolare il vettore $\alpha''(t)$ è sempre non nullo e lo spazio tangente (generato da \mathbf{x}_t e \mathbf{x}_v) è lo spazio generato dai vettori $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$.

La curva $\mathbf{x}(t_0, v) = \alpha(t_0) + v\alpha'(t_0)$ è la retta tangente alla curva α nel punto $\alpha(t_0)$. Da ciò che abbiamo detto è chiaro che, se fissiamo t_0 , gli spazi tangenti sono tutti uguali fra loro perché sono sempre lo spazio generato dai vettori $\alpha'(t_0)$ e $\alpha''(t_0)$. Scriviamo allora il *piano* tangente affine: le equazioni parametriche del piano tangente sono

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{x}(t_0, v) + \lambda\mathbf{x}_t(t_0, v) + \mu\mathbf{x}_v(t_0, v) \\ &= \alpha(t_0) + v\alpha'(t_0) + \lambda(\alpha'(t_0) + v\alpha''(t_0)) + \mu\alpha'(t_0) \\ &= \alpha(t_0) + (v + \lambda + \mu)\alpha'(t_0) + \mu\alpha''(t_0) \end{aligned}$$

e poiché λ e μ sono parametri arbitrari, abbiamo sempre il piano passante per $\alpha(t_0)$ e parallelo ai vettori $\alpha'(t_0)$ e $\alpha''(t_0)$.

Esercizio 13. (do Carmo, Esercizio 2-4.10) (*Superfici tubolari*). Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, parametrizzata per arcolunghezza. Sia

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + r(\mathbf{n}(s) \cos v + \mathbf{b}(s) \sin v), \quad r \text{ costante } \neq 0, s \in I$$

la superficie parametrizzata (il *tubo* di raggio r intorno ad α) dove $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ sono rispettivamente il vettore normale e binormale della curva α . Dimostrare che, nei punti in cui \mathbf{x} è regolare, il vettore normale unitario alla superficie è

$$\mathbf{N}(s, v) = -\cos(v)\mathbf{n}(s) - \sin(v)\mathbf{b}(s)$$

Soluzione. La parametrizzazione data non è necessariamente iniettiva, in quanto il tubo potrebbe intersecare se stesso (può accadere se il raggio è troppo grande). Per ipotesi comunque assumiamo di essere in un punto in cui \mathbf{x} è regolare (in particolare iniettiva). Si ha

$$\mathbf{x}_s = \alpha'(s) + r(\mathbf{n}'(s) \cos v + \mathbf{b}'(s) \sin v), \quad \mathbf{x}_v = r(-\mathbf{n}(s) \sin v + \mathbf{b}(s) \cos v)$$

Usando le formule di Frenet per riscrivere $\mathbf{n}'(s)$ e $\mathbf{b}'(s)$ si ha (senza scrivere la dipendenza da s)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \mathbf{t} + r((-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \cos v - \tau\mathbf{n} \sin v) \\ &= (-rk \cos v + 1)\mathbf{t} - r\tau \sin v \mathbf{n} + r\tau \cos v \mathbf{b} \\ &= A\mathbf{t} - r\tau \sin v \mathbf{n} + r\tau \cos v \mathbf{b} \\ &= A\mathbf{t} + \tau\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

ponendo per brevità $A = -rk \cos v + 1$. Dunque il prodotto vettoriale vale

$$\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v = -Ar \sin v \mathbf{b} - Ar \cos v \mathbf{n}$$

e normalizzando si ha la tesi

$$\mathbf{N} = -\cos v \mathbf{n} - \sin v \mathbf{b}$$

Osservazione. Il verso del vettore normale è quello nella risposta data solo se A è positivo. Vediamo quando è vero:

$$A > 0 \iff -rk \cos v + 1 > 0 \iff rk \cos v < 1$$

Se $\cos v \leq 0$, la condizione è verificata. Altrimenti possiamo maggiorare $rk \cos v \leq rk$ e ottenere

$$r < \frac{1}{k}$$

Dunque se il raggio del tubo è abbastanza piccolo (maggiore è la curvatura della curva α , minore deve essere il raggio), la norma di $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$ è non nulla e il vettore \mathbf{N} punta verso l'interno del tubo.

Metrica su una superficie

Vogliamo ora studiare una superficie S dal punto di vista “metrico” e cioè vogliamo introdurre una distanza fra i suoi punti. Ovviamente possiamo usare la distanza in \mathbb{R}^3 ma vogliamo fare “geometria intrinseca” e cioè rimanendo sulla superficie senza usare lo spazio ambiente. Vogliamo cioè considerare S come uno spazio a se stante e provare a capire che geometria è possibile ottenere. L’esempio tipico è quello della superficie terrestre: la distanza fra due punti sulla Terra non si misura prendendo il segmento che li unisce nello spazio (altrimenti dovremmo scavare un sacco di tunnel!) ma in base alla lunghezza della strada che occorre percorrere per andare da un punto all’altro.

Per mettere in prospettiva il problema, analizziamo il caso delle curve: sia C una curva, che possiamo pensare parametrizzata per arcolunghezza e siano P e Q due punti su C . Qual è la distanza fra P e Q ? Se è consentito solo muoversi lungo la curva, c’è un solo modo di andare da P a Q : seguire il percorso della curva. Quindi la distanza fra P e Q è semplicemente la lunghezza dell’arco di curva di estremi P e Q . La parametrizzazione per arcolunghezza $\alpha(s) : I \rightarrow C$ è dunque una *isometria* fra l’intervallo I (con la sua distanza indotta dalla distanza sulla retta reale) e la curva: la distanza fra due punti $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ è uguale a $|s_2 - s_1|$ e cioè la stessa dei punti corrispondenti sull’intervallo. Dunque tutte le curve (di ugual lunghezza) sono isometriche fra loro e l’unica geometria di dimensione 1 è quella di un segmento sulla retta \mathbb{R} .

Osserviamo che è facile produrre “fisicamente” una isometria (cioè una

funzione che non cambia le distanze) fra una curva C qualunque e un segmento: basta pensare a C come un filo di ferro e l'isometria consiste nel "raddrizzarlo". Le distanze non cambiano (perché il filo di ferro non si allunga né accorcia) e ogni curva diventa un segmento.

Questo ci dice che concetti come "curvatura" e "torsione" non sono invarianti per isometrie di curve ma solo, come abbiamo dimostrato, per isometrie dello spazio ambiente. Due esseri intelligenti che vivono su due curve diverse e possono solo muoversi all'interno ognuno della propria curva, scoprirebbero la stessa geometria.

La scoperta straordinaria di Gauss fu che questo non è più vero per le superfici: esistono superfici con geometrie diverse. Per esempio, il piano e una qualunque porzione di sfera non sono mai isometriche e anche due sfere di raggio diverso non sono isometriche. Invece i cilindri circolari retti sono (localmente, cioè per porzioni sufficientemente piccole) isometrici al piano: la *curvatura* di un cilindro è illusoria, quella di una sfera è reale.

Più strano ancora è il fatto che superfici apparentemente molto diverse possono essere isometriche. Vedremo che la catenoide e l'elicoide sono (localmente) isometriche: due esseri intelligenti che vivono uno sulla catenoide e l'altro sull'elicoide e possono solo muoversi all'interno ognuno della propria superficie, scoprirebbero la stessa geometria.

Invece, due esseri intelligenti che vivono su due sfere di raggio diverso scoprirebbero due geometrie diverse: le formule per lunghezze o aree risultano diverse nei due casi!

1. La prima forma fondamentale

In questo paragrafo definiamo la *prima forma fondamentale*, una forma quadratica definita sullo spazio tangente $T_p S$ ad una superficie in un punto. Tramite questa forma quadratica è possibile calcolare la lunghezza di curve tracciate sulla superficie, gli angoli fra curve, l'area di una regione sulla superficie e altre quantità "geometriche". Vedremo nel prossimo paragrafo la definizione di metrica su una superficie e come la prima forma sia legata alle isometrie fra superfici.

Osserviamo che il nome *prima* forma suggerisce che vi siano altre forme quadratiche legate allo studio delle superfici. Introdurremo la *seconda* forma nel prossimo capitolo. Non vi è una *terza* forma.

1.1. Definizione della prima forma. Per definire la distanza fra due punti, possiamo imitare quello che si fa in geometria euclidea nel piano usuale: la distanza fra due punti è la *lunghezza* del *segmento* che li unisce

(e cioè è la lunghezza di una curva) e il segmento è quella curva, fra tutte quelle che uniscono i due punti, che ha la lunghezza *minima*.

Dunque basiamo il concetto di distanza su quello di lunghezza di una curva e poniamo il problema:

Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva. Come si calcola la lunghezza di α ?

Questo lo sappiamo:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Per determinare l'integrando dobbiamo quindi saper calcolare la lunghezza di certi vettori ma osserviamo un fatto fondamentale:

$$\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$$

perciò dobbiamo saper calcolare la lunghezza dei vettori che stanno negli spazi tangenti alla superficie. Questi spazi tangenti sono spazi vettoriali e per avere il concetto di lunghezza occorre che siano spazi vettoriali *euclidei* e cioè dobbiamo avere un *prodotto scalare* su di essi.

Ricordiamo che un prodotto scalare (su uno spazio vettoriale reale) è una forma bilineare, simmetrica, non degenera, definita positiva. Ad un prodotto scalare è associata una *forma quadratica* e la conoscenza di questa è sufficiente per calcolare le lunghezze.

Sia $p \in S$. Poiché $T_p S \subseteq T_p \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$, su $T_p S$ è indotto un prodotto scalare da quello standard di \mathbb{R}^3 .

Per $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p S$ poniamo

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle \text{ come vettori di } \mathbb{R}^3$$

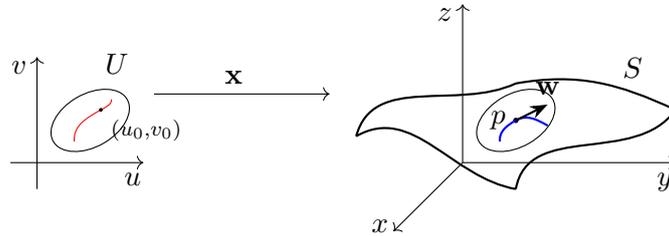
La forma bilineare $\langle -, - \rangle_p$ è un prodotto scalare su $T_p S$ e poniamo:

Definizione 1.1. La forma quadratica associata a $\langle -, - \rangle_p$, data da

$$I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = \|\mathbf{w}\|^2$$

è detta *prima forma fondamentale* della superficie S in p .

Il significato di questa definizione non è del tutto chiaro perché in fondo stiamo usando il prodotto scalare di \mathbb{R}^3 e quindi sembra che stiamo usando lo spazio ambiente. Il fatto è che per calcolare la prima forma, basta conoscere la parametrizzazione. Scriviamo i dettagli:



Sia $\mathbf{w} \in T_p S$. Per definizione questo significa che è il vettore tangente di una curva contenuta in S : $\mathbf{w} = \alpha'(0)$, dove $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ e $(u(t), v(t))$ è l'espressione della curva α in coordinate locali. Allora, come abbiamo visto nella dimostrazione della [Proposizione 3.3.7](#) (vedi anche il [commento \(4\)](#) dopo la proposizione)

$$\mathbf{w} = \alpha'(0) = u'(0)\mathbf{x}_u + v'(0)\mathbf{x}_v$$

e dunque

$$\begin{aligned} I_p(\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle (u'(0))^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle (u'(0)) (v'(0)) + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle (v'(0))^2 \end{aligned}$$

Ricordiamo che \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v sono funzioni, calcolate nel punto (u, v) . Poniamo, come in figura, $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$ e scriviamo

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p$$

La notazione E , F , G per questi tre prodotti scalari è dovuta a Gauss ed è standard con questo significato dal 1827. Qualunque libro di geometria differenziale leggerete nella vostra vita userà queste lettere con questo significato.

Scrivendo la prima forma fondamentale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ si ha: se $\mathbf{w} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$, possiamo scrivere in coordinate $\mathbf{w} = (a, b)$ e

$$I_p(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

e cioè la matrice $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ è la matrice della forma quadratica (e anche del prodotto scalare) su $T_p S$ nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

Osserviamo quindi che E , F , G sono tre funzioni differenziabili, definite sul dominio U , facili da scrivere perché coinvolgono solo derivate della parametrizzazione e operazioni algebriche (somme e prodotti). Possiamo pensare alla prima forma fondamentale I_p in due modi diversi:

- (1) I_p è, al variare di p , una *famiglia di forme quadratiche* su uno spazio vettoriale fissato di dimensione 2, famiglia che varia in modo differenziabile
- (2) I_p è, al variare di p , una forma quadratica sullo spazio vettoriale $T_p S$ e quindi tutte le fibre del fibrato tangente TS diventano spazi vettoriali euclidei, in modo che fibre “vicine” hanno forme quadratiche “vicine” (il prodotto scalare varia in modo differenziabile).

Se il fibrato tangente è banale, le due descrizioni sono equivalenti. Poiché la parte di superficie descritta da una sola parametrizzazione è diffeomorfa ad un aperto di \mathbb{R}^2 , il fibrato tangente è sempre “localmente banale” e quindi le due descrizioni sono localmente equivalenti.

In generale la descrizione corretta è la seconda e per avere un quadro completo quando c'è più di una parametrizzazione, bisognerà capire come cambia la matrice della prima forma al cambiamento di base su $T_p S$ indotto da un cambiamento di coordinate.

Osservazione. Le quantità E, F, G sono i coefficienti della matrice della prima forma fondamentale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. La notazione moderna per questi coefficienti è

$$E = g_{11}, \quad F = g_{12} = g_{21}, \quad G = g_{22}$$

e la matrice 2×2 data da (g_{ij}) è detta la *matrice della metrica* o, in corsi più sofisticati, il *tensore metrico*.

Questa notazione ha il vantaggio di poter essere usata in formule con gli indici ma soprattutto di poter essere estesa a dimensioni maggiori di 2 ed è quindi usata per rappresentare la metrica di una varietà di dimensione n . Per le superfici non c'è una enorme convenienza e continuare ad usare i simboli che usava Gauss dà un piacevole senso di appartenenza alla Storia della Matematica.

Prima di studiare l'effetto di un cambiamento di coordinate vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.2. Sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ il piano passante per il punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e generato dai vettori *ortonormali* \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 . La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2$$

e derivando si ha:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = 1$$

e quindi le funzioni sono costanti. Osserviamo che i vettori tangenti ad un piano sono semplicemente i vettori che stanno sul piano e stiamo dicendo che un vettore $\mathbf{w} = (a, b)$ nella base ortonormale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ ha lunghezza al quadrato pari a $a^2 + b^2$.

Questo è il teorema di Pitagora, che esprime le lunghezze dei vettori tangenti ad un piano mediante il prodotto scalare standard.

Il primo esempio era ovvio, ma almeno abbiamo trovato un risultato familiare e convincente. Vediamo adesso un altro esempio:

Esempio 1.3. Sia $S =$ cilindro circolare retto di asse l'asse z . Possiamo ottenerlo ruotando una retta parallela all'asse z e una parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Lo spazio tangente ha base

$$\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$$

e quindi $E \equiv 1$, $F \equiv 0$, $G \equiv 1$ e cioè piano e cilindro hanno la stessa prima forma fondamentale. Vedremo che questo dirà che piano e cilindro sono superfici localmente isometriche.

Esercizio 1.4. Calcolare la prima forma fondamentale di tutte le superfici che abbiamo visto fino ad adesso (in particolare: sfera, toro, catenoide, elicoide).

1.2. L'elemento di lunghezza. Con i concetti e le notazioni appena introdotte, torniamo al problema di calcolare la lunghezza di una curva. Sia dunque $\alpha : I \rightarrow S$ una curva e supponiamo che l'immagine sia tutta contenuta nell'intorno coordinato coperto da una parametrizzazione \mathbf{x} . Possiamo allora scrivere

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

dove $(u(t), v(t))$ è l'espressione di α in coordinate locali. Allora

$$\alpha'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v$$

che ha norma al quadrato

$$\|\alpha'(t)\|^2 = E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2$$

e dunque la lunghezza della curva è

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2} dt$$

Se calcoliamo la funzione “arcolunghezza” abbiamo

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2} d\tau$$

e se scriviamo

$$s(t) = \int_a^t ds$$

pensando a una funzione come l'integrale del suo differenziale possiamo interpretare ds come l'*elemento di arcolunghezza* (che non si capisce cosa vuol dire). Di solito si scrive questa quantità al quadrato

$$(13) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

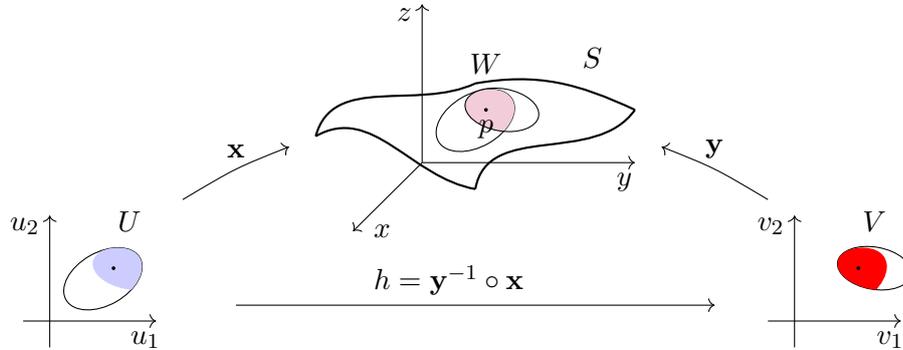
e “dividendo per dt^2 ” come avrebbero fatto Leibniz o Eulero, e come faceva Gauss, si ottiene

$$(14) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

ATTENZIONE. La [formula \(13\)](#) è solo un modo di scrivere e non significa niente (o meglio, è la scrittura di uno $(0, 2)$ -*tensore simmetrico*, ma questo è un argomento per un altro corso. . .). Invece la [formula \(14\)](#) ha un significato preciso che comprendiamo bene: esprime la derivata (al quadrato) dell'arcolunghezza $s(t)$ rispetto a t per una curva su una superficie in termini della sua espressione in coordinate locali (le derivate u' e v') e la geometria della superficie (i termini E , F , G).

La notazione per il ds^2 (che si legge “ ds quadro”) della [formula \(13\)](#) è molto tradizionale (è stata inventata e usata ben prima che venissero inventati i tensori) e, se usata in modo opportuno, è molto utile per semplificare i calcoli e le formule. Vedremo come si usa quando faremo le formule per i cambiamenti di coordinate. Trattando il ds^2 come un oggetto “reale” le formule si semplificano e si comportano in modo simile ai cambiamenti di variabile negli integrali e in realtà sono la stessa cosa. Questo è esattamente il significato dell'attributo *tensoriale*: il ds^2 è un oggetto la cui espressione locale si comporta in modo appropriato quando si cambiano le coordinate.

1.3. Cambiamenti di coordinate. Ritorniamo ai cambiamenti di coordinate su una superficie e ai cambiamenti di base sugli spazi tangenti. La situazione è quella vista in precedenza



dove $h = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x} : U \rightarrow V$ è il cambiamento di coordinate. Chiamiamo (u_1, u_2) le coordinate su U e (v_1, v_2) le coordinate su V . Usando queste coordinate la funzione h si scrive

$$h(u_1, u_2) : \begin{cases} v_1 = v_1(u_1, u_2) \\ v_2 = v_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

Sullo spazio tangente $T_p S$ ci sono due basi individuate da queste parametrizzazioni, date dai vettori delle derivate parziali e cioè $\{\mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2}\}$ e $\{\mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2}\}$. Consideriamo ora la funzione $\varphi : S \rightarrow S$ data dall'identità. Il differenziale $d\varphi_p : T_p S \rightarrow T_p S$ è ovviamente l'identità fra questi spazi vettoriali e nella basi indicate avrà come matrice la matrice Jacobiana $J = J(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x})$, come abbiamo dimostrato nella [Proposizione 3.3.10](#).

Questo vuol dire che la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate è la matrice del cambiamento di base sullo spazio tangente. Naturalmente, nessuno si ricorda mai cosa vuol dire “matrice del cambiamento di base” e in particolare, stiamo scrivendo il *cambiamento di base* o il *cambiamento di coordinate*? (le matrici sono l'inversa l'una dell'altra, ma è difficile ricordarsi chi è chi).

C'è un modo di scrivere molto suggestivo che ci permette di ricordare con esattezza la situazione ed è utile nei calcoli. Prendiamo un vettore tangente $\mathbf{w} \in T_p S$ e scriviamolo nelle due basi

$$\mathbf{w} = a_1 \mathbf{x}_{u_1} + a_2 \mathbf{x}_{u_2} = b_1 \mathbf{y}_{v_1} + b_2 \mathbf{y}_{v_2}$$

Si ha $d\varphi_p(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ perché $d\varphi_p$ è l'identità. La scrittura matriciale è

$$d\varphi_p(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Le espressioni a_1, a_2, b_1, b_2 sono delle lettere che rappresentano le coordinate del vettore \mathbf{w} nelle due basi. Possiamo scegliere le lettere che vogliamo e

spesso una notazione suggerisce il significato meglio di un'altra. Scriviamo:

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_{u_1} du_1 + \mathbf{x}_{u_2} du_2 = \mathbf{y}_{v_1} dv_1 + \mathbf{y}_{v_2} dv_2$$

e cioè poniamo semplicemente $a_1 = du_1$ e così via. I simboli du_1, \dots rappresentano numeri e non altro.

Osserviamo che i coefficienti scalari sono *a destra* del vettore, ma la moltiplicazione fra scalari è commutativa e quindi non importa se li scriviamo prima o dopo. Scrivendo in questo modo la notazione *suggerisce* un differenziale.

Se adesso interpretiamo i vari du, dv come differenziali, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} du_2 \\ dv_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2} du_2 \end{aligned}$$

che è la stessa espressione scritta sopra. Quindi per ricordarsi la formula giusta basta pensare ai differenziali e usare la notazione solita dell'Analisi.

Vediamo un altro esempio dell'utilità di questa scrittura. I coefficienti della prima forma sono i prodotti scalari dei vettori derivate parziali della parametrizzazione e quindi, quando ne abbiamo due che coprono una parte in comune sulla superficie, dovremmo scriverli in modo diverso. Mantenendo le notazioni \mathbf{x} e \mathbf{y} per le due parametrizzazioni, poniamo

$$E_1 = \langle \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle_p \quad F_1 = \langle \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle_p \quad G_1 = \langle \mathbf{x}_{u_2}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle_p$$

e

$$E_2 = \langle \mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2} \rangle_p \quad F_2 = \langle \mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2} \rangle_p \quad G_2 = \langle \mathbf{y}_{v_2}, \mathbf{y}_{v_2} \rangle_p$$

Qual è la relazione fra questi coefficienti? Poiché rappresentano la matrice della stessa forma quadratica scritta in basi diverse, dovrebbero cambiare come cambiano le forme quadratiche e cioè

$$I_1 = M^t I_2 M$$

dove la matrice M è una opportuna matrice. M è il cambiamento di base? O il cambiamento di coordinate? Oppure la trasposta va scritta dopo? Qual è la formula giusta: $M = J$, $M = J^{-1}$, $M = J^t$?

Anche qui, la notazione differenziale ci aiuta a ricordare la formula corretta. Scriviamo $\mathbf{w} \in T_p S$ come prima e cioè

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_{u_1} du_1 + \mathbf{x}_{u_2} du_2 = \mathbf{y}_{v_1} dv_1 + \mathbf{y}_{v_2} dv_2$$

La prima forma fondamentale dà il quadrato della lunghezza di un vettore. Ricordiamo l'espressione simbolica:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

Poiché la lunghezza di un vettore non cambia quando si cambia il sistema di coordinate, otteniamo

$$E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 du_2 + G_1 du_2^2 = E_2 dv_1^2 + 2F_2 dv_1 dv_2 + G_2 dv_2^2$$

o, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} du_1 & du_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_1 & dv_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix}$$

Ricordando che

$$\begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$$

e sostituendo, si ha

$$\begin{bmatrix} du_1 & du_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du_1 & du_2 \end{bmatrix} J^t \begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$$

e cioè

$$I_1 = J^t I_2 J$$

dunque nuovamente è la matrice J , la Jacobiana del cambiamento di coordinate, che esprime come cambiano i coefficienti della prima forma.

1.4. Angoli fra curve. Quando due curve si intersecano nel piano, l'angolo che formano è usualmente definito come l'angolo formato dai vettori tangenti. Usiamo la stessa definizione nel caso di due curve su una superficie.

Siano $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ due curve regolari tali che $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p \in S$. I vettori tangenti $\alpha'(t_0)$ e $\beta'(t_0)$ appartengono entrambi allo spazio vettoriale $T_p S$ e in questo spazio abbiamo il prodotto scalare dato dalla prima forma I_p nel punto $p \in S$.

Definiamo dunque l'angolo θ formato da α e β in p come l'angolo convesso tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(t_0)\|}$$

Il termine a destra dipende solo dalla prima forma. Per esempio, le linee coordinate $u = \text{costante}$ e $v = \text{costante}$ hanno vettori tangenti rispettivamente \mathbf{x}_v e \mathbf{x}_u e quindi formano un angolo φ dato da

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle}{\|\mathbf{x}_v\| \cdot \|\mathbf{x}_u\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Le linee coordinate passanti per il punto $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ sono dunque perpendicolari se e solo se $F(u_0, v_0) = 0$.

Esercizio 1.5. Per tutte le superfici incontrate nelle lezioni precedenti e negli esercizi, determinare se e quando le loro linee coordinate sono perpendicolari. In particolare, dimostrare che su una superficie di rotazione i meridiani e i paralleli sono sempre ortogonali.

1.5. Area di una porzione di superficie. Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ sono due vettori, è ben noto dall'algebra vettoriale che il numero

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot \sin \varphi$$

dove φ è l'angolo formato dai due vettori, misura l'area del parallelogramma di lati \mathbf{v} e \mathbf{w} .

Sia ora S una superficie e sia $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale. La funzione

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| : U \rightarrow \mathbb{R}$$

misura quindi, al variare del punto $q \in U$, l'area del parallelogramma di lati \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v .

Con la scrittura differenziale che abbiamo usato nel [sotto-paragrafo 1.3](#), i vettori $\mathbf{x}_u du$ e $\mathbf{x}_v dv$ sono semplicemente dei multipli dei due vettori di base \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v . Il fatto che i coefficienti si indichino con du e dv può far pensare a multipli "infinitesimali" (questa era l'intuizione di Leibniz). Allora il parallelogramma di lati $\mathbf{x}_u du$ e $\mathbf{x}_v dv$ sarà un parallelogramma di "area infinitesimale" e sappiamo che per calcolare l'area (così come le lunghezze) si integra il contributo infinitesimale.

Viene quindi in mente di considerare la seguente situazione: sia $Q \subseteq U$ una regione *limitata*. L'ipotesi di limitatezza implica in particolare che la chiusura di Q è un compatto e consideriamo la regione $R = \mathbf{x}(Q) \subseteq S$ sulla superficie S .

L'area di Q nel piano è (per definizione)

$$A(Q) = \iint_Q du dv$$

se l'integrale esiste. Questa è la prima ovvia ipotesi da fare sulla regione Q . Poiché la chiusura di Q è compatta, se Q è sufficientemente regolare l'integrale esiste.

Tramite la parametrizzazione \mathbf{x} copriamo la regione R con Q *una volta sola* perché \mathbf{x} è iniettiva e quindi ci aspettiamo che l'area di R sia legata all'area di Q da un fattore dato dalla deformazione introdotta da \mathbf{x} . Per esempio, se \mathbf{x} è una funzione lineare, questo fattore è dato dal valore assoluto del determinante, come visto in Analisi.

Diamo allora la seguente definizione:

Definizione 1.6. Sia S una superficie, sia $R \subseteq S$ una regione limitata contenuta nell'immagine di una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ e sia $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$. Il numero

$$A(R) = \iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| du dv$$

si dice *area* di R

L'integrando è proprio l'area di un parallelogramma infinitesimale. Notiamo che questo parallelogramma infinitesimale sta sul piano tangente (e non sulla superficie) proprio come l'integrando $\|\alpha'(t)\| dt$ nella formula della lunghezza di una curva è la lunghezza di un vettore tangente "infinitesimale" $\alpha'(t) dt$ che sta sulla retta tangente e non sulla curva.

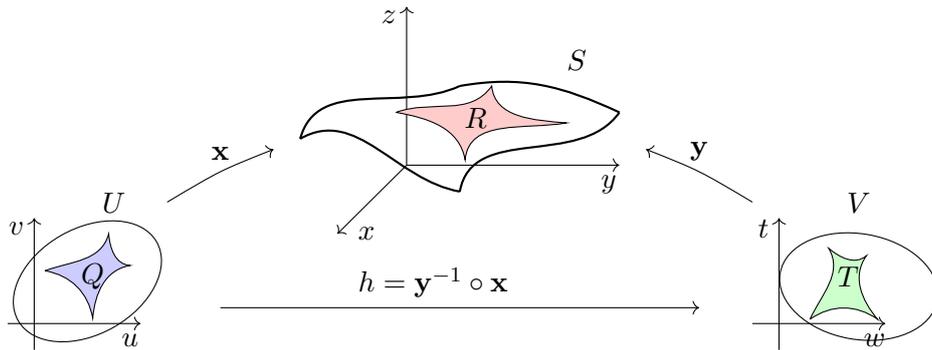
Per come è scritta, l'area di una regione si ottiene dalla parametrizzazione. Dobbiamo dunque dimostrare che non dipende dalla parametrizzazione, proprio come la lunghezza di una curva è una proprietà geometrica che non dipende dalla parametrizzazione. Vale infatti il:

Lemma 1.7. *L'integrale*

$$\iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| dudv$$

è indipendente dalla parametrizzazione.

Dimostrazione. La situazione è:



dove \mathbf{x} e \mathbf{y} sono parametrizzazioni tali che

$$R = \mathbf{x}(Q) = \mathbf{y}(T)$$

e cioè $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$ e $T = \mathbf{y}^{-1}(R)$ e come prima $h = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ è il cambiamento di coordinate. La matrice Jacobiana è

$$J = J(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}) = \frac{\partial(w, t)}{\partial(u, v)}$$

Poiché $\mathbf{x} = \mathbf{y} \circ h$, si ha

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{y}_w \frac{\partial w}{\partial u} + \mathbf{y}_t \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{y}_w \frac{\partial w}{\partial v} + \mathbf{y}_t \frac{\partial t}{\partial v}$$

e quindi

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t \cdot \det J$$

Integrando

$$\begin{aligned} \iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv &= \iint_Q \|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\| \cdot |\det J| \, du \, dv \\ &= \iint_T \|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\| \, dw \, dt \end{aligned}$$

per la formula di cambiamento di variabile negli integrali doppi e dunque l'espressione per l'area non dipende dalla parametrizzazione. \square

Nella formula dell'area l'integrando contiene un prodotto vettoriale e quindi sembra aver bisogno dello spazio \mathbb{R}^3 per poter essere definito e non solo della superficie e della prima forma. Il prossimo esercizio mostra che in realtà l'integrando dipende solo dalla prima forma e quindi è intrinseco alla superficie.

Esercizio 1.8. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ due vettori. Dimostrare che

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2$$

Dunque l'integrando nella formula dell'area è

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{\|\mathbf{x}_u\|^2 \cdot \|\mathbf{x}_v\|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

e dipende solo dalla prima forma fondamentale. Calcoliamo per esempio l'area di qualche superficie.

Esempio 1.9. Calcoliamo l'area della sfera. Usiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

già vista in precedenza. Il dominio di integrazione è Q , dato dalle limitazioni $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, e copre l'intera sfera. Per avere la parametrizzazione iniettiva, dovremmo prendere le disuguaglianze strette, perché prendendole non strette copriamo un meridiano 2 volte. Questo però non cambia l'integrale in quanto una curva (il meridiano) ha misura 2-dimensionale (l'area) nulla.

Le derivate sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \mathbf{x}_\varphi &= (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

e quindi

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \sin^2 \theta$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 A(S^2) &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi |\sin \theta| \, d\theta \right) d\varphi \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^\pi |\sin \theta| \, d\theta \right) \quad \text{l'integrando dipende solo da } \theta \\
 &= 2\pi \cdot \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) \quad \text{perché } \sin \theta \geq 0 \text{ per } 0 \leq \theta \leq \pi \\
 &= 2\pi \cdot \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \\
 &= 2\pi[1 + 1] = 4\pi
 \end{aligned}$$

Se il raggio della sfera è R , allora si ha

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 \theta$$

e l'area risulta $4\pi R^2$.

Esempio 1.10. Calcoliamo l'area del toro. Ruotiamo la circonferenza sul piano xz di raggio r con centro il punto $(a, 0, 0)$. La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = (a + r \cos v) \cos u \\ y = (a + r \cos v) \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$$

e il dominio di integrazione è il quadrato $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Calcolando le derivate parziali e i coefficienti della prima forma (esercizio!) si ha

$$E = (a + r \cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

L'integrando è quindi

$$\sqrt{EG - F^2} = r(a + r \cos v)$$

senza valori assoluti perché entrambi i termini sono sempre positivi e una semplice integrazione mostra che

$$A(T) = 4\pi^2 r a$$

2. Isometrie fra superfici

In questo paragrafo diamo la definizione di metrica su una superficie di cui abbiamo parlato nell'introduzione a questo capitolo e studiamo le isometrie fra superfici. In particolare studiamo la relazione fra isometrie e prima forma fondamentale. Questa è l'idea originale di Gauss, che studiò a fondo il

concetto di metrica sulle superfici e si rese conto che le superfici, a differenza delle curve, possiedono “geometria intrinseca”, cioè proprietà che non variano anche se cambia l’immersione nello spazio.

Nel 1854 Bernhard Riemann scrisse la sua famosa tesi di abilitazione *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria)*. Sviluppando un tema proposto da Gauss, Riemann rivoluzionò le concezioni geometriche del tempo e generalizzò il lavoro di Gauss in tutte le dimensioni. Introdusse le *varietà differenziabili* e la struttura metrica su di esse, fino alla definizione del *tensore di Riemann* che è l’estensione a tutte le dimensioni del concetto di curvatura Gaussiana. Vedrete un primo esempio di studio di geometria riemanniana l’anno prossimo nel corso di Meccanica Razionale e poi più a fondo nei corsi di Geometria della Laurea Magistrale.

2.1. Metrica su una superficie. Sia S una superficie regolare. Poiché $S \subseteq \mathbb{R}^3$, che è uno spazio metrico, S ha una metrica indotta.

In \mathbb{R}^3 la distanza fra due punti p, q è la lunghezza del segmento \overline{pq} e quindi è la lunghezza minima di tutti i cammini che uniscono i due punti. Se adesso consideriamo $p, q \in S$, la distanza nella metrica indotta è la stessa (lunghezza del segmento \overline{pq}) ma in generale non c’è un cammino in S che ha quella lunghezza e in effetti questo capita se e solo se il segmento \overline{pq} è contenuto nella superficie.

Non c’è più dunque il significato di “distanza” come “minima lunghezza di un cammino”. Per ritrovare questa corrispondenza dobbiamo definire una nuova distanza su S , che dipenda solo dai punti di S e non dallo spazio ambiente e che dia quindi una *geometria intrinseca*.

Si può procedere nel modo seguente: per ogni $p, q \in S$ poniamo

$$d_S(p, q) = \inf_C \{\ell(C)\}$$

dove $\ell(C)$ = lunghezza dell’arco di curva C e l’estremo inferiore è preso sull’insieme di tutte le curve su S regolari a tratti (cioè con un numero finito di punti singolari) che uniscono p e q .

Proposizione 2.1. d_S è una distanza su S .

Dimostrazione. La funzione d_S è simmetrica perché i cammini da p a q sono gli stessi di quelli da q a p percorsi in senso inverso e quindi la lunghezza non cambia.

Poiché $d_S(p, q) \geq \|q - p\|$ (dove $\|q - p\|$ è la distanza euclidea in \mathbb{R}^3), si ha anche che $d_S(p, q) \geq 0$ ed è nulla se e solo se $p = q$.

Siano p, q, r tre punti e siano C una curva da p a q e D una curva da q a r . Allora la curva $C + D$ (ottenuta percorrendo prima C e poi D) è

una curva che unisce p a r ed è ancora regolare a tratti perché ha al più un punto singolare in più rispetto a quelli di C e D . Questo mostra che le curve che uniscono p a r passando per q fanno parte dell'insieme su cui si prende l'inf per calcolare $d_S(p, r)$ e quindi $d_S(p, r) \leq d_S(p, q) + d_S(q, r)$. Dunque d_S soddisfa anche la disuguaglianza triangolare ed è quindi una distanza. \square

Definizione 2.2. La funzione d_S si chiama *distanza intrinseca* su S .

Useremo questo nome quando la vogliamo confrontare con la distanza su S indotta da \mathbb{R}^3 altrimenti la chiameremo semplicemente distanza.

Esempio 2.3. Se S è una sfera, la distanza intrinseca $d_S(p, q)$ è la lunghezza dell'arco di cerchio massimo che unisce P e Q . La distanza intrinseca è quella usata in "geografia" e dà la distanza fra due punti sulla superficie della terra.

La distanza indotta da \mathbb{R}^3 corrisponde a scavare un "tunnel" che unisce in linea retta i due punti sulla superficie (il segmento \overline{pq}).

Esempio 2.4. Non sempre esiste un cammino di lunghezza uguale alla distanza intrinseca e cioè non sempre l'estremo inferiore è un minimo. Sia $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ il piano meno un punto (in questo esempio senza l'origine). S è una superficie regolare perché è un aperto in una superficie regolare, il piano. Se prendiamo i punti $p = (1, 1)$ e $q = (-1, -1)$, è possibile trovare cammini di lunghezza arbitrariamente vicina a $2\sqrt{2}$, che è la lunghezza del segmento da p a q : basta prendere la diagonale, togliere il segmento da $(\varepsilon, \varepsilon)$ a $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ e sostituirlo con una semicirconferenza di centro l'origine e raggio $\varepsilon\sqrt{2}$ (fare un disegno!!). Quindi $d_S(p, q) = 2\sqrt{2}$. Però l'unico cammino nel piano di lunghezza esattamente $2\sqrt{2}$ è il segmento da p a q , che non è contenuto in S .

In questo caso, la distanza intrinseca e la distanza indotta dall'ambiente coincidono e cioè per ogni coppia di punti $p, q \in S$ vale

$$d_S(p, q) = \|q - p\|$$

però in S non sempre esistono i cammini di minima lunghezza.

Con la distanza intrinseca S diventa uno spazio topologico e una delle condizioni che S sia una superficie regolare è esattamente che questa topologia sia la stessa di quella di sottospazio di \mathbb{R}^3 con la topologia euclidea (ricordiamo che metriche diverse possono indurre la stessa topologia).

Esempio 2.5. Cosa capita se diamo la definizione di distanza intrinseca per i punti di una curva C ? Dati due punti p e q , c'è un solo cammino sulla curva che li unisce ed è esattamente l'arco della curva da p a q . Dunque la distanza intrinseca fra due punti è la lunghezza dell'arco di curva che li unisce e cioè l'*arcodistanza*.

Vogliamo ora definire il concetto di *isometria* fra superfici. Di solito un'isometria è una funzione che conserva le distanze fra i punti. Poiché la distanza fra due punti su una superficie è definita usando le lunghezze delle curve che congiungono i due punti appare ragionevole definire il concetto di isometria mediante la lunghezza delle curve. Diamo quindi la seguente:

Definizione 2.6. Sia $f : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo fra le superfici M e N . f è una *isometria* se per ogni curva C tracciata su M si ha

$$\ell(C) = \ell(f(C))$$

dove $f(C)$ è la curva su N immagine mediante f di C e $\ell(C)$ è la lunghezza della curva C .

Osserviamo che l'ipotesi che f sia un diffeomorfismo è essenziale: f induce una biiezione fra gli insiemi delle curve su M e su N . In questo modo, una isometria secondo questa definizione conserva le distanze fra i punti.

La condizione non è comunque troppo restrittiva in quanto una funzione che conserva le distanze è sempre iniettiva (perché?) e quindi biiettiva con la sua immagine. La vera restrizione è che chiediamo che l'inversa sia ancora differenziabile e cioè che il differenziale df_p sia invertibile in ogni punto.

Esempio 2.7. Abbiamo già osservato nell'introduzione al capitolo che una parametrizzazione per arcolunghezza è una isometria fra il segmento I (con la sua metrica euclidea standard) e la curva C con la distanza intrinseca e quindi ogni curva (non chiusa) è isometrica ad un segmento e due segmenti sono isometrici se e solo se hanno la stessa lunghezza. Perciò, a meno di isometrie, le curve della stessa lunghezza sono tutte "uguali" fra loro.

Torniamo al caso delle superfici e analizziamo il significato della definizione di isometria scrivendo il diffeomorfismo f in coordinate locali: siano $D \subset \mathbb{R}^2$ e $E \subset \mathbb{R}^2$ due aperti connessi del piano. Indicheremo con (u_1, v_1) le coordinate in D e con (u_2, v_2) le coordinate in E .

Siano ora $\mathbf{x} : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} : E \rightarrow N \subset \mathbb{R}^3$ due parametrizzazioni regolari. La funzione $f : M \rightarrow N$ induce (in modo unico, poiché \mathbf{x} e \mathbf{y} sono biettive sulle loro immagini) una funzione $\bar{f} : D \rightarrow E$, data da $\bar{f} = \mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}$, che scriviamo in coordinate come:

$$\bar{f}(u_1, v_1) = (u_2(u_1, v_1), v_2(u_1, v_1))$$

Il diagramma è

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \mathbf{x} \uparrow & & \uparrow \mathbf{y} \\ D & \xrightarrow{\bar{f}} & E \end{array}$$

e poiché f è un diffeomorfismo, anche \bar{f} lo è.

Facciamo ora un'osservazione importante che semplificherà molto i calcoli successivi. La matrice del differenziale df_P dipende ovviamente dalle parametrizzazioni \mathbf{x} e \mathbf{y} che usiamo per descrivere le superfici M e N .

Lemma 2.8. *Se f è un diffeomorfismo, è sempre possibile effettuare un cambiamento di coordinate (e cioè cambiare le parametrizzazioni locali) in modo che la matrice di df_p sia la matrice unità, identicamente in p .*

Dimostrazione. Nel diagramma commutativo precedente, \bar{f} è un diffeomorfismo e può essere interpretato come un cambiamento di coordinate. Il diagramma può essere allora riscritto come:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow \mathbf{x} & & \uparrow \mathbf{y} \\ & & E \\ & & \uparrow \bar{f} \\ D & \xrightarrow{\bar{g}=\text{id}} & D \end{array}$$

In queste nuove coordinate, le parametrizzazioni sono $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \circ \bar{f}$ e f è rappresentata da \bar{g} cioè l'identità. Quindi in queste coordinate si ha in ogni punto $p \in M$:

$$df_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Osservazione. Ricordiamo che la matrice di un'applicazione lineare dipende dalle basi usati negli spazi vettoriali dominio e codominio. Se si cambiano le due basi in modo indipendente, la nuova matrice è legata alla vecchia da una formula del tipo

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot Q$$

dove P e Q sono le matrici dei cambiamenti di base e sono matrici *diverse*. Si può quindi trasformare B in modo radicale, molto di più di quanto si trasformi la matrice di un endomorfismo, dove di solito si fa lo stesso cambiamento di base nel dominio e nel codominio.

Per la matrice del differenziale di una funzione differenziabile, le basi che si usano negli spazi tangenti sono quelle date dalla parametrizzazioni locali. Nella dimostrazione del lemma precedente, si lascia invariata la base del dominio e si cambia quella del codominio. Sfruttando il fatto che B (la matrice di df_P) è invertibile, si ottiene il risultato voluto prendendo $Q = \text{id}$

(la base non cambia nel dominio) e $P = B$ (si prendono i vettori immagine di B come base nel codominio).

Sugli spazi vettoriali T_pM e $T_{f(p)}N$ ci sono dei prodotti scalari, dati dalle prime forme fondamentali delle due superfici e sono quindi *spazi vettoriali euclidei*. Vogliamo studiare sotto quali condizioni il differenziale df_P sia un'isometria di spazi vettoriali. Sia dunque

$$\mathbf{v} = a\mathbf{x}_{u_1} + b\mathbf{x}_{v_1} \in T_pM$$

e

$$df_p(\mathbf{v}) = c\mathbf{y}_{u_2} + d\mathbf{y}_{v_2} \in T_{f(p)}N$$

la sua immagine. Si ha:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 &= E_1a^2 + 2F_1ab + G_1b^2 \\ \|df_p(\mathbf{v})\|^2 &= E_2c^2 + 2F_2cd + G_2d^2\end{aligned}$$

dove E_1, F_1, G_1 sono i coefficienti della prima forma fondamentale di M e E_2, F_2, G_2 sono i coefficienti della prima forma fondamentale di N . Se scegliamo coordinate locali \mathbf{x}, \mathbf{y} come nel lemma allora $a = c$ e $b = d$ perché il differenziale di df_p è rappresentato dalla matrice unità e quindi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 &= E_1a^2 + 2F_1ab + G_1b^2 \\ \|df_p(\mathbf{v})\|^2 &= E_2a^2 + 2F_2ab + G_2b^2\end{aligned}$$

per ogni a, b e questo implica $E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$. Abbiamo dunque dimostrato la:

Proposizione 2.9. *Sia $f : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo. Le applicazioni lineari df_p sono isometrie di spazi vettoriali (per ogni p) se e solo se esistono coordinate locali su M e N tali che $E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$ (a meno dei nomi delle variabili).*

ATTENZIONE. Leggiamo bene l'enunciato: la condizione è che *esistono* coordinate locali con proprietà opportune. Il prodotto scalare non dipende dalle basi usate (i coefficienti della matrice dipendono dalle basi) e anche il differenziale è un'applicazione lineare che non dipende dalle basi usate (la sua matrice dipende dalle basi).

Quindi il differenziale è una isometria di spazi vettoriali oppure no *indipendentemente* dalle parametrizzazioni locali usate. Quello che dice la proposizione è che, se il differenziale è una isometria, allora è possibile trovare basi in cui le matrici dei due prodotti scalari sono uguali.

Vedremo un esempio specifico di questo fenomeno alla fine del paragrafo.

La **Proposizione 2.9** tratta il caso del *differenziale* di un diffeomorfismo. Torniamo ora ai *diffeomorfismi* fra superfici e scriviamo in coordinate locali cosa significhi essere un'isometria. La curva C è data da una funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ della forma:

$$u_1 = u_1(t), \quad v_1 = v_1(t) \quad a \leq t \leq b$$

e quindi su M la curva è data dalla parametrizzazione $\mathbf{x}(\alpha(t))$. La sua immagine su N è data da $f(\mathbf{x}(\alpha(t))) = \mathbf{y}(\bar{f}(\alpha(t)))$. Possiamo scrivere la parametrizzazione $\bar{f}(\alpha(t)) : [a, b] \rightarrow E$ come

$$u_2 = u_2(t), \quad v_2 = v_2(t) \quad a \leq t \leq b$$

dove naturalmente $(u_2, v_2) = \bar{f}(u_1, v_1)$. La condizione che la curva C e la curva $f(C)$ abbiano la stessa lunghezza si scrive quindi come:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \sqrt{E_1(t)u_1'(t)^2 + 2F_1(t)u_1'(t)v_1'(t) + G_1(t)v_1'(t)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E_2(t)u_2'(t)^2 + 2F_2(t)u_2'(t)v_2'(t) + G_2(t)v_2'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Da questa uguaglianza è possibile dedurre il seguente importante teorema:

Teorema 2.10. *Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow N$ è un'isometria se e solo se il differenziale $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ è un'isometria di spazi vettoriali per ogni $p \in M$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che il diffeomorfismo f sia rappresentato in coordinate locali dall'identità ($\bar{f} = \text{id}$). In questo caso le curve C e $f(C)$ hanno la stessa espressione in coordinate locali. Se il differenziale di f è un'isometria, per quello che abbiamo osservato prima si ha $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$. Dunque gli integrali che esprimono le lunghezze di C e $f(C)$ sono identici (a meno dei nomi delle variabili) e quindi f conserva le lunghezze di tutte le curve e cioè f è un'isometria.

Per dimostrare l'implicazione opposta, supponiamo ancora che f sia rappresentato in coordinate locali dall'identità. Allora per ogni parametrizzazione regolare $(u(t), v(t))$ di una curva C su M si ha:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \sqrt{E_1(t)u'(t)^2 + 2F_1(t)u'(t)v'(t) + G_1(t)v'(t)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E_2(t)u'(t)^2 + 2F_2(t)u'(t)v'(t) + G_2(t)v'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Notiamo che per l'ipotesi fatta su \bar{f} si ha $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, e quindi non usiamo gli indici per distinguere le coordinate locali. Cambiando l'estremo superiore di integrazione, cambia la curva ma poiché f lascia invariata la

lunghezza di *tutte* le curve, l'identità precedente vale *per ogni* estremo superiore di integrazione b . Considerando allora l'integrale come una funzione di b e derivando rispetto a b (e sostituendo poi b con t) si ha

$$\begin{aligned} & E_1(t)u'(t)^2 + 2F_1(t)u'(t)v'(t) + G_1(t)v'(t)^2 \\ &= E_2(t)u'(t)^2 + 2F_2(t)u'(t)v'(t) + G_2(t)v'(t)^2 \end{aligned}$$

Questa identità deve valere per tutte le curve e in particolare per le curve della forma

$$u(t) = u_0 + \alpha t, \quad v(t) = v_0 + \beta t, \quad |t| < \varepsilon$$

dove $(u_0, v_0) \in D$ è arbitrario, α, β sono due numeri reali arbitrari e ε è sufficientemente piccolo (in modo che il segmento descritto da queste equazioni parametriche sia tutto contenuto in D). Calcolando allora per $t = 0$ si ottiene che per ogni α, β si ha:

$$E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2 = E_2\alpha^2 + 2F_2\alpha\beta + G_2\beta^2$$

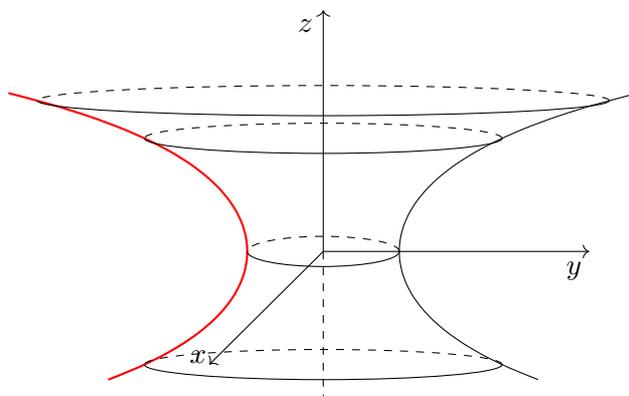
dove E_1, \dots sono i valori delle funzioni $E_1(t), \dots$ nel punto (u_0, v_0) . Questo è possibile solo se $E_1 = E_2, F_1 = F_2, G_1 = G_2$ e quindi i differenziali df_P sono delle isometrie per ogni P . \square

Combinando i risultati fin qui ottenuti ([Proposizione 2.9](#) e [Teorema 2.10](#)) abbiamo:

Teorema 2.11. *Due superfici M e N sono isometriche se e solo se è possibile trovare delle coordinate locali su di esse in modo che le prime forme fondamentali delle due superfici coincidano.*

Esempio 2.12. Sia $M =$ [catenoide](#) e $N =$ [elicoide](#).

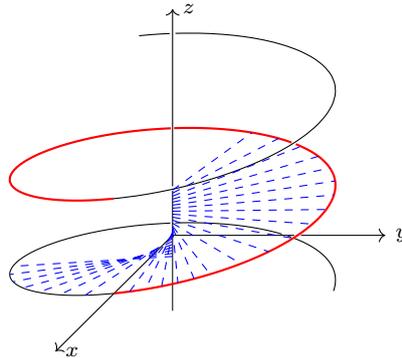
$$\mathbf{x}_M(u, v) = \begin{cases} x = \cosh v \cos u \\ y = \cosh v \sin u \\ z = v \end{cases}$$



e

$$\mathbf{x}_N(u, v) = \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = u \end{cases}$$

dove abbiamo posto $a = b = 1$ nella parametrizzazione dell'elicoide.



I coefficienti delle prime forme fondamentali sono:

$$\begin{aligned} E_M &= \cosh^2 v, & F_M &= 0, & G_M &= \cosh^2 v \\ E_N &= 1 + v^2, & F_N &= 0, & G_N &= 1 \end{aligned}$$

che sono evidentemente diversi. Ricordando la discussione fatta nel [sotto-paragrafo 1.3](#) sui cambiamenti di coordinate e sul loro effetto sulla prima forma fondamentale utilizziamo l'espressione simbolica

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

e scriviamo

$$ds_M^2 = \cosh^2 v du^2 + \cosh^2 v dv^2$$

e

$$ds_N^2 = (1 + v^2) du^2 + dv^2$$

Consideriamo adesso il cambio di coordinate per l'elicoide

$$u = u_1, \quad v = \sinh v_1$$

si ha

$$du = du_1, \quad dv = \cosh v_1 dv_1$$

e sostituendo nell'espressione del ds_N^2 si ha, nelle coordinate (u_1, v_1)

$$ds_N^2 = (1 + \sinh^2 v_1) du_1^2 + \cosh^2 v_1 dv_1^2 = \cosh^2 v_1 du_1^2 + \cosh^2 v_1 dv_1^2$$

che, a meno dei nomi delle variabili, è uguale a ds_M^2 . Dunque catenoide ed elicoide sono isometriche.

Esercizio 2.13. Dimostrare che la funzione $u = u_1, v = \sinh v_1$ è un cambio di coordinate.

Se abbiamo due superfici per cui, nelle parametrizzazioni assegnate, le prime forme fondamentali coincidono allora le due superfici sono isometriche. Però, se le prime forme fondamentali non coincidono, le superfici potrebbero lo stesso essere isometriche (come abbiamo appena visto per la catenoide e l'elicoide) e non è semplice in generale trovare le (eventuali) coordinate locali che stabiliscono l'isometria. Abbiamo quindi bisogno di un invariante più semplice che sia in grado di stabilire se due superfici NON sono isometriche. Questo invariante è la curvatura Gaussiana, di cui parleremo nel prossimo capitolo.

3. Superfici orientabili

Vogliamo adesso introdurre il concetto di orientabilità per una superficie e confrontarlo con la definizione nota per le superfici topologiche. Questo studio ci darà un semplice criterio per l'orientabilità ([Proposizione 3.7](#)) che sarà indispensabile per lo studio della mappa di Gauss, che è l'argomento del prossimo capitolo.

3.1. Orientazioni su una superficie. Per le superfici topologiche abbiamo visto la definizione:

Definizione 3.1. Una superficie topologica si dice *orientabile* se NON contiene un sottospazio omeomorfo ad un nastro di Möbius.

Analizziamo ora la situazione per superfici differenziabili e cerchiamo una caratterizzazione in termini di parametrizzazioni. La classe di superfici orientabili sarà la stessa che già conosciamo, però i metodi di dimostrazione saranno diversi. Inoltre, siamo interessati non solo al concetto di *orientabilità*, cioè la possibilità di orientare, ma anche al concetto di *orientazione*, cioè alla scelta di un modo di orientare.

Per prima cosa, studiamo il caso degli spazi vettoriali reali. In questo caso la definizione di orientazione è particolarmente semplice, anche se forse non intuitiva a prima vista. Sia V uno spazio vettoriale *reale* di dimensione finita.

Definizione 3.2. Una *orientazione* su V è il dato di una *base ordinata* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Due basi ordinate $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ danno la *stessa orientazione* se la matrice del cambiamento di base (per esempio, scritta rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$) ha determinante *positivo*. Il cambiamento di base è l'applicazione lineare definita da $\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n \mapsto \mathbf{w}_n$.

Dunque su uno spazio vettoriale sono possibili 2 orientazioni distinte: date due basi, esse determinano la *stessa orientazione* se il determinante è positivo e *orientazioni opposte* se il determinante è negativo.

Osservazione. Il cambiamento di base è un isomorfismo e quindi il determinante è diverso da 0. Inoltre, il fatto che $\mathbb{R} - \{0\}$ sia sconnesso mentre $\mathbb{C} - \{0\}$ no, rende chiaro il motivo per cui orientiamo solo gli spazi vettoriali reali. Le orientazioni corrispondono alle componenti connesse dello spazio degli scalari non nulli.

In dimensione bassa, le due orientazioni possibili hanno nomi ben noti:

dim $V = 1$: orientazione = verso di percorrenza

dim $V = 2$: orientazione = verso di rotazione orario o antiorario

dim $V = 3$: orientazione = regola della mano destra o della mano sinistra

Vediamo il caso dim $V = 1$: una base è costituita da un solo vettore e quindi se abbiamo due basi $\{\mathbf{v}_1\}$ e $\{\mathbf{w}_1\}$ si ha $\mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{v}_1$. Dunque la funzione lineare data da $\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{v}_1$ ha matrice $[\lambda]$ (matrice 1×1) e il determinante è ancora λ . Dunque:

- $\lambda > 0 \implies \mathbf{v}$ e \mathbf{w} sono *concordi* = le basi danno lo stesso verso sulla retta
- $\lambda < 0 \implies \mathbf{v}$ e \mathbf{w} sono *discordi* = le basi danno versi opposti sulla retta

Anche il caso dim $V = 2$ è facile da interpretare: i vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 di una base formano un angolo strettamente compreso fra 0° e 180° , perché non sono allineati. Ruotiamo di questo angolo in modo da portare \mathbf{v}_1 su \mathbf{v}_2 : questa rotazione può essere in verso orario o antiorario (le due possibili orientazioni). Se due basi sono collegate da una matrice con determinante positivo, il verso della rotazione da \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 è lo stesso della rotazione da \mathbf{w}_1 a \mathbf{w}_2 .

Dopo questa digressione sugli spazi vettoriali, torniamo alle superfici e consideriamo $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale che copre, in generale, solo una parte di S . Se $p \in \mathbf{x}(U)$, sullo spazio tangente $T_p S$ c'è la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e quindi una orientazione.

Osservazione. Data la parametrizzazione $\mathbf{x}(u, v)$, prendiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(v, u)$$

e cioè scambiamo le variabili. Allora $\mathbf{y}_u = \mathbf{x}_v$ e $\mathbf{y}_v = \mathbf{x}_u$ e la matrice del cambiamento di base è $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; poiché $\det P = -1$ l'orientazione determinata da \mathbf{y} è l'opposta di quella determinata da \mathbf{x} .

In generale, abbiamo visto che un cambiamento di coordinate induce il cambiamento di basi sullo spazio tangente che ha per matrice la matrice Jacobiana di $h = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ e quindi:

Proposizione 3.3. Sia $p = \mathbf{x}(q) = \mathbf{y}(r) \in S$. Le orientazioni su $T_p S$ date dalle basi $\{\mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2}\}$ e $\{\mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2}\}$ sono la stessa se e solo se $\det J(h)(q) > 0$.

In questo caso diciamo che le parametrizzazioni danno orientazioni compatibili. Il concetto di superficie orientabile è legato all'esistenza di una famiglia di parametrizzazioni compatibili.

Definizione 3.4. Una superficie regolare S si dice *orientabile* se esiste una famiglia $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ di parametrizzazioni tale che

- (1) $\bigcup_{i \in I} \mathbf{x}_i(U_i) = S$, e cioè la superficie S è coperta dalla famiglia
- (2) per ogni $i, j \in I$, posto $h_{ij} = \mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$, si ha $\det J(h_{ij}) > 0$ in ogni punto del suo dominio, e cioè le orientazioni sono compatibili.

Una famiglia che soddisfa la condizione 1 è stata chiamata *atlante*. Dunque si può dire brevemente che una superficie è orientabile se esiste un atlante con orientazioni compatibili. La scelta di un atlante compatibile si dice *orientazione* della superficie S .

Osserviamo ancora che la condizione di orientabilità è *globale*: dobbiamo conoscere abbastanza parametrizzazioni per coprire tutta la superficie. Una parte potrebbe essere orientabile, ma l'intera superficie no. Un esempio ben noto è il piano proiettivo reale (o ogni superficie somma connessa di piani proiettivi): la superficie non è orientabile, ma se prendiamo un disco tutto contenuto all'interno del poligono (senza toccare i lati), questa parte di superficie è omeomorfa ad un disco nel piano e quindi orientabile.

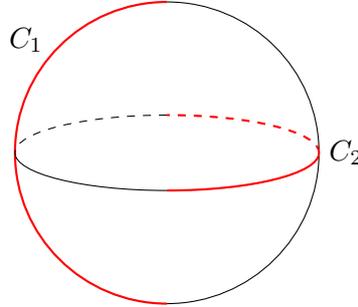
Esempio 3.5. Sia $S = \{z = f(x, y)\}$ il grafico di una funzione. Allora S è orientabile. Infatti S è coperta da una sola parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

e quindi la condizione di compatibilità è automaticamente verificata. In particolare, poiché ogni superficie regolare è localmente un grafico si ha

ogni superficie regolare è localmente orientabile

Esempio 3.6. Sia $S =$ sfera. La parametrizzazione con le coordinate polari usa 2 parametrizzazioni, ognuna che copre la sfera meno un meridiano.



Abbiamo una sola condizione di compatibilità da verificare, per questa coppia di carte. L'intersezione delle due carte è $S^2 - (C_1 \cup C_2)$ ed è *connessa*. Poiché il cambiamento di coordinate h è una funzione differenziabile, il determinante della matrice Jacobiana è una funzione *continua* e dunque ha segno costante sull'intersezione. Se questo determinante è sempre positivo, allora siamo a posto, altrimenti basta cambiare l'orientazione a una delle due carte scambiando le variabili come nell'Osservazione precedente. Dunque la sfera è orientabile.

Anche in questo caso la dimostrazione ci dà un piccolo enunciato che vale la pena di esplicitare

ogni superficie regolare che ha un atlante formato da *due* carte con intersezione *connessa* è orientabile

3.2. Orientabilità e campo normale. C'è un importante legame fra l'orientabilità e il campo normale introdotto nel [sotto-paragrafo 3.3.2](#), che consente in molti casi di dimostrare semplicemente che una superficie è orientabile.

Proposizione 3.7. [do Carmo, Proposition 1, paragrafo 2.6] Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se esiste un campo $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenziabile di vettori normali e unitari.

Dimostrazione. Supponiamo che S sia orientabile e sia $\{\mathbf{x}_i\}$ un atlante compatibile. Se $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ è una di queste parametrizzazioni e $p \in \mathbf{x}(U)$, definiamo

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

Questo campo è differenziabile, unitario e normale ed è definito per tutti i punti di $\mathbf{x}(U)$. Supponiamo ora che $p \in \mathbf{y}(V)$, cioè il punto p appartiene all'immagine di *due* parametrizzazioni diverse. Dobbiamo verificare che le definizioni coincidono. Dal calcolo fatto nella dimostrazione del [Lemma 1.7](#),

per i vettori delle basi date da due parametrizzazioni diverse si ha la relazione

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t \cdot \det J$$

Le parametrizzazioni danno orientazioni compatibili, cioè $\det J > 0$. Allora

$$\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|} \cdot \frac{\det J}{|\det J|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|}$$

e dunque la definizione del campo \mathbf{N} non dipende dalla parametrizzazione e quindi è definito per tutti i punti della superficie.

Viceversa, supponiamo adesso di avere un campo $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenziabile di vettori *normali* e *unitari*. Consideriamo un qualunque atlante $\{\mathbf{x}_i\}$ che copre S . Possiamo supporre che tutti i domini U_i siano *connessi*. Se un dominio non è connesso, ogni componente connessa del dominio è essa stessa una parametrizzazione (restringendo la funzione alla componente connessa) e quindi otteniamo un altro atlante con i domini connessi.

Sia ora $p_0 \in \mathbf{x}(U)$ un punto fissato. In questo punto abbiamo *due* vettori normali e unitari: $\mathbf{N}(p_0)$ (il campo assegnato) e $\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(p_0)$ (il campo dato dalla parametrizzazione). Poiché sono entrambi normali allo stesso piano tangente T_p in \mathbb{R}^3 i due vettori sono paralleli e poiché hanno entrambi norma 1 o sono uguali o sono l'uno l'opposto dell'altro.

Se sono uguali siamo a posto, altrimenti basta scambiare le variabili per cambiare il verso del campo dato dalla parametrizzazione e quindi possiamo sempre supporre che nel punto p_0 i due campi sono uguali. Consideriamo adesso, sul dominio U , la funzione

$$g(p) = \mathbf{N}(p) \cdot \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(p)$$

data dal prodotto scalare dei due vettori. I vettori sono paralleli e unitari e quindi questa funzione può valere solo 1 oppure -1 . Visto che il dominio U è *connesso* e la funzione $g(p)$ è *continua*, deve essere costante. In p_0 si ha $g(p_0) = 1$ e quindi la funzione è costantemente 1, cioè i due vettori sono sempre uguali.

Dopo aver orientato in questo modo tutte le parametrizzazioni, allineando i loro vettori normali secondo il verso dato dal campo \mathbf{N} , consideriamo un punto $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ nell'intersezione di due parametrizzazioni. Come prima

$$\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|} \cdot \frac{\det J}{|\det J|}$$

e poiché

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|}$$

deve essere

$$\frac{\det J}{|\det J|} = 1$$

e cioè $\det J > 0$. Questo significa che S è orientabile. \square

Una applicazione diretta della **Proposizione 3.7** ci consente di dimostrare che tutte le superfici date in forma cartesiana sono orientabili.

Proposizione 3.8 (do Carmo, Proposition 2, paragrafo 2.6). *Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare della funzione f e sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$ la superficie regolare controimmagine di a . Allora S è una superficie orientabile.*

Dimostrazione. Consideriamo il campo vettoriale “gradiente di f ” definito nei punti di S da

$$df_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p))$$

Poiché a è un valore regolare questo campo vettoriale è sempre diverso da 0 in quanto almeno una delle tre derivate parziali è diversa da 0. Il campo è anche differenziabile perché f è di classe C^∞ e quindi lo sono anche le sue derivate.

Sia ora $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva regolare contenuta in S tale che $\alpha(0) = p$ (passante per p). Poiché la curva è tutta contenuta in S , i suoi punti soddisfano l’equazione della superficie e cioè

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

Derivando rispetto a t questa funzione identicamente nulla e calcolando per $t = 0$ si ha

$$f_x(p) \cdot x'(0) + f_y(p) \cdot y'(0) + f_z(p) \cdot z'(0) = 0$$

e cioè il vettore df_p è perpendicolare al vettore $\alpha'(0) \in T_p S$.

Poiché $\alpha(t)$ era una curva arbitraria passante per p , lo stesso ragionamento vale *per ogni* curva in S passante per p e quindi df_p è perpendicolare a tutti i vettori tangenti e cioè è perpendicolare allo spazio tangente $T_p S$. Ma questo vuol dire che df_p è *normale* alla superficie S in p .

Possiamo allora porre

$$\mathbf{N}(p) = \frac{df_p}{\|df_p\|}$$

e otteniamo un campo normale, differenziabile e unitario. Dunque S è orientabile. \square

Esempio 3.9. Sia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Allora $\{f = 0\}$ è la sfera di raggio 1 con centro l’origine e quindi la sfera è orientabile. Qual è il campo normale che otteniamo? Per $P = (x, y, z) \in S$ si ha

$$df_P = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$$

e cioè (normalizzando) $\mathbf{N}_f(P) = \overline{OP}$: il campo normale punta nella stessa direzione del raggio (dall'origine verso la superficie della sfera) e cioè punta *verso l'esterno* della sfera.

Poniamo ora $g(x, y, z) = -f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$. Il luogo di zeri non cambia: $S = \{g = 0\}$ ma il campo normale dato da questa nuova equazione è

$$dg_P = (-2x, -2y, -2z) = -2(x, y, z)$$

e normalizzando $\mathbf{N}_g(P) = -\overline{OP}$ è l'opposto del campo precedente: $\mathbf{N}_g(P)$ punta *verso l'interno* della sfera.

Otteniamo in questo modo le due possibili orientazioni della sfera.

Osservazione. Il ragionamento fatto nell'esempio precedente vale per ogni superficie scritta in forma cartesiana.

Se $S = \{f = 0\}$ allora vale anche $S = \{-f = 0\}$. Se 0 è un valore regolare di f lo sarà anche per $-f$, però le orientazioni sono diverse. In effetti i vettori df_p e $-df_p$ sono entrambi non nulli ma opposti. Otteniamo in questo modo le due orientazioni possibili sulla superficie S .

Possiamo riassumere il ragionamento fatto nell'[Esempio 3.9](#) e nell'[Osservazione](#) qui sopra dicendo che una superficie orientabile ha un esterno e un interno e il campo normale che dà l'orientazione punta sempre verso l'esterno oppure sempre verso l'interno.

La frase appena detta non è completamente corretta: per esempio, se S è un piano è chiaro che il complementare è formato da due semispazi e i due possibili campi normali puntano in direzione di un semispazio o dell'altro, ma nessuno dei due è *l'interno* o *l'esterno* della superficie.

Non è nemmeno vero che una superficie orientabile sconnette il complementare in due componenti: se S è un disco aperto in un piano, allora il complementare non è sconnesso, però S è orientabile e ci sono chiaramente due orientazioni (andare *da una parte* o *dall'altra* del disco).

Forse il modo più semplice di capire intuitivamente il concetto di orientabilità e di orientazione è dire che:

una superficie orientabile ha *due facce* e le due orientazioni possibili corrispondono alla scelta di un campo normale che punta sempre dalla parte di una delle facce

Questa frase non è rigorosa (cosa è una faccia?) ed è solo suggestiva, però chiarisce abbastanza bene il concetto ed è vicina al modo comune di parlare.

Per concludere il discorso sull'orientabilità e collegarci al modo di definire l'orientabilità per le superfici topologiche restano da dimostrare due fatti, che lasciamo come esercizi. Questi due enunciati mostrano che le definizioni date tramite gli atlanti compatibili oppure la non esistenza di un nastro di Möbius all'interno della superficie sono equivalenti. Per entrambi gli esercizi c'è una traccia per lo svolgimento ed è importante cercare di risolverli completamente.

Esercizio 3.10. *Ogni somma connessa di tori è orientabile.*

Il modo più semplice per dimostrare questo enunciato è trovare, per ogni superficie di questo tipo, un'equazione cartesiana in modo da poter applicare la [Proposizione 3.8](#). Questo è un problema interessante, non difficile ma di soluzione non immediata.

Abbiamo già visto che la sfera è orientabile. A partire dalle equazioni parametriche del toro si può trovare un'equazione cartesiana (per esercizio trovare tale equazione, che sarà di quarto grado).

È più difficile trovare un'equazione cartesiana per le superfici di genere $g \geq 2$. Infatti queste non sono superfici di rotazione e non ammettono una descrizione semplice tramite parametrizzazioni. Per trovare una equazione cartesiana per una superficie T_g omeomorfa ad un toro con g buchi, si può procedere in questo modo:

- (1) una equazione per la sfera è $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, che mette in evidenza la simmetria della sfera rispetto al piano xy
- (2) supponiamo di aver messo T_g in modo simmetrico rispetto al piano xy (è chiaro che questo è possibile, il piano xy taglia "a metà" la superficie) e posizioniamoci in un punto del piano. Guardiamo verso l'alto e verso il basso. Cosa vediamo? (questo significa semplicemente: intersechiamo una retta verticale con la superficie T_g)
- (3) se abbiamo risposto bene alla domanda precedente, abbiamo capito che possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$z^2 = f(x, y)$$

(nel caso della sfera, $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$)

- (4) trovare allora un'espressione per la funzione $f(x, y)$. Suggerimento: si può scegliere $f(x, y)$ un *polinomio* di grado $2g + 2$
- (5) dimostrare che la funzione $g(x, y, z) = z^2 - f(x, y)$ ha 0 come valore regolare

Esercizio 3.11. *Il nastro di Möbius non è orientabile.*

Usando la relazione fra orientabilità e campi normali, basta dimostrare che non è possibile trovare un campo normale, differenziabile, unitario

Una dimostrazione della non orientabilità del nastro di Möbius è scritta in dettaglio sul do Carmo, Example 3, pagg. 108-110. Non è il caso di riportare esattamente le stesse parole, perciò si può leggere direttamente il do Carmo.

Per seguire meglio la dimostrazione del do Carmo, osserviamo che la strategia del ragionamento fatto è:

- (1) troviamo un atlante che dia la struttura di superficie regolare al nastro di Möbius: l'atlante sul do Carmo è formato da *due* parametrizzazioni
- (2) mostriamo che questo atlante NON è compatibile, calcolando i determinanti dei cambiamenti di coordinate. **NOTA BENE:** l'intersezione delle due parametrizzazioni NON è connessa e quindi non possiamo applicare l'osservazione fatta dopo l'[Esempio 3.6](#)
- (3) adesso supponiamo, per assurdo, che il nastro di Möbius sia orientabile e fissiamo un campo normale unitario che esiste per ipotesi di orientabilità
- (4) otteniamo una contraddizione studiando il comportamento di questo campo normale rispetto all'atlante descritto in precedenza

Concludiamo questa parte sull'orientabilità osservando che il Paragrafo 2-7 del do Carmo studia in maniera completa l'orientabilità delle superfici chiuse in \mathbb{R}^3 . Questo paragrafo non è nel programma del corso, ma almeno riportiamo il teorema conclusivo, la cui dimostrazione è piuttosto elaborata e richiede tutti gli argomenti sviluppati nel Paragrafo 2-7.

Teorema 3.12 (do Carmo, THEOREM pag. 116). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, orientabile e compatta. Allora esiste una funzione differenziabile $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, definita su un insieme aperto V tale che $S \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$ (cioè su un intorno aperto di S in \mathbb{R}^3) tale che $S = g^{-1}(0)$ e 0 è un valore regolare di g .*

Dunque una superficie compatta in \mathbb{R}^3 è orientabile se e solo se è la controimmagine di un valore regolare e cioè se si può scrivere in forma cartesiana. Per superfici orientabili compatte in \mathbb{R}^3 si può anche dimostrare che il complementare ha due componenti connesse (interno ed esterno), ma questo è più difficile e non c'è sul do Carmo.

4. Esercizi svolti dal do Carmo

Esercizio 1. (do Carmo, Esercizio 2-5.1) Calcolare la prima forma fondamentale delle seguenti superfici, nei punti in cui sono regolari:

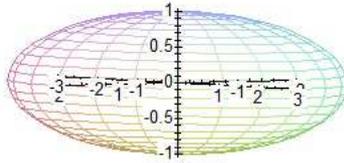
a. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$

- b. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$
 c. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$
 d. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$

Soluzione.

a. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$: **ellissoide** di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u = \text{costante}$ sono ellissi orizzontali di semiassi $a \sin u$ e $b \sin u$, perché la coordinata z è costante mentre le curve $v = \text{costante}$ sono semiellissi che hanno un asse lungo l'asse z e semiassi $\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}$ (sul piano xy) e c (sull'asse z).

I parametri (u, v) variano in $0 < u < \pi$, $0 < v < 2\pi$. Le derivate parziali sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u) \\ \mathbf{x}_v &= (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0)\end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (bc \sin^2 u \cos v, ac \sin^2 u \sin v, ab \sin u \cos u) \\ &= \sin u (bc \sin u \cos v, ac \sin u \sin v, ab \cos u)\end{aligned}$$

che si annulla solo per $\sin u = 0$ e cioè $u = 0, \pi$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è sempre regolare (naturalmente, non copre tutto l'ellissoide).

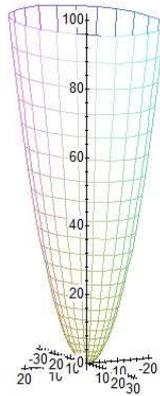
La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 - a^2) \cos u \cos v \sin u \sin v \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \sin^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)\end{aligned}$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

b. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$: *paraboloide ellittico* di equazione cartesiana

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u = \text{costante}$ sono ellissi orizzontali di semiassi au e bu , perché la coordinata z è costante mentre le curve $v = \text{costante}$ sono semiparabole con l'asse lungo l'asse z . Le due semiparabole per v e $v + \pi$ si uniscono e formano una parabola sul piano di equazione $(\sin v)x - (\cos v)y = 0$, con vertice nell'origine e asse l'asse delle z .

I parametri (u, v) variano in $u > 0$, $0 < v < 2\pi$. In questo modo la parametrizzazione non copre la semiparabola $v = 0$ e cioè la semiparabola sul semipiano xz con $x \geq 0$ (l'origine non è coperta). Si potrebbe pensare di mettere $-\infty < u < +\infty$, $0 < v < \pi$. In questo modo le curve $v = \text{costante}$ sono delle parabole intere, ma la funzione non risulta iniettiva, in quanto tutti i punti del tipo $(0, v)$ hanno immagine l'origine.

Le derivate parziali sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (a \cos v, b \sin v, 2u) \\ \mathbf{x}_v &= (-au \sin v, bu \cos v, 0)\end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-2bu^2 \cos v, -2au^2 \sin v, abu) \\ &= u(-2bu \cos v, -2au \sin v, ab)\end{aligned}$$

che si annulla solo per $u = 0$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è sempre regolare.

La prima forma fondamentale è:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2$$

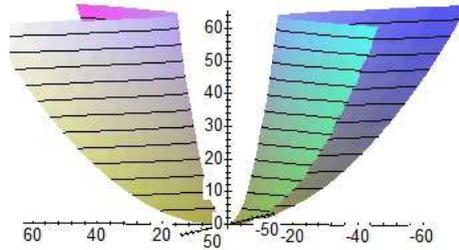
$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 - a^2)u \cos v \sin v$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

c. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$: **paraboloide iperbolico** di equazione cartesiana

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u = \text{costante}$ sono iperboli orizzontali, perché la coordinata z è costante mentre le curve $v = \text{costante}$ sono semiparabole con l'asse lungo l'asse z . Osserviamo che poiché la coordinata $z = u^2$ è sempre positiva, la parametrizzazione copre solo la parte del paraboloide che sta sopra il piano xy .

I parametri (u, v) variano in $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, però in questo modo l'origine non è un punto regolare in quanto la funzione non risulta iniettiva: tutti i punti $(0, v)$ hanno immagine l'origine.

Le derivate parziali sono:

$$\mathbf{x}_u = (a \cosh v, b \sinh v, 2u)$$

$$\mathbf{x}_v = (au \sinh v, bu \cosh v, 0)$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-2bu^2 \cosh v, 2au^2 \sinh v, abu) \\ &= u(-2bu \cosh v, 2au \sinh v, ab) \end{aligned}$$

che si annulla solo per $u = 0$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è regolare tranne che nell'origine.

La prima forma fondamentale è:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v + 4u^2$$

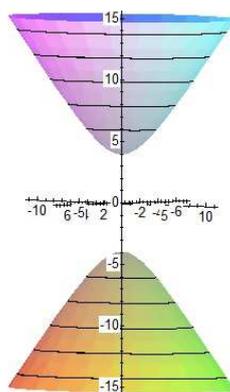
$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 + a^2)u \cosh v \sinh v$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2(a^2 \sinh^2 v + b^2 \cosh^2 v)$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

d. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$: **iperboloide a due falde** di equazione cartesiana

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



La superficie non è di rotazione. Le curve $u = \text{costante}$ sono ellissi orizzontali, di semiassi $a \sinh u$ e $b \sinh u$, perché la coordinata z è costante mentre le curve $v = \text{costante}$ sono rami di iperbole che giacciono su piani verticali (passanti per l'asse z). Osserviamo che poiché la coordinata $z = c \cosh u$ è sempre positiva, la parametrizzazione copre solo la falda dell'iperboloide che sta sopra il piano xy . L'altra falda si ottiene ponendo $z = -c \cosh u$, ottenendo in questo modo gli altri rami di iperbole.

I parametri (u, v) variano in $u > 0$, $0 < v < 2\pi$. In questo modo la parametrizzazione non copre il ramo di iperbole $v = 0$ e cioè quello sul piano xz (anche il minimo $(0, 0, 1)$, che si ottiene per $u = 0$, non è coperto). Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$$

$$\mathbf{x}_v = (-a \sinh u \sin v, b \sinh u \cos v, 0)$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-bc \sinh^2 u \cos v, -ac \sinh^2 u \sin v, ab \sinh u \cosh u) \\ &= \sinh u (bc \sinh u \cos v, ac \sinh u \sin v, ab \cosh u)\end{aligned}$$

che si annulla solo per $\sinh u = 0$ e cioè $u = 0, \pi$ (fuori dal dominio). Quindi la parametrizzazione è sempre regolare.

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (b^2 - a^2) \cosh u \cos v \sinh u \sin v \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \sinh^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)\end{aligned}$$

Il determinante $EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2$ è piuttosto complicato e non presenta semplificazioni significative.

Esercizio 2. (do Carmo, Esercizio 2-5.2) Sia

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

la parametrizzazione di una sfera unitaria in coordinate polari. Sia P il piano di equazione $x = z \cot \alpha$, dove $0 < \alpha < \pi$ e sia β l'angolo acuto che la curva $P \cap S^2$ fa con il semimeridiano $\varphi = \varphi_0$. Calcolare $\cos \beta$.

Soluzione. Nella parametrizzazione φ è la *longitudine* (angolo nel piano xy misurato a partire dal semiasse positivo x) e θ è la *colatitudine* (angolo sul piano xz misurato a partire dal semiasse positivo z).

Possiamo riscrivere l'equazione come $(\sin \alpha)x - (\cos \alpha)z = 0$. Al variare di α si ottiene il fascio di piani di asse l'asse y . Il piano P_α è generato dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$$

che ne formano una base ortonormale. La curva $P_\alpha \cap S^2$ è quindi la circonferenza C_α di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2 = (\cos \alpha \cos t, \sin t, \sin \alpha \cos t)$$

Osserviamo che questa parametrizzazione è per arcolunghezza. Il meridiano M_{φ_0} ha equazione parametrica

$$\delta(\theta) = (\sin \theta \cos \varphi_0, \sin \theta \sin \varphi_0, \cos \theta)$$

dove $0 < \theta < \pi$. Anche questa parametrizzazione è per arcolunghezza. Dobbiamo dunque trovare il punto di intersezione fra queste due curve e calcolare l'angolo β fra i vettori tangenti. Questi sono facili da calcolare

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-\cos \alpha \sin t, \cos t, -\sin \alpha \sin t) \\ \delta'(\theta) &= (\cos \theta \cos \varphi_0, \cos \theta \sin \varphi_0, -\sin \theta)\end{aligned}$$

e ricordando che $\|\gamma'(t)\| = \|\delta'(\theta)\| \equiv 1$, abbiamo

$$\cos \beta = \gamma'(t) \cdot \delta'(\theta)$$

Il prodotto scalare vale

$$\gamma'(t) \cdot \delta'(\theta) = -\cos \alpha \cos \varphi_0 \sin t \cos \theta + \sin \varphi_0 \cos t \cos \theta + \sin \alpha \sin t \sin \theta$$

e dobbiamo valutare questa espressione sostituendo al posto di t e θ il valore che hanno nel punto di intersezione. Denotiamo con t_0 e θ_0 i valori dei parametri per cui $\gamma(t_0) = \delta(\theta_0)$. Ci sono varie relazioni soddisfatte da t_0 e θ_0 : per prima cosa sostituiamo l'equazione parametrica di $\delta(\theta)$ nell'equazione cartesiana di P_α ottenendo

$$\sin \alpha \sin \theta_0 \cos \varphi_0 = \cos \alpha \cos \theta_0$$

e sostituendo $\cos \alpha \cos \theta_0$ nel primo termine della somma del prodotto scalare si ha

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0) \cdot \delta'(\theta_0) &= -\underline{\cos \alpha} \cos \varphi_0 \sin t_0 \underline{\cos \theta_0} + \sin \varphi_0 \cos t_0 \cos \theta_0 + \sin \alpha \sin t_0 \sin \theta_0 \\ &= -\cos \varphi_0 \underline{\sin t_0 \sin \alpha \sin \theta_0} \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos t_0 \cos \theta_0 + \underline{\sin \alpha \sin t_0 \sin \theta_0} \\ &= \sin \alpha \sin t_0 \sin \theta_0 [-\cos^2 \varphi_0 + 1] + \sin \varphi_0 \cos t_0 \cos \theta_0 \\ &= \sin \alpha \sin t_0 \sin \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos t_0 \cos \theta_0 \\ &= \sin \varphi_0 [\sin \alpha \sin t_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \cos t_0 \cos \theta_0] \end{aligned}$$

Ora, eguagliando le componenti y e z delle curve γ e δ , si ha che nel punto di intersezione vale

$$\sin \theta_0 \sin \varphi_0 = \sin t_0, \quad \cos \theta_0 = \sin \alpha \cos t_0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0) \cdot \delta'(\theta_0) &= \sin \varphi_0 [\sin \alpha \sin t_0 \underline{\sin \theta_0 \sin \varphi_0} + \cos t_0 \underline{\cos \theta_0}] \\ &= \sin \varphi_0 [\sin \alpha \sin^2 t_0 + \sin \alpha \cos^2 t_0] \\ &= \sin \varphi_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Otteniamo dunque che per l'angolo β fra le due curve si ha

$$\cos \beta = \sin \varphi_0 \sin \alpha$$

Esercizio 3. (do Carmo, Esercizio 2-5.5) Dimostrare che l'area A di una regione limitata R sulla superficie $z = f(x, y)$ è data da

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy$$

dove Q è la proiezione ortogonale di R sul piano xy .

Soluzione. Una parametrizzazione regolare della superficie S è

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

La proiezione $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una inversa differenziabile di $\mathbf{x}(u, v)$ e quindi, se $\pi(R) = Q$ allora $\mathbf{x}(Q) = R$. La formula dell'area è

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

Calcoliamo la prima forma. Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, f_u)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, f_v)$$

e quindi la prima forma fondamentale è:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + f_u^2$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = f_u f_v$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + f_v^2$$

Il determinante $EG - F^2 = (1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_u f_v)^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2$ e si ha quindi la tesi (osserviamo che $f_u = f_x$, $f_v = f_y$, cambiando i nomi delle variabili).

La geometria della mappa di Gauss

In questo capitolo continuiamo lo studio della geometria delle superfici, introducendo varie nozioni di *curvatura*. Nella trattazione, che segue le pagine corrispondenti del do Carmo, ripercorriamo lo studio fatto da Gauss nel suo famoso lavoro “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*” del 1827.

Lo spunto per questo lavoro fu l’incarico di produrre delle carte geografiche per il ducato di Hannover. Gauss ebbe a disposizione le risorse del ducato e fece fare molte misure. Si rese conto che per produrre delle carte accurate occorreva tener conto della differenza fra la superficie terrestre e il piano (il foglio su cui le carte sono disegnate).

Gauss non si accontentò di risolvere il problema nel caso particolare sfera-piano, ma comprese che occorreva studiare il concetto generale di superficie e ottenere una soluzione completa. Lo strumento tecnico che introdusse fu la “mappa di Gauss” e questo sarà anche il nostro principale metodo di studio. I suoi risultati comprendono molti teoremi e segnano l’inizio della “geometria intrinseca”, cioè lo studio di uno spazio senza fare riferimento ad uno spazio ambiente. Abbiamo già parlato di questo nella definizione della prima forma fondamentale (anche questa introdotta da Gauss nelle *Disquisitiones*) e in queste lezioni vedremo alcune delle scoperte di Gauss.

Una ultima osservazione: nello stesso numero delle *Commentationes Soc. Reg. Scie. Göttingensis*, la rivista scientifica dell’Università di Göttingen, in cui compaiono le *Disquisitiones*, Gauss pubblicò anche il lavoro in cui introdusse la sua “teoria degli errori”, che comprende il metodo dei minimi quadrati e la distribuzione normale (o “Gaussiana”) da lui inventati per

trattare dati sperimentali, in particolare le misure cartografiche. Questo mostra come nella mente di Gauss non ci fosse distinzione fra matematica “pura” e “applicata”, ma solo la “matematica” come strumento intellettuale per la conoscenza.

1. La seconda forma fondamentale e la curvatura normale

Lo strumento principale per lo studio della geometria locale su una superficie è la *mappa di Gauss*, che è una funzione differenziabile fra due superfici, definita da Gauss all’inizio del punto 6 delle *Disquisitiones*. La mappa di Gauss ha un contenuto geometrico ma vedremo che è più semplice, per ottenere informazioni sulla superficie, usare il suo *differenziale*. In effetti questo è quello che fa anche Gauss, con un linguaggio non sempre facile da comprendere oggi, ma perfettamente in linea con la terminologia “infinitesimale” usata in Analisi fino all’introduzione del concetto di limite da parte di Cauchy e Weierstrass.

1.1. La mappa di Gauss e il suo differenziale. Sia S una superficie orientata, e cioè abbiamo fissato un’orientazione su S . Questo vuol dire che abbiamo fissato un campo vettoriale $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenziabile, normale e unitario.

Il campo normale induce una orientazione su tutti gli spazi tangenti nel modo seguente: sia $p \in S$ e sia $\mathbf{N}(p)$ il vettore del campo normale in p . Se $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è una base di $T_p S$ si dice che la base è *positiva* se

$$\langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{N}(p) \rangle > 0$$

Questa condizione significa che il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ha lo stesso verso di $\mathbf{N}(p)$. Naturalmente, se la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è positiva, allora la base $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}\}$ sarà *negativa*.

Il campo $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ è unitario, cioè i vettori dell’immagine hanno tutti norma 1. Ricordiamo che quando consideriamo \mathbb{R}^3 come spazio vettoriale, tutti i vettori sono applicati nell’origine. Questo vuol dire che tutti i punti finali dei vettori $\mathbf{N}(p)$ stanno sulla sfera S^2 di centro l’origine e raggio 1 e cioè la mappa \mathbf{N} ha immagine contenuta nella sfera S^2 .

Definizione 1.1. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata. La mappa

$$\mathbf{N} : S \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

si dice *mappa di Gauss* di S .

Poiché il campo normale \mathbf{N} è differenziabile, possiamo considerarne il differenziale. Se $p \in S$ il differenziale in p è un’applicazione lineare

$$d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)} S^2$$

Gli spazi vettoriali $T_p S$ e $T_{\mathbf{N}(p)} S^2$ sono entrambi sottospazi vettoriali di dimensione 2 dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 e si ha:

Lemma 1.2. *Gli spazi vettoriali $T_p S$ e $T_{\mathbf{N}(p)} S^2$ coincidono.*

Dimostrazione. Per definizione di spazio tangente e vettore normale si ha

$$T_p(S) \perp \mathbf{N}(p)$$

perché lo spazio tangente alla superficie S è il sottospazio perpendicolare al vettore normale $\mathbf{N}(p)$.

Lo spazio $T_{\mathbf{N}(p)} S^2$ è lo spazio tangente ad una sfera e questo non è altro che il piano perpendicolare al raggio della sfera che congiunge il centro con il punto di tangenza. Nel punto $\mathbf{N}(p) \in S^2$, questo raggio è evidentemente il vettore $\mathbf{N}(p)$ (attenzione: stiamo considerando $\mathbf{N}(p)$ come vettore in \mathbb{R}^3 e anche come punto sulla sfera). Dunque anche

$$T_{\mathbf{N}(p)} S^2 \perp \mathbf{N}(p)$$

e quindi i due sottospazi sono sottospazi vettoriali di dimensione 2 in uno spazio vettoriale di dimensione 3 perpendicolari allo stesso vettore e perciò coincidono. \square

Dal [Lemma 1.2](#) si conclude che $d\mathbf{N}_p$ è un *endomorfismo* dello spazio tangente $T_p S$. Se $\mathbf{w} \in T_p S$ è un vettore tangente alla superficie S in p , allora $d\mathbf{N}_p(\mathbf{w})$ è ancora tangente alla superficie S in p .

L'applicazione lineare $d\mathbf{N}_p$ ha una descrizione puramente geometrica che adesso scriviamo in dettaglio.

Sia $\mathbf{w} \in T_p S$ un vettore tangente. Per definizione, questo significa che esiste una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \mathbf{w}$$

Per definizione di differenziale di una funzione differenziabile (ricordare la [Definizione 3.3.9](#) e la discussione subito precedente)

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}) = \frac{d}{dt}[\mathbf{N} \circ \alpha]_{|_{t=0}} = \mathbf{N}'(0)$$

Osserviamo che $\mathbf{N} \circ \alpha = \mathbf{N}(\alpha(t))$ è un campo vettoriale sulla curva $\alpha(t)$: è la restrizione alla curva del campo normale. Il differenziale $d\mathbf{N}_p$ misura la variazione del campo \mathbf{N} in un intorno di p e in particolare:

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}) = \text{derivata direzionale di } \mathbf{N} \text{ nella direzione } \mathbf{w}$$

Poiché il campo $(\mathbf{N} \circ \alpha)(t)$ ha norma costante (uguale ad 1), la sua derivata è perpendicolare al campo stesso e in particolare $\mathbf{N}'(0) \perp \mathbf{N}(0) = \mathbf{N}(p)$ e quindi $\mathbf{N}'(0)$, essendo perpendicolare al vettore normale, è tangente

alla superficie S in p e questo conferma che $\mathbf{N}'(0) = d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}) \in T_pS$, come previsto dal [Lemma 1.2](#).

Vediamo qualche esempio.

Esempio 1.3. PIANO. Sia S data dall'equazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$

In ogni punto, il vettore normale è sempre lo stesso ed è parallelo al vettore (a, b, c) . Possiamo dunque porre

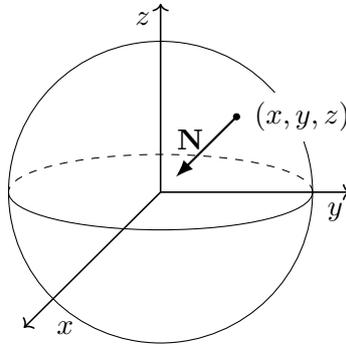
$$\mathbf{N}(p) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$$

Il campo normale è costante e dunque $d\mathbf{N}_p = 0$ per ogni $p \in S$. Quindi in questo caso il differenziale della mappa di Gauss è in ogni punto l'endomorfismo nullo del corrispondente spazio tangente.

Esempio 1.4. SFERA DI RAGGIO R . Sia S data dall'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Abbiamo già osservato che in ogni punto il vettore normale è parallelo al raggio corrispondente e cioè è parallelo al vettore (x, y, z) . Fissiamo l'orientazione verso l'*interno* della sfera.



Normalizzando si ha

$$\mathbf{N}(p) = \frac{1}{R}(-x, -y, -z)$$

Se $\alpha : I \rightarrow S$ è una curva sulla sfera, data dalle funzioni $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si ha

$$(\mathbf{N} \circ \alpha)(t) = \mathbf{N}(t) = \frac{1}{R}(-x(t), -y(t), -z(t))$$

e quindi

$$\mathbf{N}'(0) = \frac{1}{R}(-x'(0), -y'(0), -z'(0)) = -\frac{1}{R}\alpha'(0)$$

e cioè

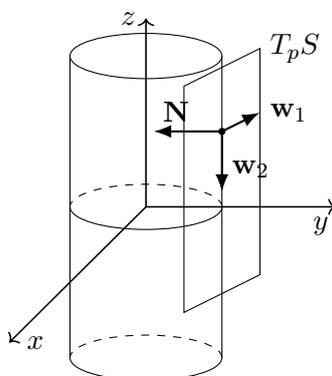
$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}) = -\frac{1}{R}\mathbf{w}$$

e possiamo osservare che:

- $d\mathbf{N}_p$ è un multiplo dell'identità per ogni punto p . Tutti i vettori sono autovettori di autovalore $-1/R$ e $d\mathbf{N}_p$ è diagonalizzabile
- \mathbf{N} (come anche $d\mathbf{N}_p$) dipende dal raggio della sfera e quindi sfere di raggio diverso hanno mappe di Gauss diverse

Esempio 1.5. CILINDRO DI RAGGIO R . Sia S data dall'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Come prima, fissiamo l'orientazione verso l'interno del cilindro. Allora si ha

$$\mathbf{N}(p) = \frac{1}{R} (-x, -y, 0)$$

in quanto \mathbf{N} è orizzontale e punta verso l'interno. Se $\alpha : I \rightarrow S$ è una curva sul cilindro, data dalle funzioni $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si ha

$$(\mathbf{N} \circ \alpha)(t) = \mathbf{N}(t) = \frac{1}{R} (-x(t), -y(t), 0)$$

e quindi

$$\mathbf{N}'(0) = \frac{1}{R} (-x'(0), -y'(0), 0)$$

Sia ora $\mathbf{w} \in T_p S$. Ci sono 2 casi:

- \mathbf{w}_1 è orizzontale (cioè parallelo al piano xy). In particolare la sua terza componente è nulla e quindi $d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}_1) = -\frac{1}{R} \mathbf{w}_1$
- \mathbf{w}_2 è verticale (cioè parallelo all'asse z). In particolare le sue prime due componenti sono nulle e quindi $d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}_2) = 0$

Ci sono dunque due autovettori, ortogonali fra loro, di autovalori rispettivamente $-1/R$ e 0 . In particolare, anche in questo caso $d\mathbf{N}_p$ è diagonalizzabile.

In tutti i casi visti finora la mappa $d\mathbf{N}_p$ risulta diagonalizzabile, con una base di autovettori ortogonali. Questo non è un caso, ma una proprietà generale del differenziale della mappa di Gauss.

Proposizione 1.6. *Il differenziale della mappa di Gauss*

$$d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

è un endomorfismo autoaggiunto (o simmetrico) e cioè

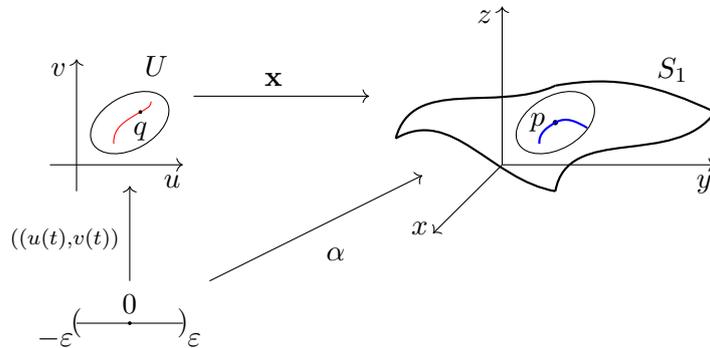
$$\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}) \rangle, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$$

dove $\langle -, - \rangle$ è il prodotto scalare di vettori tangenti dato dalla prima forma fondamentale.

Dimostrazione. Poiché $d\mathbf{N}_p$ è lineare e il prodotto scalare è bilineare, basta dimostrare la proprietà richiesta per i vettori di una base.

Sia allora $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale tale che $p \in \mathbf{x}(U)$ e sia $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ la base di $T_p S$ determinata da questa parametrizzazione.

Sia $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva su S scritta in coordinate locali tale che $\alpha(0) = p$.



Calcolando il differenziale si ha

$$d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=0} = \mathbf{N}_u \cdot u'(0) + \mathbf{N}_v \cdot v'(0)$$

Per calcolare le immagini dei vettori \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v dobbiamo trovare delle curve che li abbiano come vettori tangenti. Ma questo è facile: sono le linee coordinate. Ponendo $u(t) = t$, $v(t) = 0$ la curva α corrispondente ha \mathbf{x}_u come vettore tangente e quindi

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u \cdot 1 + \mathbf{N}_v \cdot 0 = \mathbf{N}_u$$

cioè il vettore derivata parziale del campo \mathbf{N} rispetto alla variabile u e calcolato in p . Allo stesso modo, usando l'altra linea coordinata si ottiene

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v$$

Perché per $\mathbf{v} = \mathbf{x}_u$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}_u$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{x}_v$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}_v$ l'uguaglianza è ovvia, l'unica uguaglianza da dimostrare è

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle$$

Osserviamo ora che, al variare del punto p sulla superficie S , il vettore \mathbf{N} è sempre *normale*, mentre i vettori \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v sono sempre tangenti e quindi i prodotti scalari sono identicamente nulli

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u \rangle \equiv 0, \quad \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v \rangle \equiv 0$$

I campi vettoriali (le funzioni) \mathbf{N} , \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v sono funzioni delle due variabili (u, v) e le derivate parziali di questi prodotti scalari saranno quindi identicamente nulle. Si ha cioè:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle \equiv 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle \equiv 0 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= -\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle \\ &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle \end{aligned}$$

perché le derivate seconde miste sono uguali: $\mathbf{x}_{vu} = \mathbf{x}_{uv}$. \square

Dalla teoria degli endomorfismi autoaggiunti e in particolare dal Teorema Spettrale otteniamo dunque che

- $d\mathbf{N}_p$ è *diagonalizzabile*
- $d\mathbf{N}_p$ ha una *base ortonormale* di autovettori

Questo teorema, così come altri fatti di algebra lineare che useremo in seguito, fanno parte del programma dei corsi di Geometria del primo anno. Potete trovare le dimostrazioni in un qualunque libro di algebra lineare. In particolare, facendo riferimento all'Abbena-Fino-Gianella, la definizione di endomorfismo autoaggiunto si trova nel Capitolo 6.6 mentre il Teorema Spettrale è il Teorema 7.9.

1.2. La seconda forma fondamentale. Usiamo ora una costruzione di algebra lineare: la forma quadratica associata ad un endomorfismo autoaggiunto. Sia $\varphi : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$$

Poiché $d\mathbf{N}_p$ è lineare, questa funzione è bilineare e poiché $d\mathbf{N}_p$ è autoaggiunto è anche simmetrica. Dunque φ è una *forma bilineare simmetrica* e possiamo definire la forma quadratica associata

$$Q(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$$

Il Capitolo 8 dell'Abbena-Fino-Gianella contiene tutto quello che ci servirà, in particolare le definizioni che si trovano nei paragrafi 8.1 e 8.2. Non faremo molto uso della classificazione delle forme quadratiche perché la dimensione dello spazio vettoriale $T_p S$ è 2 e quindi tutti i fatti importanti sono molto semplici da dimostrare in questo caso.

Per motivi che saranno chiari in seguito, è meglio cambiare il segno alla forma Q e definiamo

Definizione 1.7. La forma quadratica

$$\Pi_p(\mathbf{v}) = -Q(\mathbf{v}) = \langle -d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$$

è detta *seconda forma fondamentale* di S in p .

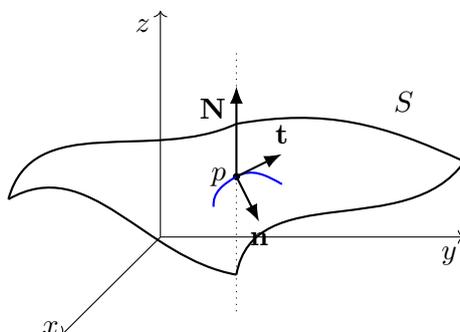
Le due forme fondamentali sono entrambe importanti e descrivono aspetti geometrici diversi: la prima forma descrive la *metrica* sulla superficie ed è legata a concetti quali lunghezza e area. La seconda forma invece descrive la *forma* della superficie intorno ad un punto e permetterà di definire il concetto di “curvatura” per superfici.

Osservazione. Abbiamo visto nel [paragrafo 4.2](#) che due superfici sono (localmente) isometriche se e solo se le loro *prime* forme coincidono e quindi la prima forma descrive la geometria intrinseca.

Invece la *seconda* forma dipende dall'immersione della superficie in \mathbb{R}^3 , analogamente ai concetti di curvatura e torsione di una curva. Un semplice esempio di superfici localmente isometriche con seconde forme diverse è dato dal piano e dal cilindro: incurvando un foglio di carta (un piano) si ottiene un cilindro e quindi sono localmente isometriche (incurvando non abbiamo cambiato le lunghezze). Però le seconde forme sono diverse: quella del piano è identicamente nulla perché $d\mathbf{N}_p$ è nullo in ogni punto, quella del cilindro no.

1.3. La curvatura normale. Lasciamo ora l'algebra lineare e torniamo alla geometria. Vogliamo definire il concetto di curvatura e sembra naturale partire da ciò che conosciamo già e cioè la curvatura di una curva. Se tracciamo una curva sulla superficie, la sua curvatura dovrebbe dare informazioni sulla forma della superficie. Per esempio, è chiaro che su una sfera non è possibile tracciare curve di curvatura nulla, mentre sul piano e sul cilindro si.

Sia dunque S una superficie regolare, $p \in S$ un punto e sia $p \in C \subseteq S$ una curva sulla superficie passante per p .



Il vettore \mathbf{t} tangente a C in p è tangente alla curva e quindi anche alla superficie, cioè $\mathbf{t} \in T_p S$.

Invece il vettore $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$ è normale alla curva ma non necessariamente alla superficie. Pensiamo ad un parallelo sulla sfera: è una curva in un piano orizzontale e dunque il vettore \mathbf{n} è orizzontale, mentre il vettore normale $\mathbf{N}(p)$ punta verso il centro della sfera e in generale non è orizzontale (lo è solo se il punto p sta sull'equatore).

Ha senso quindi considerare la proiezione di \mathbf{n} su $\mathbf{N}(p)$: se $\theta = \widehat{\mathbf{n}\mathbf{N}}$ è l'angolo formato dai due vettori, si ha

$$\cos \theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$$

in quanto entrambi i vettori hanno norma 1. Nel punto p c'è anche un valore per la curvatura della curva C : poniamo

$$k = \text{curvatura di } C \text{ in } p = \|\mathbf{t}'\|$$

Definizione 1.8. Il numero

$$k_n = k \cos \theta = k \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{N} \rangle$$

viene detto *curvatura normale* di C in p .

Notiamo subito che la notazione è ampiamente insufficiente: la lettera “ k ” sta per “curvatura” e l’indice “ n ” sta per “normale”. Però questo numero dipende dal *punto* p in cui si calcola e dalla *curva* C che abbiamo usato per la definizione. Dunque anche le lettere p e C dovrebbero comparire per rendere chiaro cosa stiamo facendo, ma di solito non si scrivono e anche noi non le scriveremo. Ricordiamoci solo che per definire la curvatura normale non basta fissare una superficie, ma occorre fissare *un punto* e *una curva passante per il punto*. Torneremo fra poco su questa questione e giustificheremo perché non è necessario indicare p e C .

Un buon modo per capire il significato della curvatura normale di una curva è il seguente: nel punto p c'è una base di \mathbb{R}^3 data da $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ e

scriviamo in questa base

$$\mathbf{t}' = (\alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v) + \gamma \mathbf{N}$$

Se pensiamo ad un punto che si muove sulla curva C , il vettore \mathbf{t}' è l'*accelerazione*, che è parallela alla *risultante delle forze* che agiscono sul punto (seconda legge di Newton). La scrittura precedente è la decomposizione di \mathbf{t}' in componenti *tangenziale* e *normale* alla superficie. La componente normale è data dalla *reazione vincolare* e cioè dalla forza che costringe il punto a rimanere sulla superficie.

Poiché $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$ si ha

$$k_n = \langle \mathbf{t}', \mathbf{N} \rangle = \gamma$$

e quindi la curvatura normale è uguale all'*accelerazione normale*, data dal vincolo di stare sulla superficie. Quindi la curvatura normale di una curva è la parte di curvatura (accelerazione, forza) spiegata dal fatto che la curva è contenuta nella superficie.

Osserviamo anche che la curvatura normale può essere positiva o negativa: il segno dipende dal segno del coseno e quindi dal fatto che l'angolo $\widehat{\mathbf{nN}}$ sia acuto oppure ottuso. In particolare, se questo angolo è retto la curvatura normale è nulla anche se la curvatura della curva non lo è.

Abbiamo discusso il significato geometrico della curvatura normale: è quanto la superficie si "incurva" nella direzione della curva C . È però abbastanza chiaro che è praticamente impossibile calcolare la curvatura normale direttamente dalla definizione: dobbiamo parametrizzare la curva, calcolare i vettori tangente e normale, calcolare la curvatura, calcolare il vettore normale alla superficie e poi mettere tutto insieme.

Fortunatamente, l'algebra lineare ci viene in aiuto: la curvatura normale si calcola tramite la seconda forma. Anzi, la formula che otterremo dirà di più: la curvatura normale non dipende dalla curva scelta, ma solo dalla sua retta tangente.

Proposizione 1.9. *Sia $p \in S$ e sia $\mathbf{v} \in T_p S$ tale che $\|\mathbf{v}\| = 1$. Sia $\alpha(s)$ una curva parametrizzata per arcolunghezza contenuta in S e tale che*

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \mathbf{v}$$

Allora

$$k_n = \mathbb{I}_p(\mathbf{v})$$

e cioè la curvatura normale della curva α è uguale al valore della seconda forma calcolata sul suo vettore tangente.

Dimostrazione. Sia \mathbf{N} il campo normale della superficie e restringiamo \mathbf{N} ad α . Scriviamo per brevità

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(\alpha(s))$$

intendendo che il campo normale ha come variabile indipendente il parametro s arcolunghezza della curva. Osserviamo che, per ogni valore di s

- $\alpha'(s)$ è *tangente* alla superficie S
- $\mathbf{N}(s)$ è *normale* alla superficie S

e quindi il loro prodotto scalare è identicamente nullo:

$$\langle \mathbf{N}(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \quad \forall s \in I$$

Derivando questo prodotto scalare con la regola di Leibniz si ottiene

$$\langle \mathbf{N}(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle \mathbf{N}'(s), \alpha'(s) \rangle, \quad \forall s \in I$$

Calcoliamo adesso la seconda forma sul vettore \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \text{II}_p(\mathbf{v}) &= \text{II}_p(\alpha'(0)) && \mathbf{v} = \alpha'(0) \text{ per ipotesi} \\ &= -\langle d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle && \text{per la definizione della seconda forma} \\ &= -\langle \mathbf{N}'(0), \alpha'(0) \rangle && \text{per la definizione di differenziale} \\ &= \langle \mathbf{N}(0), \alpha''(0) \rangle && \text{per l'identità appena vista} \\ &= \langle \mathbf{N}(0), k\mathbf{n} \rangle && \text{perché } \alpha \text{ è parametrizzata per arcolunghezza} \\ &= k_n && \text{per la definizione di curvatura normale} \end{aligned}$$

□

Quindi, data una qualunque curva α passante per p , la sua curvatura normale dipende solo dal suo *versore* tangente nel punto. Poiché II_p è una forma quadratica si ha

$$\text{II}_p(-\mathbf{v}) = (-1)^2 \text{II}_p(\mathbf{v}) = \text{II}_p(\mathbf{v})$$

e dunque se due curve passano entrambe per il punto p e hanno la stessa *retta tangente*, avranno versori tangenti uguali oppure opposti e quindi si ottiene:

Teorema 1.10 (Teorema di Meusnier, da Carmo, Proposition 2, Capitolo 3-2). *Tutte le curve tracciate sulla superficie S e aventi in un punto p la stessa retta tangente hanno la stessa curvatura normale.*

Un semplice esempio si può ottenere considerando un punto su una sfera di raggio R e scegliendo una retta orizzontale (parallela al piano xy) come retta tangente. Ogni piano del fascio di centro la retta data taglia la sfera in una circonferenza, di raggio che dipende dal piano. La curvatura di queste circonferenze varia (è pari al reciproco del raggio della circonferenza), ma hanno tutte la stessa curvatura normale, uguale al reciproco del raggio della sfera (Esercizio: dimostrare quest'affermazione).

Una ultima osservazione: sia $p \in S$ un punto fissato. La curvatura normale di S in p è dunque una *funzione* a valori reali che ha per dominio

l'insieme dei vettori di norma 1 dello spazio tangente $T_p S$. Poiché l'insieme di questi vettori è la circonferenza unitaria, la funzione si scrive $k_n : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. In questa notazione non mettiamo il punto p (è sottointeso, oppure fissato all'inizio della discussione) e non c'è bisogno di mettere la curva perché dipende solo dal versore tangente, che è la *variabile indipendente* della funzione curvatura normale. Dunque l'espressione corretta è:

per $\mathbf{v} \in T_p S$ di norma 1, il numero $k_n(\mathbf{v}) = \text{II}_p(\mathbf{v})$ è la curvatura normale della superficie S nella direzione del versore \mathbf{v}

2. La curvatura Gaussiana

Completiamo ora lo studio del differenziale della mappa di Gauss. Tramite nozioni di algebra lineare, troveremo un legame fra gli autovalori di $d\mathbf{N}_p$ e la curvatura normale. Definiremo quindi due importanti funzioni: la *curvatura Gaussiana* e la *curvatura media*.

Sia come sempre S una superficie regolare, $p \in S$ un punto fissato e sia $\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss. Il differenziale della mappa di Gauss in p è un endomorfismo autoaggiunto

$$d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

e quindi diagonalizzabile, con una base di autovettori ortonormale (Teorema Spettrale). Ricordando che nella definizione di seconda forma c'è un segno *meno*, studiamo l'applicazione lineare $-d\mathbf{N}_p$. È ancora un endomorfismo autoaggiunto e poniamo

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale di autovettori di $-d\mathbf{N}_p$
- $\{k_1, k_2\}$ gli autovalori corrispondenti

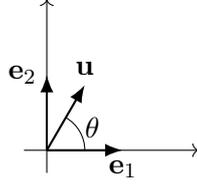
ATTENZIONE. Le funzioni lineari $d\mathbf{N}_p$ e $-d\mathbf{N}_p$ hanno gli stessi autovettori, ma hanno autovalori opposti.

Quindi valgono le uguaglianze

$$-d\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_1) = k_1 \mathbf{e}_1, \quad -d\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_2) = k_2 \mathbf{e}_2$$

Sia ora $\mathbf{u} \in T_p S$ un vettore tangente di norma 1. Nella base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ si può scrivere

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$$



dove θ è l'angolo formato dal vettore \mathbf{u} con la semiretta positiva individuata dal vettore di base \mathbf{e}_1 . Calcolando ora la curvatura normale nella direzione di \mathbf{u} usando la seconda forma, come indicato dalla [Proposizione 1.9](#), si ha:

$$\begin{aligned}
 k_n(\mathbf{u}) &= \Pi_p(\mathbf{u}) = \langle -d\mathbf{N}_p(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle && \text{per la } \text{Proposizione 1.9} \\
 &= \langle -d\mathbf{N}_p(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2), \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \rangle && \text{scrivendo } \mathbf{u} \text{ nella base } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \\
 &= \langle k_1 \cos \theta \mathbf{e}_1 + k_2 \sin \theta \mathbf{e}_2, \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \rangle && \text{per la linearità di } -d\mathbf{N}_p \\
 & && \text{e la definizione di autovettore} \\
 &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta && \text{sviluppando il prodotto scalare} \\
 & && \text{e l'ortonormalità della base } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}
 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto

Teorema 2.1 (Formula di Eulero). *La curvatura normale nella direzione di un versore $\mathbf{u} \in T_p S$ è data dalla formula*

$$k_n(\mathbf{u}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

dove k_1 e k_2 sono gli autovalori di $-d\mathbf{N}_p$ e θ è l'angolo formato da \mathbf{u} e l'autovettore \mathbf{e}_1 .

La formula di Eulero non è altro che il calcolo della seconda forma utilizzando una base conveniente, quella formata dagli autovettori di $-d\mathbf{N}_p$. Vediamo subito una conseguenza importante.

Abbiamo detto che la curvatura normale è una funzione $k_n : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, dove il dominio è l'insieme dei vettori di norma 1 nello spazio tangente $T_p S$. Poiché la circonferenza S^1 è compatta e la curvatura normale continua, questa assume massimo e minimo assoluto. L'espressione della formula di Eulero consente il calcolo di questi massimi e minimi semplicemente derivando.

Esercizio 2.2. Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ due numeri reali e supponiamo che $k_1 \geq k_2$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Allora la funzione $f(\theta)$ ha massimo nei punti della forma $\theta = n\pi$ e minimo nei punti della forma $\pi/2 + n\pi$. Il valore massimo è k_1 , il valore minimo è k_2 . Osserviamo che se $k_1 = k_2$ allora la funzione $f(\theta)$ è costante e tutti i punti sono di massimo e minimo.

Dunque sulla circonferenza, la curvatura normale ha massimo per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, cioè in corrispondenza della direzione di \mathbf{e}_1 e minimo per $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, cioè in corrispondenza della direzione di \mathbf{e}_2 .

Riassumiamo questa discussione nel seguente enunciato:

Proposizione 2.3. *Gli autovalori k_1 e k_2 di $-d\mathbf{N}_p$ sono il massimo e minimo valore della curvatura normale. Le direzioni di curvatura normale massima e minima sono date dagli autovettori di $-d\mathbf{N}_p$ e sono quindi ortogonali fra loro.*

Osserviamo che la curvatura normale ha una definizione geometrica, in termini di quanto una superficie si incurva in una direzione, mentre k_1 e k_2 hanno una definizione puramente algebrica, in termini di autovalori di una certa funzione lineare. La formula di Eulero lega questi due aspetti: il massimo e il minimo di una funzione definita geometricamente in realtà hanno una caratterizzazione algebrica. Inoltre, la funzione “curvatura normale” è la stessa per tutti i punti di una superficie (e anche per tutte le superfici) ed è completamente determinata dai suoi massimi e minimi.

Diamo ora dei nomi alle quantità che abbiamo studiato. Facciamo cioè un po’ di *vocabolario* e riassumiamo tutto in un’unica:

Definizione 2.4 (do Carmo, Capitolo 3-2, Defs. 4 e 6).

- k_1, k_2 si dicono *curvature principali*
- $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ si dicono *direzioni principali di curvatura*
- $K = k_1 k_2 = \det(-d\mathbf{N}_p)$ si dice *curvatura Gaussiana* o *curvatura totale*
- $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-d\mathbf{N}_p)$ si dice *curvatura media*

Ricordiamo che il differenziale della mappa di Gauss $d\mathbf{N}_p$ è un’applicazione lineare che non dipende dalle coordinate locali usate per descrivere la superficie: certamente la *matrice* di $d\mathbf{N}_p$ dipende dalle coordinate locali, ma il determinante e la traccia dipendono solo dall’applicazione lineare e non dalla base usata per scrivere la matrice.

Dunque le quantità K e H sono delle funzioni a valori reali definite sulla superficie S e *non* dipendono dalle coordinate locali, proprio come la curvatura di una curva.

Ancora un po’ di vocabolario: considerando i vari possibili valori di k_1, k_2 e K , si introduce la seguente terminologia

Definizione 2.5. Un punto $p \in S$ si dice:

- *ellittico* se $K > 0$
- *iperbolico* se $K < 0$

- *parabolico* se $K = 0$ e $d\mathbf{N}_p \neq 0$
- *planare* se $d\mathbf{N}_p \equiv 0$
- *ombelicale* se $k_1 = k_2$

Notiamo che ci sono relazioni fra queste definizioni. Per esempio *planare* \implies *ombelicale* oppure *ombelicale* \implies *non iperbolico né parabolico*.

Il significato geometrico di queste definizioni è facile da capire: sia $P \in S$, sia T_pS il piano tangente affine e sia \mathbf{N} il vettore normale in P . Il piano T_pS divide lo spazio in due semispazi e il vettore \mathbf{N} punta verso uno di questi semispazi.

Ombelicale significa che la curvatura normale è costante, e cioè la superficie si “incurva” alla stesso modo in tutte le direzioni: per esempio, su una sfera tutti i punti sono ombelicali. Ovviamente tutti i punti di un piano sono *planari*.

Un punto è *ellittico* quando k_1 e k_2 hanno lo stesso segno e poiché sono il massimo e il minimo delle curvature normali, in un punto ellittico la curvatura normale in tutte le direzioni ha sempre lo stesso segno (positivo oppure negativo). Ricordiamo che il segno della curvatura normale in una direzione dipende dal coseno dell'angolo fra il vettore \mathbf{N} (che è fisso) e il vettore normale \mathbf{n} di una curva con vettore tangente lungo la direzione assegnata. Quindi in un punto ellittico l'angolo fra \mathbf{N} e i vettori \mathbf{n} è sempre acuto oppure sempre ottuso e cioè

se $p \in S$ è ellittico, c'è un intorno opportuno di p in S tutto *dalla stessa parte* del piano tangente

Per esempio, su un ellissoide tutti i punti sono ellittici.

In un punto *iperbolico*, k_1 e k_2 hanno segno opposto e quindi ci sono direzioni che “curvano” da una parte del piano tangente e altre direzioni che curvano dall'altra:

il piano tangente in un punto iperbolico attraversa la superficie (tipo la retta tangente in un punto di flesso)

Per esempio, su un iperboloide tutti i punti sono iperbolici.

Possiamo anche dare una interpretazione algebrica in termini di seconda forma. Si ha:

- p è ellittico \iff la forma quadratica \mathbb{I}_p è definita (positiva o negativa)
- p è iperbolico \iff la forma quadratica \mathbb{I}_p è indefinita

- p è parabolico \iff la forma quadratica Π_p è semidefinita (positiva o negativa) ma non nulla
- p è planare \iff la forma quadratica Π_p è nulla

Ricordando la classificazione delle forme quadratiche in termini di rango e segnatura, possiamo dire:

- p è ellittico \iff Π_p ha segnatura $(2, 0)$ oppure $(0, 2)$ (e quindi rango 2)
- p è iperbolico \iff Π_p ha segnatura $(1, 1)$ (e quindi rango 2)
- p è parabolico \iff Π_p ha segnatura $(1, 0)$ oppure $(0, 1)$ (e quindi rango 1)
- p è planare \iff Π_p ha rango 0

3. Le curvature in coordinate locali

Le quantità introdotte nei paragrafi precedenti (curvatura normale, seconda forma, curvature Gaussiana e media) descrivono la geometria di una superficie ma sono state definite in termini geometrici o algebrici che non si prestano facilmente a calcoli espliciti.

In questo paragrafo scriviamo queste quantità usando una parametrizzazione. Vedremo che tutto può essere calcolato tramite derivate e operazioni algebriche e quindi possiamo sempre capire la geometria attraverso il calcolo differenziale.

Sia quindi S una superficie regolare, $p \in S$ un punto e $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una parametrizzazione locale tale che $p \in \mathbf{x}(U)$. Fissiamo l'orientazione data da

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

La parametrizzazione \mathbf{x} dà una base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ dello spazio tangente $T_p S$. Scriveremo adesso tutto in termini di questa base.

Sia $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva su S tale che $\alpha(0) = p$. Abbiamo calcolato (nella dimostrazione della [Proposizione 1.6](#)) che

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) \\ d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)) &= \mathbf{N}_u u'(0) + \mathbf{N}_v v'(0)\end{aligned}$$

e quindi

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u, \quad d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v$$

Poiché i vettori \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_v sono tangenti, possono essere scritti come

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v\end{aligned}$$

(attenzione agli indici!) e cioè: la matrice di $d\mathbf{N}_p$ rispetto alla base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ è:

$$d\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ATTENZIONE. L'endomorfismo $d\mathbf{N}_p$ è autoaggiunto (o simmetrico) ma la matrice associata rispetto ad una base è simmetrica se la base è ortonormale, altrimenti potrebbe anche non essere simmetrica. Poiché la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ non è in generale ortonormale, la matrice di $d\mathbf{N}_p$ non è necessariamente simmetrica.

Calcoleremo i coefficienti di questa matrice fra poco. Scriviamo adesso la matrice della seconda forma.

$$\begin{aligned} \Pi_p(\alpha'(0)) &= -\langle d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}_u u'(0) + \mathbf{N}_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) \rangle \\ &= e \cdot (u'(0))^2 + 2f \cdot u'(0) \cdot v'(0) + g \cdot (v'(0))^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} e &= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\ f &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle \\ g &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv} \rangle \end{aligned}$$

e le uguaglianze scritte sono quelle ottenute nella dimostrazione della [Proposizione 1.6](#). Osserviamo che in genere è più semplice calcolare le derivate seconde della parametrizzazione che le derivate prime del campo normale (che ha a denominatore una radice quadrata).

Dunque, rispetto alla base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ si ha che:

$$\Pi_p(\alpha'(0)) = \begin{bmatrix} u'(0) & v'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$$

e cioè la matrice $\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$ è la matrice della forma quadratica Π_p nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

Questa matrice si calcola dunque facendo derivate e operazioni algebriche a partire dalla parametrizzazione, proprio come la matrice della prima forma. È dunque calcolabile esplicitamente in modo immediato.

Osservazione. I coefficienti della prima forma fondamentale si indicano con le lettere E, F, G . Questa notazione è universale ed è stata introdotta da Gauss nelle *Disquisitiones*: di conseguenza, tutti usano queste lettere. Invece la notazione per i coefficienti della seconda forma fondamentale è meno standard. Noi useremo le lettere e, f, g come il do Carmo e l'Abate-Tovena.

Altre lettere usate comunemente sono L, M, N (sul libro di Postnikov o sulle note di Hitchin).

A differenza di quello che dicono Abate-Tovena nell'Osservazione 4.5.10 di pag. 195, la notazione e, f, g non è dovuta a Gauss (e forse per questo non ha lo stesso autorevolezza). Infatti Gauss non parla mai di seconda forma o di endomorfismi autoaggiunti: questi concetti di algebra lineare sono stati introdotti successivamente. Gauss considera tre quantità che sono proporzionali a e, f, g e le usa nello stesso modo nostro. La notazione che usa è però tutt'altro che soddisfacente: le quantità si chiamano D, D', D'' , non una grande idea perché sembrano derivate prime e seconde. Nelle note della traduzione inglese delle *Disquisitiones* si dice che le quantità e la notazione usate attualmente sono state introdotte da "Italian geometers", probabilmente Francesco Brioschi¹ o Luigi Bianchi², importanti studiosi di geometria differenziale della seconda metà dell'Ottocento.

Calcoliamo ora la matrice del differenziale della mappa di Gauss. Ricordiamo la forma bilineare

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{v}, d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}) \rangle$$

perché il differenziale della mappa di Gauss è autoaggiunto.

Nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, chiamiamo A la matrice della prima forma (il prodotto scalare che compare qui sopra), chiamiamo B la matrice di φ (e cioè la matrice della seconda forma) e chiamiamo C la matrice di $d\mathbf{N}_p$. In forma matriciale, una forma bilineare si scrive moltiplicando vettori e loro trasposti e l'uguaglianza precedente diventa

$$\mathbf{v}^t \cdot B \cdot \mathbf{w} = -\mathbf{v}^t \cdot A \cdot (C\mathbf{w}) = -\mathbf{v}^t \cdot (A \cdot C) \cdot \mathbf{w}$$

e poiché questa equazione vale per ogni coppia di vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} , deve essere

$$B = -A \cdot C$$

La matrice A è la matrice di un prodotto scalare e quindi è invertibile. Si ha dunque

$$-C = A^{-1} \cdot B$$

nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ la matrice di $-d\mathbf{N}_p$ si scrive come

$$(15) \quad -d\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

e anche questa matrice si ottiene dalla parametrizzazione \mathbf{x} facendo derivate e operazioni algebriche.

¹vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brioschi/> per una biografia di Brioschi

²vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bianchi/> per una biografia di Bianchi

Da questa relazione otteniamo subito (usando il Teorema di Binet sul determinante del prodotto di matrici) l'espressione per la *curvatura Gaussiana*

$$(16) \quad K = \det(-d\mathbf{N}_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

che è di gran lunga l'espressione più semplice per calcolare la curvatura Gaussiana.

La curvatura media è un po' più laboriosa da calcolare, perché la traccia di un prodotto non si scrive facilmente in termini delle tracce delle due matrici. Calcolando esplicitamente la matrice inversa (è solo una matrice 2×2), moltiplicando e prendendo la traccia si ottiene la formula

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-d\mathbf{N}_p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Esercizio 3.1. Svolgere i calcoli indicati e verificare che la formula per H è corretta.

Possiamo ancora osservare che le curvature principali k_1 e k_2 sono gli autovalori di $d\mathbf{N}_p$ e quindi soddisfano le condizioni

$$k_1 k_2 = K, \quad k_1 + k_2 = 2H$$

e sono quindi le radici dell'equazione

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$$

Naturalmente, si può anche scrivere la matrice di $-d\mathbf{N}_p$ e calcolarne gli autovalori. Le direzioni di curvatura sono gli autovettori e si calcolano facilmente (ricordiamoci che si tratta di matrici 2×2 e tutti i conti sono semplici).

4. Esempi

Esempio 4.1. PIANO. In questo caso è tutto banale. Sia S il piano passante per p_0 e generato dai vettori \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 . Possiamo prendere \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 di norma 1 e ortogonali

Una parametrizzazione (che copre tutto il piano) è

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2$$

Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$$

e quindi la matrice della prima forma è

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = 1 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0 \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 = 1 \end{aligned}$$

Il campo normale (la mappa di Gauss) è dato da

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2\|} = \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$$

che è costante e quindi il suo differenziale è $-d\mathbf{N}_p = 0$ in ogni punto. Calcolando la seconda forma, le derivate parziali $\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_v \equiv 0$ e quindi \mathbb{I}_p è la forma identicamente nulla.

Perciò

$$K \equiv 0, \quad H \equiv 0$$

curvatura Gaussiana e media sono identicamente nulle e tutti i punti sono *planari* (non una grande sorpresa) e quindi anche *ombelicali*.

Esempio 4.2. SFERA. Abbiamo calcolato nel [sotto-paragrafo 1.1](#) che

$$d\mathbf{N}_p = -\frac{1}{R} \text{id}$$

è un multiplo scalare dell'identità di $T_p S$. Allora la matrice è

$$-d\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

(un multiplo dell'identità ha matrice multipla della matrice identità *in ogni base*) e quindi

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}, \quad K = \frac{1}{R^2}, \quad H = \frac{1}{R}$$

Quindi tutti i punti sono *ellittici* e *ombelicali*.

Si può dimostrare (vedi do Carmo, Capitolo 3-2, Proposition 4) che se tutti i punti di una superficie S sono ombelicali, allora S è (parte di) un piano o una sfera. Questo è l'analogo in dimensione 2 del fatto che una curva piana con curvatura costante è una retta oppure una circonferenza.

Esempio 4.3. TORO. Prendiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = (a + r \cos v) \cos u \\ y = (a + r \cos v) \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$$

Ricordiamo che (vedi [Esempio 4.1.10](#))

$$E = (a + r \cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

Si ha dunque

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = r(a + r \cos v)$$

dove il valore assoluto non serve perché l'argomento è sempre positivo. Dunque

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{r(a + r \cos v)} \langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle$$

Calcolando il prodotto misto (e in modo analogo gli altri coefficienti) si ha:

$$e = \cos v(a + r \cos v), \quad f = 0, \quad g = r$$

e dunque

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r \cos v(a + r \cos v)}{r^2(a + r \cos v)^2} = \boxed{\frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}}$$

Il denominatore è sempre positivo (perché $a > r$) e quindi il segno è dato dal numeratore. Il parametro v è l'angolo sulla circonferenza “verticale” che facciamo ruotare per ottenere il toro. Il coseno è positivo nel primo e quarto quadrante e negativo nel secondo e terzo. Dunque la curvatura Gaussiana del toro è

- *positiva* per i punti sull'esterno del toro \rightarrow punti ellittici
- *negativa* per i punti sull'interno del toro \rightarrow punti iperbolici
- *nulla* per i punti sulle circonferenze superiore e inferiore \rightarrow punti parabolici

Esercizio 4.4. Leggere la risoluzione dettagliata del primo esercizio del foglio “Esercizi su prima e seconda forma” che trovate su Moodle e svolgere gli altri esercizi in modo simile.

In modo simile, svolgere tutti gli esercizi numero 2 dei compiti d'esame degli anni 16/17 e 17/18 e numero 3 dei compiti dell'anno 18/19.

5. Il Theorema Egregium

Dimostriamo in questo paragrafo il famoso *Theorema Egregium* di Gauus, che afferma che la curvatura Gaussiana è invariante per isometrie. Questo teorema è sorprendente perché la definizione di curvatura Gaussiana è data tramite la mappa di Gauss, che dipende dall'immersione della superficie nello spazio: infatti la mappa di Gauss non è nient'altro che il campo normale e questo dipende dall'immersione in \mathbb{R}^3 .

Abbiamo già osservato che il differenziale della mappa di Gauss di piano e cilindro sono differenti. Addirittura, le curvature *medie* di piano e cilindro sono differenti. Ma le curvature Gaussiane sono uguali (ed entrambe identicamente nulle). La [formula \(16\)](#) che abbiamo ottenuto per K a [pag. 171](#)

mostra chiaramente la dipendenza dalla seconda forma. Dimostreremo che invece si può calcolare K solo usando la prima forma.

Sia S una superficie regolare orientabile e sia $p \in S$ un suo punto. Consideriamo $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$, il differenziale della mappa di Gauss in p e denotiamo la matrice di $d\mathbf{N}_p$ nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ come

$$d\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza matriciale $d\mathbf{N}_p = -\mathbf{I}_p^{-1} \mathbf{II}_p$ (formula (15) a pag. 170) abbiamo le formule (verificare per esercizio e prestare attenzione ai segni):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{Ff - Ge}{EG - F^2}, & a_{21} &= \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{Fg - Gf}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \end{aligned}$$

dove

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

e

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

sono i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

Per definizione la curvatura Gaussiana K è il determinante dell'endomorfismo $-d\mathbf{N}_p$ e quindi è una funzione a valori reali

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

che *non dipende dalle coordinate locali*. Usando le formule precedenti per calcolare il determinante abbiamo ottenuto la formula:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Per ottenere il *Theorema Egregium* faremo vedere che in realtà K dipende solo dai coefficienti della prima forma e dalle loro derivate ed è quindi invariante per isometrie.

Dalla definizione del differenziale della mappa di Gauss si ha $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u$, $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v$ e usando la matrice calcolata prima scriviamo:

$$(17) \quad \mathbf{N}_u = \frac{Ff - Ge}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} \mathbf{x}_v$$

$$(18) \quad \mathbf{N}_v = \frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \mathbf{x}_v$$

Utilizzeremo queste formule alla fine dei calcoli.

I vettori $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ formano una base di \mathbb{R}^3 e inoltre $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. In modo analogo alle formule di Frenet possiamo scrivere i vettori derivate seconde in questa base:

$$(19) \quad \mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e \mathbf{N}$$

$$(20) \quad \mathbf{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + f \mathbf{N}$$

$$(21) \quad \mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + g \mathbf{N}$$

dove i Γ_{ij}^k sono opportune funzioni di u, v che sono detti *simboli di Christoffel* o *coefficienti della connessione*.

Per prima cosa osserviamo che i coefficienti di \mathbf{N} che compaiono sono effettivamente i coefficienti della seconda forma fondamentale. Per dimostrarlo basta calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N}$, \dots e usare la definizione di seconda forma fondamentale. Per esempio, si ha

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = (\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} = e$$

che è proprio la definizione del coefficiente e . Moltiplicando scalarmente le altre due equazioni con \mathbf{N} si ottengono gli altri due coefficienti.

Determiniamo ora i termini Γ_{ij}^k . Derivando rispetto a u e v la relazione $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, si ottiene:

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2} E_u, \quad \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2} E_v$$

e allo stesso modo derivando $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ si ha:

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2} G_u, \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2} G_v$$

Deriviamo ora $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$: si ha

$$F_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad F_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

e usando le relazioni precedenti si ottiene:

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

Moltiplichiamo scalarmente l'equazione (19) per \mathbf{x}_u e per \mathbf{x}_v . Ricordando che \mathbf{N} è ortogonale a \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v e usando le relazioni precedenti si ottiene il sistema

$$\begin{cases} E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} E_u \\ F \Gamma_{11}^1 + G \Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

da cui si vede che Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 dipendono solo da E, F, G e le loro derivate prime. Moltiplicando allo stesso modo le equazioni (20) e (21) si ottengono tutti gli altri simboli di Christoffel. Per avere l'espressione esplicita dei simboli di Christoffel in termini di prima forma basta risolvere i sistemi lineari precedenti, per esempio con la formula di Cramer (notiamo che la

matrice dei coefficienti del sistema è la matrice della prima forma che è invertibile).

Non scriviamo in dettaglio il risultato perché non ci servirà. L'unica cosa che serve è che tutti i Γ_{ij}^k dipendono solo dalla prima forma fondamentale e dalle sue derivate.

I simboli di Christoffel sono stati ottenuti in modo simile alla curvatura e torsione di una curva e cioè scrivendo le derivate seconde in termini di una base di \mathbb{R}^3 formata dalle derivate prime. Il teorema fondamentale della teoria locale delle curve assicura che non ci sono restrizioni sulla curvatura e sulla torsione: ogni coppia di funzioni è la coppia (k, τ) di una curva.

Invece, non tutte le funzioni possono essere simboli di Christoffel di una superficie. Oltre l'ovvia condizione $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ (che non abbiamo nemmeno messo in evidenza perché sappiamo che $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ e quindi i relativi coefficienti sono uguali), ci sono altre condizioni che si ottengono considerando derivate miste di ordine superiore.

Di tutte le derivate miste possibili, calcoliamo la derivata terza \mathbf{x}_{uuv} e scriviamola in termini della base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$

$$\mathbf{x}_{uuv} = \alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v + \gamma \mathbf{N}$$

Possiamo calcolare in due modi, ottenendo lo stesso risultato: $(\mathbf{x}_{uu})_v$ derivando rispetto a v l'equazione (19) oppure $(\mathbf{x}_{uv})_u$ derivando rispetto a u l'equazione (20). In entrambi i casi metteremo in evidenza solo il coefficiente β di \mathbf{x}_v e tralascieremo gli altri termini. Inoltre scriveremo tutti i termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale come (...), senza calcolare la loro espressione esatta.

Prima di iniziare il calcolo, osserviamo che le altre derivate miste possibili e i coefficienti degli altri termini danno delle ulteriori relazioni sui simboli di Christoffel. Per il risultato che ci interessa basta questa. In totale vi sono altre due relazioni distinte, dette *equazioni di Mainardi-Codazzi* e si può dimostrare il *Teorema di Bonnet* che afferma che date sei funzioni E, F, G, e, f, g che soddisfano la condizione di Gauss e le equazioni di Mainardi-Codazzi, esiste una unica superficie che ha E, F, G, e, f, g come prima e seconda forma fondamentale. Trovate l'enunciato di questo teorema sul do Carmo alla fine del Capitolo 4-3 e la dimostrazione nell'Appendice al Capitolo 4 oppure sull'Abate-Tovena nel Capitolo 4.9. L'idea della dimostrazione è la stessa del Teorema fondamentale per le curve e cioè scrivere un sistema di equazioni differenziali e risolverlo. C'è una complicazione notevole dovuta al fatto che il sistema da risolvere è un sistema di equazioni alle derivate parziali (rispetto alle variabili u e v), e i relativi teoremi di esistenza e unicità (quando ci sono) sono molto più difficili da ottenere e

di solito non sono discussi al secondo anno di Matematica ma in corsi più avanzati.

Dunque dall'equazione (19) si ha:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu})_v &= [\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e\mathbf{N}]_v \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{x}_v + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_{vv} + e_v \mathbf{N} + e\mathbf{N}_v \end{aligned}$$

A secondo membro ci sono sei addendi: il primo e il quinto sono multipli rispettivamente di \mathbf{x}_u e \mathbf{N} e quindi non contribuiscono a β .

Il terzo addendo è un multiplo di \mathbf{x}_v e perciò contribuisce a β , ma il suo contributo è la derivata di un simbolo di Christoffel e quindi dipende solo dalla prima forma.

Consideriamo ora il secondo e quarto addendo: sono multipli di

$$\mathbf{x}_{uv} = \dots + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + \dots$$

e

$$\mathbf{x}_{vv} = \dots + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + \dots$$

dove i termini non scritti non contribuiscono a β . Dunque anche il secondo e il quarto addendo contribuiscono a β solo mediante simboli di Christoffel.

Invece l'ultimo addendo si scrive, ricordando l'equazione (18):

$$e\mathbf{N}_v = e \left(\frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \mathbf{x}_v \right)$$

e quindi ha un contributo a β che contiene anche coefficienti della seconda forma fondamentale. Dunque:

$$\beta = e \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} + (\text{termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale})$$

Derivando l'equazione (20) rispetto a u e procedendo allo stesso modo per individuare i contributi al coefficiente β si ottiene:

$$\beta = f \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} + (\text{termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale})$$

Uguagliando e portando a secondo membro tutto quello che dipende solo dalla prima forma si ottiene che

$$e \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} - f \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} = \text{dipende solo dalla prima forma fondamentale}$$

Semplificando si ha:

$$e \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} - f \frac{Fe - Ef}{EG - F^2} = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK$$

Per ottenere K basta dividere per E (perché $E \neq 0$?) e si ha:

Proposizione 5.1. *La curvatura Gaussiana K può essere scritta mediante una formula che contiene solo i coefficienti della prima forma fondamentale e le loro derivate (prime e seconde).*

e quindi, nelle parole di Gauss (*Disquisitiones*, fine art. 12):

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

L'espressione esatta può essere facilmente(!) trovata esplicitando i calcoli precedenti. Una formula con un po' di raccoglimenti fatti è la seguente:

$$K = -\frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right\}$$

Come si vede è piuttosto complicata e non è utile nei calcoli. Questa formula si trova sul Postnikov. Trovate altre formule simili sull'Abate-Tovena (Teorema 4.6.11, pag. 203) e sul do Carmo (Capitolo 4-3, formula (5) a pag. 237): in entrambi i casi K è espresso in termini dei simboli di Christoffel e quindi le formule sono un po' più semplici. Un'altra formula comune (sostanzialmente la stessa data sopra) è la cosiddetta *formula di Brioschi*, che potete trovare su Wikipedia, all'indirizzo https://it.wikipedia.org/wiki/Theorema_egregium con una dimostrazione del Theorema Egregium basata su questa formula.

6. La definizione di Gauss di curvatura

La definizione moderna di curvatura è diversa da quella data da Gauss (ma ovviamente equivalente). Gauss usa la geometria e non l'algebra lineare.

Sia S una superficie regolare e sia $\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$ la mappa di Gauss. Sia $R \subset S$ una regione di S . Gauss definisce la *curvatura totale* o *curvatura integra* della regione R come l'area di $\mathbf{N}(R)$, la sua immagine sulla sfera unitaria mediante la mappa di Gauss. Questa definizione richiede che la superficie sia orientabile, per avere mappa di Gauss, e inoltre in questo modo la curvatura viene sempre positiva, perché è un'area.

Gauss poi concentra l'attenzione su un punto $p \in S$ e definisce la *misura curvaturae* nel punto p come il rapporto fra la curvatura integra (cioè l'area sulla sfera) e l'area sulla superficie di una regione infinitamente piccola intorno al punto p , o come dice Gauss

*rationem arearum infinite parvarum in superficie curva et
in superficie sphaerica sibi mutuo respondentium*

Sappiamo tutti le parole che si devono usare oggi per dare senso ad una affermazione del genere: si usa un limite (ricordiamo che Gauss scrive prima di Weierstrass). In particolare, possiamo dare una definizione moderna in questo modo: sia $p \in S$ e sia R una regione che contiene p . Possiamo considerare il rapporto delle aree come prima, cioè la *curvatura integra* di R divisa per la sua area e poi prendere il limite quando l'area di R tende a 0:

$$K(p) = \lim_{A(R) \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{N}(R))}{A(R)}$$

Tralasciando il problema di dire con precisione cosa vuol dire il limite, se scriviamo gli integrali che calcolano il numeratore e il denominatore vediamo che gli integrandi differiscono esattamente per il determinante del differenziale della mappa \mathbf{N} e otteniamo la curvatura Gaussiana come l'abbiamo definita noi.

In realtà se calcoliamo le *aree*, la formula di sostituzione degli integrali doppi ha il *valore assoluto* del determinante. Gauss nota che però possiamo considerare l'orientamento sulle due superfici e vedere se \mathbf{N} conserva l'orientamento oppure no e assegnare un segno positivo oppure negativo. Questo corrisponde a non prendere il valore assoluto e otteniamo la formula che abbiamo usato.

Gauss usa la sua definizione, fa un po' di calcoli e nell'art. 7 scrive

$$k = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}$$

dove (x, y) sono le coordinate (locali) del punto p sulla superficie e (X, Y) sono le coordinate (locali) del punto sulla sfera $\mathbf{N}(p)$, immagine di p per la mappa di Gauss: esattamente $\det(-d\mathbf{N}_p)$.

Trovate una discussione completa di questi argomenti sul do Carmo alla fine del Capitolo 3-3, pagg. 168-170 e naturalmente, nelle *Disquisitiones*.

7. Esercizi svolti dal do Carmo

Esercizio 1. (do Carmo, Esercizio 3-2.8) Descrivere l'immagine sulla sfera unitaria della mappa di Gauss delle superfici seguenti

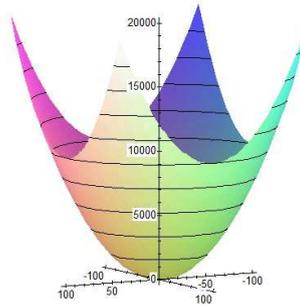
- a. $S : z = x^2 + y^2$ - *paraboloide di rotazione*
- b. $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ - *iperboloide di rotazione*
- c. $S : x^2 + y^2 = \cosh^2 z$ - *catenoide*

Soluzione.

a. $S : z = x^2 + y^2$ paraboloido di rotazione. Poiché la superficie è un grafico, possiamo usare come parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

sul dominio $U = \mathbb{R}^2$.



La mappa di Gauss è $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$. Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u)$$

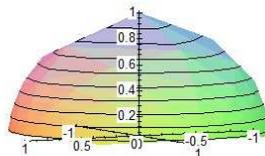
$$\mathbf{x}_v = (0, 1, 2v)$$

il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-2u, -2v, 1)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(-2u, -2v, 1)$$



La componente z è sempre positiva e quindi l'immagine è contenuta nella semisfera aperta superiore. Per dimostrare che l'immagine è tutta la *semisfera superiore* prendiamo (x, y, z) nella semisfera superiore. La mappa di Gauss in componenti è:

$$x = -\frac{2u}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \quad y = -\frac{2v}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}$$

e si possono ricavare u e v

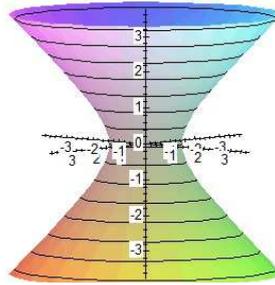
$$u = -\frac{x}{2z}, \quad v = -\frac{y}{2z}$$

Quindi tutti i punti della semisfera superiore sono immagine del dominio U .

b. $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ iperboloide di rotazione. Poiché la superficie è una superficie di rotazione, abbiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$$

sul dominio $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.



La mappa di Gauss è $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$. Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$$

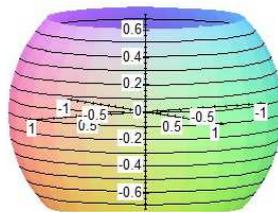
$$\mathbf{x}_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-\cosh^2 u \cos v, -\cosh^2 u \sin v, \cosh u \sinh u)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u)$$



L'immagine è quindi la parte della sfera contenuta fra due paralleli. Per trovare la coordinata z di questi paralleli, basta calcolare il limite della componente z del vettore \mathbf{N} :

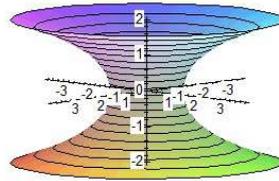
$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh u}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il limite è immediato scrivendo $\sinh u$ e $\cosh u$ in termini di funzioni esponenziali.

c. $S : x^2 + y^2 = \cosh^2 z$ catenoide. Anche la catenoide è una superficie di rotazione e abbiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

sul dominio $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$.



La mappa di Gauss è $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$. Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$$

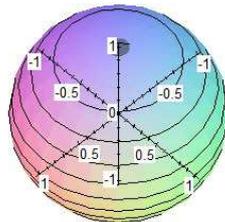
$$\mathbf{x}_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \cosh u \sinh u) = \cosh u(-\cos v, -\sin v, \sinh u)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\cosh u}(-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u)$$



La mappa sembra non essere suriettiva (nel disegno, c'è un piccolo buco intorno al polo Nord). Calcoliamo come prima il limite della componente z del vettore \mathbf{N} :

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{\sinh u}{\cosh u} = \pm 1$$

e quindi l'immagine è la sfera meno i poli Nord e Sud.

Esercizio 2. (do Carmo, Esercizio 3-2.16) Dimostrare che i meridiani di un toro sono linee di curvatura.

Soluzione. Ricordiamo che per definizione, una linea di curvatura è una curva tracciata su una superficie che ha direzione tangente, in ogni punto, uguale ad una direzione principale di curvatura (do Carmo, cap. 3-2, definizione 5).

In realtà, l'enunciato da dimostrare per questo esercizio è un caso particolare di un fatto più generale

Proposizione (do Carmo, cap. 3-3, Esempio 4). *Se S è una superficie di rotazione, allora i meridiani e i paralleli sono linee di curvatura.*

Dimostrazione. Sia S parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u))$$

dove $\alpha(u) = (\varphi(u), 0, \psi(u))$ è la curva nel piano xz che viene ruotata intorno all'asse z . La curva non incontra l'asse z e quindi $\varphi(u) > 0$. Inoltre possiamo supporre che $\alpha(u)$ sia parametrizzata per arcolunghezza e quindi $\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2 \equiv 1$.

I vettori tangenti ai meridiani e ai paralleli sono, rispettivamente, \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v . Dobbiamo perciò verificare che la matrice di $d\mathbf{N}_p$ è diagonale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

Calcoliamo (senza scrivere la variabile u per brevità):

$$\mathbf{x}_u = (\varphi' \cos v, \varphi' \sin v, \psi')$$

$$\mathbf{x}_v = (-\varphi \sin v, \varphi \cos v, 0)$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-\varphi\psi' \cos v, -\varphi\psi' \sin v, \varphi\varphi') \\ &= \varphi(-\psi' \cos v, -\psi' \sin v, \varphi') \end{aligned}$$

Dividendo per φ , osserviamo che il vettore è di norma costante 1 e quindi

$$\mathbf{N} = (-\psi' \cos v, -\psi' \sin v, \varphi')$$

La prima forma fondamentale è:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \varphi^2$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (\varphi'' \cos v, \varphi'' \sin v, \psi'')$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (-\varphi' \sin v, \varphi' \cos v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (-\varphi \cos v, -\varphi \sin v, 0)$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -\varphi''\psi' + \varphi'\psi'' \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0 \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \varphi\psi' \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p &= -\mathbf{I}_p^{-1} \cdot \mathbf{II}_p = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varphi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi''\psi' + \varphi'\psi'' & 0 \\ 0 & \varphi\psi' \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} -\varphi''\psi' + \varphi'\psi'' & 0 \\ 0 & \psi'/\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è diagonale come richiesto. \square

Esercizio 3. (do Carmo, Esercizio 3-3.1) Dimostrare che nell'origine $(0, 0, 0)$ dell'iperboloide $z = axy$ si ha $K = -a^2$ e $H = 0$.

Soluzione. La superficie è un grafico e usiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, auv)$$

sul dominio $U = \mathbb{R}^2$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1, 0, av) \\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, au) \end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-av, -au, 1)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2(u^2 + v^2)}}(-av, -au, 1)$$

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + a^2v^2 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = a^2uv \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + a^2u^2 \end{aligned}$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, a) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0 \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2(u^2 + v^2)}} \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0 \end{aligned}$$

Nell'origine, $u = v = 0$ e quindi

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$-d\mathbf{N}_p = \mathbf{I}_p^{-1} \cdot \mathbf{II}_p = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

perciò $K = \det(-d\mathbf{N}_p) = -a^2$ e $H = \text{tr}(-d\mathbf{N}_p) = 0$.

Esercizio 4. (do Carmo, Esercizio 3-3.2) Determinare le curve asintotiche e le linee di curvatura dell'elicoide

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = cu \end{cases}$$

e dimostrare che la curvatura media è nulla.

Soluzione. Per semplicità, facciamo solo il caso $c = 1$. Dalla parametrizzazione si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-v \sin u, v \cos u, 1) \\ \mathbf{x}_v &= (\cos u, \sin u, 0) \end{aligned}$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-\sin u, \cos u, -v)$$

e quindi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} (-\sin u, \cos u, -v)$$

La prima forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + v^2 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0 \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 \end{aligned}$$

Le derivate seconde sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (-v \cos u, -v \sin u, 0) \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0 \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0 \end{aligned}$$

Scriviamo il differenziale della mappa di Gauss:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$-d\mathbf{N}_p = \mathbf{I}_p^{-1} \cdot \mathbf{II}_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

perciò $H = \text{tr}(-d\mathbf{N}_p) = 0$ (si può anche usare la formula per H nel formulario).

Le *direzioni asintotiche* sono le direzioni in cui la curvatura normale è 0 e cioè: se $\mathbf{u} = (a, b)$ deve essere

$$k_n(\mathbf{u}) = \mathbf{II}_p(\mathbf{u}) = 0$$

In questo caso

$$\mathbf{II}_p(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{1+v^2}} ab$$

che si annulla per $a = 0$ oppure $b = 0$. Dunque le *direzioni asintotiche* sono date da \mathbf{x}_u ($b = 0$) e \mathbf{x}_v ($a = 0$).

Le *curve asintotiche* sono curve che hanno come tangenti le direzioni asintotiche e sono quindi $v = \text{costante}$ (che ha vettore tangente \mathbf{x}_u) e $u = \text{costante}$ (che ha vettore tangente \mathbf{x}_v).

Le *linee di curvatura* sono le curve che hanno come tangenti le direzioni principali di curvatura e cioè gli autovettori di $-d\mathbf{N}_p$. Poniamo

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

e osserviamo che $\alpha \neq 0$ sempre. Allora possiamo scrivere

$$-d\mathbf{N}_p = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

da cui è immediato calcolare che gli autovalori sono $\pm\alpha^2$ e gli autovettori sono

$$\mathbf{e}_1 = (\alpha, 1), \quad \mathbf{e}_2 = (-\alpha, 1)$$

Nota: calcolare il prodotto scalare $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$ e verificare che i due autovettori sono ortogonali.

In generale, per trovare le linee di curvatura, occorre risolvere un'equazione differenziale. Per maggiori dettagli, vedere do Carmo, pagg. 162-163.

Esercizio 5. (do Carmo, Esercizio 3-3.3) Determinare le curve asintotiche della catenoide

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = \cosh v \cos u \\ y = \cosh v \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Soluzione. Ripetiamo i calcoli come nell'esercizio precedente. Ricordando che $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$ si ha:

$$\mathbf{x}_u = (-\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_v = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \cosh v (\cos u, \sin u, -\sinh v)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 v}} (\cos u, \sin u, -\sinh v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 v}} (\cos u, \sin u, -\sinh v) \\ &= \frac{1}{\cosh v} (\cos u, \sin u, -\sinh v) \end{aligned}$$

senza valore assoluto perché $\cosh v > 0$ sempre.

La prima forma fondamentale è:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \cosh^2 v$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \cosh^2 v$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (-\cosh v \cos u, -\cosh v \sin u, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (-\sinh v \sin u, \sinh v \cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, 0)$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -1 \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0 \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 1 \end{aligned}$$

Scriviamo il differenziale della mappa di Gauss:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$-d\mathbf{N}_p = \mathbf{I}_p^{-1} \cdot \mathbf{II}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 v} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\cosh^2 v} \end{pmatrix}$$

perciò $H = \text{tr}(-d\mathbf{N}_p) = 0$ (si può anche usare la formula per H nel formulario).

Le *direzioni asintotiche* sono le direzioni in cui la curvatura normale è 0 e cioè: se $\mathbf{u} = (a, b)$ deve essere

$$k_n(\mathbf{u}) = \mathbf{II}_p(\mathbf{u}) = 0$$

In questo caso

$$\mathbf{II}_p(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -a^2 + b^2$$

che si annulla per $a+b=0$ oppure $a-b=0$. Dunque le *direzioni asintotiche* sono date da $\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v$ ($a+b=0$) e $\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v$ ($a-b=0$).

Le *curve asintotiche* sono curve che hanno come tangenti le direzioni asintotiche. Le curve che hanno vettore tangente $\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v$ sono del tipo

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(t, c-t)$$

dove c è costante, e cioè l'immagine in S delle rette $u+v=c$ nel dominio U della parametrizzazione della catenoide.

Allo stesso modo, le curve che hanno vettore tangente $\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v$ sono del tipo

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(t, c+t)$$

dove c è costante, e cioè l'immagine in S della retta $u-v=-c$ nel dominio U della parametrizzazione della catenoide.

Esercizio 6. do Carmo, Esercizio 3-3.5 Consideriamo la superficie di Enneper, data dalla parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

e dimostrare che

a. I coefficienti della prima forma sono

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0$$

b. I coefficienti della seconda forma sono

$$e = 2, \quad g = -2, \quad f = 0$$

c. Le curvature principali sono

$$k_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad k_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

d. Le linee di curvatura sono le curve coordinate

e. Le curve asintotiche sono le curve $u \pm v = \text{costante}$

Soluzione. La parametrizzazione della superficie di Enneper ha dominio $U = \mathbb{R}^2$. Calcoliamo:

$$\mathbf{x}_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$$

$$\mathbf{x}_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-2u(1 + u^2 + v^2), 2v(1 + u^2 + v^2), 1 - (u^2 + v^2)^2)$$

La prima forma fondamentale è (dopo aver raccolto):

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1 + u^2 + v^2)^2$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (1 + u^2 + v^2)^2$$

e quindi

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = (1 + u^2 + v^2)^2$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (-2u, 2v, 2)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (2v, 2u, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 2$$

$$f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$$

$$g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = -2$$

Calcolando K e H si ha:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{(1 + u^2 + v^2)^4}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0$$

e le curvature principali sono le soluzioni di $t^2 - Ht + K = 0$ e si ottiene perciò

$$k_{1,2} = \pm \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

Poiché le matrici della prima e della seconda forma sono diagonali ($F = f = 0$), anche il differenziale della mappa di Gauss è diagonale nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e quindi le linee coordinate sono linee di curvatura.

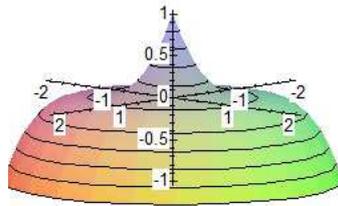
L'ultimo punto è uguale all'esercizio precedente.

Esercizio 7. (do Carmo, Esercizio 3-3.14) Consideriamo la superficie che si ottiene ruotando la curva $y = x^3$, con $-1 < x < 1$ intorno alla retta $x = 1$. Dimostrare che i punti ottenuti dalla rotazione dell'origine $(0, 0)$ sono i punti planari della superficie,

Soluzione. Conviene pensare la curva nel piano xz (invece che xy) e poi traslarla in $\alpha(u) = (u, 0, (u+1)^3)$, così la stiamo ruotando intorno all'asse z .

La curva non è parametrizzata per arcolunghezza e quindi rifacciamo i calcoli come nell'esercizio 5. La superficie S è parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, (u+1)^3)$$



Calcoliamo:

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 3(u+1)^2)$$

$$\mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

e il prodotto esterno è

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (-3u(u+1)^2 \cos v, -3u(u+1)^2 \sin v, u\varphi\varphi') \\ &= u(-3(u+1)^2 \cos v, -3(u+1)^2 \sin v, 1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9(u+1)^4}} (-3(u+1)^2 \cos v, -3(u+1)^2 \sin v, 1)$$

La prima forma fondamentale è:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + 9(u+1)^4$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = u^2$$

Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 6(u+1))$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

e la seconda forma fondamentale è:

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{6(u+1)}{\sqrt{1+9(u+1)^4}}$$

$$f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$$

$$g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = \frac{3u(u+1)^2}{\sqrt{1+9(u+1)^4}}$$

Nei punti che ci interessano si ha $u = -1$ e quindi

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p &= -\mathbf{I}_p^{-1} \cdot \mathbf{II}_p = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi i punti sono planari.

Forme differenziali

Nei corsi di Analisi Matematica sono state introdotte le 1-forme differenziali ed è stato studiato il loro comportamento rispetto all'operazione di integrazione sui cammini.

L'esempio tipico di 1-forma è il differenziale di una funzione: $\omega = df$, però è ben noto che non tutte le 1-forme sono di questo tipo e cioè non tutte le 1-forme sono *esatte*.

Lo studio dell'operazione $f \mapsto df$ porta alla domanda: se ω è una 1-forma, c'è una operazione analoga $\omega \mapsto d\omega$? Cosa significa? Che oggetto è $d\omega$? Quali sono le sue proprietà? Quali operazioni sono possibili con questi oggetti?

La risposta è data dalla generalizzazione del concetto di 1-forma differenziale con l'introduzione delle k -forme differenziali. Questi oggetti dovrebbero essere ottenuti l'uno dall'altro mediante differenziazione e dovrebbero poter essere integrati su domini di dimensione k . Ci aspettiamo inoltre dei teoremi che leghino i risultati degli integrali al comportamento rispetto alla differenziazione.

Svilupperemo questa teoria in questo capitolo. Per impostare bene lo studio abbiamo bisogno di alcune nozioni di algebra lineare che non fanno parte del programma dei corsi del primo anno e perciò nel primo paragrafo introduciamo i concetti di spazio vettoriale duale, di forme multilineari alternanti e di algebra esterna.

Nei paragrafi successivi riprenderemo l'uso degli strumenti dell'Analisi Matematica per definire la nozione di forma differenziale e due importanti operazioni su di esse: la *derivazione esterna* e il *pullback*. Il capitolo si concluderà con vari enunciati, noti sotto il nome di *Lemma di Poincaré*

che danno, sotto opportune ipotesi topologiche sul dominio, delle condizioni (necessarie e) sufficienti per l'esattezza di una k -forma differenziale.

La teoria esposta in questo capitolo porta al Teorema di Stokes, che vedremo nel prossimo capitolo. Questo teorema generalizza e unifica in un solo enunciato vari teoremi, noti dall'Analisi e dalla Fisica con il nome di teorema di Green, teorema della divergenza e teorema del rotore (senza dimenticare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, che è la versione in dimensione 0 del teorema di Stokes!)

Il passo finale sarà il teorema di de Rham, di cui vedremo anticipazioni in questo capitolo e l'enunciato preciso nel [capitolo 8](#). Il teorema di de Rham sarà uno dei teoremi principali trattati nei corsi di Geometria della Laurea Magistrale.

1. Algebra esterna

Iniziamo questo paragrafo rivedendo la definizione e le prime proprietà del duale di uno spazio vettoriale. Questo è un argomento di solito trattato nei corsi di Geometria del primo anno e che spesso risulta di difficile comprensione. È però essenziale in tutto quello che segue e quindi è importante avere chiaro questo concetto. Maggiori dettagli si trovano su un qualunque libro di algebra lineare, in particolare, per esempio, sull'Abbena-Fino-Gianella, Paragrafo 6.8.

Studieremo poi le *forme multilineari*, una generalizzazione delle forme bilineari già note dai corsi precedenti e ci soffermeremo in particolare sul caso *alternante*.

1.1. Spazi vettoriali duali. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{R} . Trattiamo esplicitamente solo il caso reale per semplicità di esposizione e perché è il caso che interessa in geometria differenziale. Tutto quello che diremo (salvo menzione esplicita) vale più in generale per ogni campo K di caratteristica 0 ed è particolarmente interessante il caso $K = \mathbb{C}$.

Definizione 1.1. Il *duale* di V , indicato con V^* è

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineare}\},$$

l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V in \mathbb{R} .

Gli elementi di V^* sono chiamati *forme lineari* o *funzionali lineari*. Il nome *funzionale lineare* è tipico dell'Analisi, mentre il nome *forma lineare* è di solito usato in Algebra o in Geometria. In questo contesto, le parole *forma* o *funzionale* significano semplicemente che il codominio è il campo degli scalari.

È immediato dimostrare che V^* è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite da:

$$\begin{aligned}(f + g)(\mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}), & \forall f, g \in V^*, \forall \mathbf{v} \in V \\ (\alpha \cdot f)(\mathbf{v}) &= \alpha \cdot f(\mathbf{v}), & \forall f \in V^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V\end{aligned}$$

Per ogni base di V si può determinare una corrispondente base di V^* , detta la *base duale*. Sia dunque $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V . Definiamo, per $i = 1, \dots, n$, la forma lineare $f_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$$

dove δ_{ij} è il *delta di Kronecker* che vale 1 per $i = j$ e 0 per $i \neq j$.

Le funzioni f_i sono ben definite perché sono assegnate sui vettori di una base. Le funzioni f_i hanno un nome ben noto: sono le *funzioni coordinate* rispetto alla base \mathcal{B} . Sia infatti $\mathbf{v} \in V$. Scrivendo il vettore rispetto alla base si ha

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$$

e per la linearità di f_i

$$\begin{aligned}f_i(\mathbf{v}) &= f_i(a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n) \\ &= a_1 f_i(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n f_i(\mathbf{v}_n) \\ &= a_i\end{aligned}$$

Quindi, fissata una base in V , si ottengono degli elementi particolari in V^* . L'importanza delle funzioni coordinate è data dalla

Proposizione 1.2. $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ è una base di V^* .

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che f_1, \dots, f_n sono generatori e che sono linearmente indipendenti.

Sia $f \in V^*$. Per $i = 1, \dots, n$, poniamo $\lambda_i = f(\mathbf{v}_i)$. Per i vettori della base si ha:

$$f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i = \lambda_1 f_1(\mathbf{v}_i) + \dots + \lambda_n f_n(\mathbf{v}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

perché $f_i(\mathbf{v}_i) = 1$ e gli altri sono nulli. Dunque le applicazioni lineari f e $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ coincidono sui vettori di una base e quindi sono la stessa applicazione lineare in V^* . Dunque ogni $f \in V^*$ è combinazione lineare delle f_i che quindi sono generatori.

Sia ora $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0 \in V^*$ e cioè l'applicazione lineare identicamente nulla. Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ si ha

$$\alpha_1 f_1(\mathbf{v}) + \dots + \alpha_n f_n(\mathbf{v}) = 0.$$

In particolare, calcolando sui vettori della base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ si ha

$$0 = \alpha_1 f_1(\mathbf{v}_i) + \dots + \alpha_n f_n(\mathbf{v}_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ottenendo $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ e quindi f_1, \dots, f_n sono linearmente indipendenti.

□

Poiché abbiamo trovato una base di V^* con n elementi ($n = \dim V$) abbiamo che $\dim V^* = n$. Dunque V e V^* hanno la stessa dimensione e sono quindi isomorfi. Un isomorfismo è dato, per esempio, facendo corrispondere gli elementi di una base di V con gli elementi della base duale di V^* .

Osservazione. Se V ha dimensione infinita la proposizione precedente non vale. Una base di V è costituita da infiniti elementi e si possono definire le forme f_i come prima. Essi risultano ancora linearmente indipendenti (stessa dimostrazione) ma la dimostrazione che sono generatori non vale più perché dovremmo fare una somma infinita. Dunque otteniamo solo che $\dim V \leq \dim V^*$ e si può dimostrare che la disuguaglianza è sempre stretta. Si ottiene perciò che se V ha dimensione infinita, V e V^* non sono mai isomorfi.

1.2. Algebra multilineare. Diamo ora la definizione generale di *forma multilineare* o, quando vogliamo essere specifici, di *forma k -lineare*. Le forme bilineari sono quelle che si ottengono nel caso $k = 2$:

Definizione 1.3. Una funzione $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *forma k -lineare* se è lineare in ogni variabile, cioè se per ogni $i = 1, 2, \dots, k$ si ha

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \alpha \mathbf{v}_i + \beta \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_k) = \alpha f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) + \beta f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{v}_k)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \in V$.

Esempio 1.4. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e indichiamo (x, y) le coordinate rispetto alla base canonica. La funzione $f : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3$$

dove $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i)$, per $i = 1, 2, 3$ è una forma 3-lineare.

Esempio 1.5. In generale, è facile convincersi che per $V = \mathbb{R}^n$, una forma k -lineare è un polinomio omogeneo di grado k in cui in ogni addendo compaiono le coordinate delle k variabili, tutte a primo grado

Quando consideriamo funzioni di più variabili, possiamo richiedere proprietà di simmetria o di antisimmetria. Per esempio, il caso di forme bilineari simmetriche si studia a fondo nei corsi del primo anno: i prodotti scalari sono esempi di forme bilineari simmetriche. Per lo studio delle forme differenziali è invece importante studiare il caso *antisimmetrico* o *alternante*:

Definizione 1.6. Una forma k -lineare f si dice *alternante* se per ogni $1 \leq i < k$ e per ogni $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ si ha

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \underbrace{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k}_{\text{scambio}}, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) = -f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \underbrace{\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k}_{\text{scambio}}, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k)$$

Quindi alternante significa che quando si scambiano due variabili (consecutive) il segno della funzione cambia.

Conosciamo già un esempio di forma k -lineare alternante: il determinante di una matrice $k \times k$, considerato come funzione delle *colonne*. Il determinante è lineare sulle colonne e se si scambiano due colonne, il determinante cambia segno. Naturalmente, il determinante è anche una forma multilineare alternante se considerato come una funzione sulle righe della matrice.

Dai corsi di Algebra sappiamo che le trasposizioni generano il gruppo simmetrico e cioè ogni permutazione si può scrivere come prodotto di trasposizioni. Si può anche dimostrare che ogni trasposizione è prodotto di trasposizioni *consecutive*:

Esercizio 1.7. Sia $1 \leq i < j \leq n$. Dimostrare che:

$$(i \ j) = (i \ i+1)(i+1 \ i+2) \cdots (j-2 \ j-1)(j-1 \ j)(j-2 \ j-1) \cdots (i+1 \ i+2)(i \ i+1)$$

Per esempio: $(1 \ 4) = (1 \ 2)(2 \ 3)(3 \ 4)(2 \ 3)(1 \ 2)$ (ricordare che le permutazioni si compongono da destra a sinistra).

Quindi ogni permutazione è prodotto delle trasposizioni $(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (k-1 \ k)$ e perciò f è alternante se e solo se per ogni permutazione $\sigma \in S_k$ si ha

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = (-1)^\sigma f(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})$$

dove il simbolo $(-1)^\sigma$ è il *segno* di σ e cioè

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

È chiaro che la somma di due forme k -lineari alternanti è ancora k -lineare alternante e anche ogni multiplo scalare di una forma k -lineare alternante lo è. Dunque le forme k -lineari alternanti formano uno spazio vettoriale e poniamo la seguente

Definizione 1.8. Lo spazio vettoriale

$$\bigwedge^k V^* = \{f : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } k\text{-lineare e alternante}\}$$

si dice la *k -esima potenza esterna* di V^* .

Osservazione. Il nome della k -esima potenza esterna si legge “lambda k V star”.

Osservazione. Ci si potrebbe chiedere: esiste la potenza esterna di V (e non solo del duale)? La risposta è sì, ma la definizione di potenza esterna di uno spazio vettoriale in generale è più complicata della definizione che abbiamo appena dato per uno spazio vettoriale *duale*.

Il motivo è che non abbiamo nessuna informazione sugli elementi di uno spazio vettoriale arbitrario V , mentre gli elementi di uno spazio vettoriale duale sono *funzioni* e possiamo usare la loro speciale natura per definire i concetti che ci interessano.

Esempio 1.9. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Se indichiamo con $x_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione coordinata i -esima, si ha che $\{x_1, x_2, x_3\}$ è una base di V^* .

Possiamo scrivere delle 2-forme alternanti nel modo seguente: per $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, definiamo $\varphi_{ij} = x_i \wedge x_j$ come

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= (x_1 \wedge x_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ \varphi_{13}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= (x_1 \wedge x_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \varphi_{23}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= (x_2 \wedge x_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le funzioni φ_{ij} sono 2-lineari e alternanti per le proprietà dei determinanti. Notiamo che $a_i = x_i(\mathbf{v}_1)$ e $b_i = x_i(\mathbf{v}_2)$ e quindi potremmo scrivere

$$\varphi_{ij}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_i \wedge x_j)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} x_i(\mathbf{v}_1) & x_i(\mathbf{v}_2) \\ x_j(\mathbf{v}_1) & x_j(\mathbf{v}_2) \end{pmatrix}$$

Più in generale, se $h_1, h_2 \in V^*$ sono due forme lineari, possiamo definire una forma bilineare alternante:

$$(h_1 \wedge h_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det (h_i(\mathbf{v}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

e se abbiamo una terza forma lineare h_3 possiamo definire una forma trilineare alternante:

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \det (h_i(\mathbf{v}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Esercizio 1.10. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano h_1, h_2, h_3 e h_4 forme lineari su V . Dimostrare che $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge h_4 = 0$, cioè

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge h_4)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$$

L'esempio precedente mostra che si possono definire delle forme multilineari alternanti a partire da un certo numero di forme lineari. Diamo la definizione generale di questa operazione:

Definizione 1.11. Se $h_1, \dots, h_k \in V^*$, poniamo

$$(h_1 \wedge \dots \wedge h_k)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \det(h_i(\mathbf{v}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq k$$

La forma k -lineare alternante $(h_1 \wedge \dots \wedge h_k)$ è detta *prodotto wedge* delle forme lineari h_1, \dots, h_k .

Esempio 1.12. Se V ha dimensione n e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base, consideriamo la base duale $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, cioè $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ è definito da

$$e_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$$

Allora, per ogni scelta di indici $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ abbiamo delle k -forme multilineari alternanti date da

$$(e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^*)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \det(e_{\alpha_i}^*(\mathbf{v}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq k$$

Esercizio 1.13. Dimostrare che, per forme lineari $h_i \in V^*$:

- (1) $h_1 \wedge h_2 = -h_2 \wedge h_1$;
- (2) $h \wedge h = 0$;
- (3) $h_1 \wedge \dots \wedge h_k = (-1)^\sigma h_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge h_{\sigma(k)}$.

Consideriamo di nuovo le forme k -lineari alternanti dell'[Esempio 1.12](#). Per l'esercizio precedente, a meno del segno possiamo sempre riordinare i termini in modo che $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$.

Lemma 1.14. Sia $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ e $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$. Allora

$$(e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^*)(\mathbf{e}_{\beta_1}, \dots, \mathbf{e}_{\beta_k}) = \delta_{\alpha_1\beta_1} \cdot \delta_{\alpha_2\beta_2} \cdot \dots \cdot \delta_{\alpha_k\beta_k}$$

e cioè vale 1 se $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$ e vale 0 altrimenti.

Dimostrazione. Scriviamo le coordinate dei vettori \mathbf{e}_i in *colonna*: ognuno di essi è quindi una colonna con 1 nella riga i e 0 altrimenti. Formiamo la matrice A di tipo $n \times k$ con le colonne date dai vettori $\mathbf{e}_{\beta_1}, \dots, \mathbf{e}_{\beta_k}$. Per definizione, e come nell'[Esempio 1.9](#), la funzione da calcolare è il determinante della sottomatrice B di A che si ottiene prendendo le righe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$: la riga α_i ha le coordinate α_i -esime e quindi ha i valori della funzione $e_{\alpha_i}^*$.

Se esiste i tale che $\alpha_i \neq \beta_i$, allora la riga i -esima della sottomatrice B è tutta nulla e quindi il determinante è 0.

Se invece $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$ allora la sottomatrice B è la matrice identità di ordine k e quindi il determinante è 1. Le disequazioni sugli α_i e β_j assicurano che gli 1 della matrice B sono sulla diagonale principale. Se l'ordine non fosse crescente, il determinante sarebbe sempre diverso da 0, ma potrebbe essere 1 oppure -1 . \square

Possiamo adesso dimostrare il primo risultato sulle potenze esterne:

Proposizione 1.15. *L'insieme*

$$\{e_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^* \mid \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \quad \alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

è una base di $\wedge^k V^*$ e quindi $\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che gli elementi indicati sono linearmente indipendenti. Sia infatti

$$0 = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} (e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*)$$

Valutando sui vettori $(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k})$ con $j_1 < \cdots < j_k$, per il Lemma precedente si ottiene

$$0 = \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} (e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*) \right) (\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}) = a_{j_1 \dots j_k}$$

e quindi tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

Dimostriamo ora che sono generatori: sia φ una forma k -lineare alterante e poniamo, per ogni $j_1 < \cdots < j_k$

$$b_{j_1 \dots j_k} = \varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k})$$

Si dimostra, con un ragionamento simile alla dimostrazione della [Proposizione 1.2](#) (esercizio!), che

$$\varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} b_{i_1 \dots i_k} (e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*)$$

e quindi gli elementi indicati generano tutto $\wedge^k V^*$. \square

Otteniamo quindi che, per $\dim V = n$, si ha $\wedge^k V^* = 0$ per $k > n$ (confrontare con l'[Esercizio 1.10](#)). Poniamo per convenzione $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$ e scriviamo

$$\wedge^* V^* = \bigoplus_{k=0}^n \wedge^k V^* = \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \wedge^2 V^* \oplus \cdots \oplus \wedge^n V^*$$

$\wedge^* V^*$ è uno spazio vettoriale, in quanto somma diretta di spazi vettoriali. Il prodotto wedge della [Definizione 1.11](#) dà una moltiplicazione che permette di ottenere elementi di $\wedge^k V^*$ a partire da elementi di $V^* = \wedge^1 V^*$. Questa moltiplicazione si può estendere a tutto $\wedge^* V^*$ nel modo seguente: se $\omega \in \wedge^k V^*$ e $\eta \in \wedge^s V^*$ possiamo scrivere

$$(22) \quad \omega = \sum_I a_I e_I^*, \quad \eta = \sum_J b_J e_J^*$$

dove usiamo la notazione con multi-indici: per $I = (i_1, \dots, i_k)$ un multi-indice di lunghezza $|I| = k$, poniamo $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$. Definiamo allora

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I, J} a_I b_J (e_I^* \wedge e_J^*)$$

Questa operazione, estesa per linearità a tutte le forme, si chiama *moltiplicazione esterna* o anche *prodotto wedge*. Notiamo in particolare che il significato di $(e_I^* \wedge e_J^*)$ è, per definizione,

$$e_I^* \wedge e_J^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^*$$

Osserviamo anche che i multi-indici sono di solito scritti in ordine crescente, ma in $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^*$ gli indici non sono necessariamente crescenti. Per avere la scrittura standard, occorre permutare gli indici che compaiono in I e J , cambiando il segno in maniera opportuna.

La proposizione seguente riassume le principali proprietà della moltiplicazione esterna.

Proposizione 1.16. *Siano $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\eta \in \bigwedge^s V^*$, $\theta \in \bigwedge^r V^*$.*

- (1) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
- (2) $\omega \wedge \eta = (-1)^{ks} (\eta \wedge \omega)$.

Dimostrazione.

(1) Esercizio.

(2) Per linearità, possiamo supporre che $\omega = a e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$ e $\eta = b e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^*$. Allora

$$\omega \wedge \eta = ab e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^*$$

Per ottenere $\eta \wedge \omega$ dobbiamo portare tutti i termini $e_{j_l}^*$ davanti ai termini $e_{i_m}^*$. Per portare $e_{j_1}^*$ in prima posizione, dobbiamo fare k scambi e quindi il segno cambia k volte. Dunque:

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^* = (-1)^k e_{j_1}^* \wedge e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_2}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^*$$

Portando adesso al loro posto gli altri $e_{j_m}^*$, per ognuno di essi il segno cambia k volte. Poiché in totale ci sono s termini da spostare, il segno cambia ks volte e quindi si ha il fattore scritto nella formula.

□

Concludiamo questo paragrafo ricordando alcune definizioni di algebra. Queste definizioni non sono essenziali nel seguito, ma facilitano la nomenclatura.

Definizione 1.17. Sia A un anello. Il *centro* $C(A)$ di A è l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli elementi di A :

$$C(A) = \{c \in A \mid ca = ac \forall a \in A\}$$

Il centro di un anello è un sottoanello. A è un anello commutativo se e solo se $A = C(A)$.

Esempio 1.18. Se $A = M_n(\mathbb{R})$, l'anello delle matrici reali quadrate $n \times n$, il centro $C(A)$ è il sottoanello delle matrici *scalari*, cioè delle matrici della forma λI_n , multiple della matrice identità.

Notiamo che è chiaro che le matrici scalari appartengono al centro. L'inclusione opposta è un esercizio di algebra lineare.

Definizione 1.19. Un *anello graduato* A è un anello tale che

$$A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$$

dove gli A_k sono gruppi abeliani e la moltiplicazione è tale che

$$A_h \cdot A_k \subseteq A_{h+k}$$

Gli elementi di A_k si dicono *elementi omogenei di grado k* .

Esempio 1.20. Consideriamo $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, l'anello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti reali. Ponendo $A_k =$ polinomi omogenei di grado k , la decomposizione in somma diretta è l'usuale scrittura di un polinomio come somma di polinomi omogenei. I polinomi omogenei di grado fissato, compreso il polinomio nullo, formano un gruppo abeliano e quando si moltiplicano due polinomi omogenei il grado del risultato è la somma dei gradi dei fattori. Dunque $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ è un anello graduato.

Osserviamo inoltre che $A_0 = \mathbb{R}$, identificato con i polinomi di grado 0 e cioè i polinomi costanti.

Definizione 1.21. Una \mathbb{R} -algebra A è un anello A che contiene (una copia isomorfa di) \mathbb{R} nel suo centro. L'anello A risulta in modo naturale uno spazio vettoriale su \mathbb{R} : la moltiplicazione per scalari è semplicemente la moltiplicazione di un elemento di $\mathbb{R} \subset A$ per un elemento di A .

Esempio 1.22. Conosciamo già alcuni esempi di \mathbb{R} -algebre.

- (1) $M_n(\mathbb{R})$: il centro di $M_n(\mathbb{R})$ è il sottoanello delle matrici scalari che è isomorfo a \mathbb{R} . $M_n(\mathbb{R})$ è detta l'*algebra delle matrici*.
- (2) $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ è una \mathbb{R} -algebra, detta l'*algebra (o anello) dei polinomi*.
- (3) $\bigwedge^* V^*$, dove V è uno spazio vettoriale reale, è una \mathbb{R} -algebra, detta l'*algebra esterna di V^** .

L'algebra $M_n(\mathbb{R})$ non è commutativa, mentre $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ lo è. Anche l'algebra esterna non è commutativa, però c'è una regolarità nel risultato di invertire i fattori di un prodotto, dovuta ai gradi dei fattori.

Definizione 1.23. Sia $A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$ un'algebra graduata. A si dice (anti)commutativa graduata se

$$a \cdot b = (-1)^{ks} b \cdot a, \quad \forall a \in A_k, \forall b \in A_s$$

Quindi l'algebra esterna è un'algebra (anti)commutativa graduata. La ragione del nome è che A è in parte commutativa e in parte anticommutativa. Dire *commutativa graduata* comprende questi due comportamenti.

2. Forme differenziali su un aperto U di \mathbb{R}^n

Introduciamo ora le forme differenziali, riprendendo ed estendendo la definizione data nei corsi di Analisi per le 1-forme.

Useremo le nozioni di spazio tangente e di fibrato tangente viste nel [sotto-paragrafo 3.3.1](#). Per quasi tutta questa parte, parleremo solo di spazio tangente ad \mathbb{R}^n in un punto p o meglio in tutti i punti di un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Abbiamo scritto \mathbb{R}_a^n per indicare la struttura di spazio affine e \mathbb{R}_v^n per indicare lo spazio vettoriale. Come abbiamo visto, il fibrato tangente $T\mathbb{R}_a^n$ è banale e cioè

$$T\mathbb{R}_a^n = \mathbb{R}_a^n \times \mathbb{R}_v^n$$

e quindi possiamo identificare fra loro tutti gli spazi tangenti nei vari punti in modo canonico. Per questo motivo, e anche perché di solito è chiaro quello di cui si sta parlando, spesso (ma non sempre) d'ora in poi scriveremo solo \mathbb{R}^n , senza distinguere nella notazione tra spazio affine e spazio vettoriale.

2.1. L'algebra delle forme differenziali. In \mathbb{R}_v^n fissiamo come base la *base canonica* data da $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dove $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Consideriamo ora $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_a^n$ un *punto*. In p abbiamo lo *spazio tangente* $T_p\mathbb{R}_a^n$ e il suo duale, lo *spazio cotangente* $T_p^*\mathbb{R}_a^n$.

Ricordiamo che gli elementi dello spazio tangente sono i vettori tangenti e cioè i vettori tangenti alle curve che passano per p . Se parametrizziamo \mathbb{R}_a^n ponendo

$$\mathbf{x}(u_1, \dots, u_n) = p + u_1\mathbf{e}_1 + \dots + u_n\mathbf{e}_n$$

i vettori tangenti alle curve coordinate $\gamma_i(t) = p + t\mathbf{e}_i$ in $t = 0$ formano una base di $T_p\mathbb{R}_a^n$. Poiché questi vettori tangenti sono proprio $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ questo dà l'isomorfismo canonico di \mathbb{R}_v^n con $T_p\mathbb{R}_a^n$. Notiamo che questa parametrizzazione corrisponde a scegliere un sistema di riferimento affine con origine nel punto p e assi dati dalla base canonica di \mathbb{R}_v^n . Notiamo

anche che le curve $\gamma_i(t)$ sono semplicemente le *rette* passanti per p e parallele ai vettori della base canonica.

Lo spazio $T_p\mathbb{R}_a^n$ è uno spazio vettoriale e quindi possiamo considerare lo spazio *duale*. Questo spazio duale ha un nome: si chiama *spazio cotangente* e si denota con il simbolo $T_p^*\mathbb{R}_a^n$. L'asterisco indica che è uno spazio duale e si mette vicino alla lettera T , per ricordare che è il duale del *tangente*.

Chi sono gli elementi dello spazio cotangente? Sono le forme lineari su $T_p\mathbb{R}_a^n$ e quindi sono le funzioni lineari che ad un vettore tangente associano un numero. Abbiamo già visto esempi di tali funzioni lineari.

Esempio 2.1. Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia df_p il differenziale in p . Il differenziale è una funzione lineare

$$df_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

e quindi $df_p \in T_p^*\mathbb{R}^n$ è un elemento dello spazio cotangente (si dice che df_p è un *vettore cotangente*).

Ricordiamo come è definito il differenziale di una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (**Definizione 3.3.9**). Se $\mathbf{w} \in T_p\mathbb{R}^n$, si considera una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Allora

$$df_p(\mathbf{w}) = (f \circ \alpha)'(0)$$

Usando questa definizione, si può trovare una base per lo spazio cotangente. Il riferimento affine considerato sopra determina delle funzioni coordinate, che indichiamo con x_1, \dots, x_n , definite nel modo solito: se $q \in \mathbb{R}^n$, si può esprimere il vettore $q - p$ in termini della base canonica. I coefficienti della combinazione lineare sono le coordinate del punto q e cioè

$$q - p = x_1(q)\mathbf{e}_1 + \dots + x_n(q)\mathbf{e}_n$$

In particolare, vediamo che le coordinate di p sono $(0, \dots, 0)$ che è corretto in quanto questo sistema di riferimento affine ha l'origine in p .

Le funzioni coordinate sono funzioni differenziabili $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e determiniamo il loro differenziale. Abbiamo già osservato che una base di $T_p\mathbb{R}^n$ è data dai vettori tangenti alle curve γ_i e scriviamo

$$\{\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p\} = \{\gamma_1'(0), \dots, \gamma_n'(0)\}$$

La notazione $\mathbf{e}_j|_p$ vuole ricordare che stiamo considerando vettori tangenti *applicati* in p . Con la notazione completa, scriveremmo

$$\mathbf{e}_j|_p = (p, \gamma_j'(0))$$

La base duale di questa base è data proprio dai differenziali delle funzioni coordinate in p . Infatti la composizione $(x_i \circ \gamma_j)(t)$ è la coordinata i -esima

dei punti sulla retta parallela all'asse \mathbf{e}_j e quindi vale

$$(x_i \circ \gamma_j)(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ t & \text{se } i = j \end{cases}$$

e perciò

$$dx_{i,p}(\gamma_j'(0)) = \frac{d}{dt}(x_i \circ \gamma_j)|_{t=0} = \delta_{ij}$$

Dunque i differenziali delle funzioni coordinate danno una base dello spazio cotangente, che indichiamo con $\{dx_{1,p}, \dots, dx_{n,p}\}$ per indicare che è la base nel punto p .

Con la terminologia appena introdotta, possiamo adesso definire i *campi vettoriali* e le *1-forme differenziali*. Naturalmente questi concetti sono gli stessi già noti dall'Analisi.

Definizione 2.2. Un *campo vettoriale* (tangente) X definito su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è una famiglia di vettori $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ che varia differenziabilmente in funzione di p .

Quindi un campo vettoriale può essere scritto come

$$X = \sum_{i=1}^n f_i(p) \mathbf{e}_i|_p$$

dove le funzioni $f_i(p)$ sono di classe \mathcal{C}^∞ su U e i vettori $\mathbf{e}_i|_p$ sono i vettori tangenti alle curve coordinate nel punto $p \in \mathbb{R}^n$. In questa scrittura, le variabili indipendenti sono le coordinate del punto p .

Esempio 2.3. Sia $U = \mathbb{R}^n$, con coordinate x_1, \dots, x_n . Usando in tutti gli spazi tangenti la stessa base canonica $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, un campo vettoriale X è semplicemente una funzione

$$X(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

In ogni punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, il valore del campo è il vettore

$$X(p) = f_1(x) \mathbf{e}_1 + \dots + f_n(x) \mathbf{e}_n$$

e il campo vettoriale può essere interpretato come una funzione $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Se vogliamo essere più precisi, un campo X è una funzione $X : \mathbb{R}_{\mathbf{a}}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbf{v}}^n$, cioè una funzione che ad un *punto* (dello spazio affine $\mathbb{R}_{\mathbf{a}}^n$) assegna un *vettore* (dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\mathbf{v}}^n$).

Osservazione. Se vogliamo essere veramente precisi, un campo vettoriale X è una funzione $X : \mathbb{R}_{\mathbf{a}}^n \rightarrow T\mathbb{R}_{\mathbf{a}}^n$, perché ad un punto $p \in \mathbb{R}_{\mathbf{a}}^n$ associa un vettore $X(p) \in T_p\mathbb{R}_{\mathbf{a}}^n$.

Ricordiamo la proiezione canonica $\pi : T\mathbb{R}_a^n \rightarrow \mathbb{R}_a^n$ data da $\pi(p, \mathbf{v}) = p$ che associa ad ogni vettore tangente il suo punto di applicazione. Allora un campo vettoriale ha la proprietà:

$$\pi \circ X = \text{id}_{\mathbb{R}_a^n}$$

perché ad ogni punto p viene associato un vettore tangente *nel punto stesso* p . Questa proprietà si esprime con la frase

un campo vettoriale X è una *sezione* del fibrato tangente

Passiamo alle forme differenziali

Definizione 2.4. Una 1-forma differenziale definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è una famiglia di elementi dello spazio cotangente e quindi si può scrivere

$$\omega = \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$$

Osservazione. Questa scrittura è leggermente ambigua, ma è quella tradizionale e la useremo sempre. La notazione dx_i significa il differenziale della funzione coordinata x_i , ma in effetti per avere il differenziale occorre specificare anche il punto p del dominio in cui si calcola questo differenziale. Nella notazione precedente, è sottinteso che il differenziale è calcolato nel punto di coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$, la variabile indipendente dei coefficienti $g_i(x)$.

Osservazione. Riprendendo l'Osservazione fatta a proposito dei campi vettoriali, si può definire il *fibrato cotangente* come l'unione di tutti gli spazi cotangenti

$$T^*\mathbb{R}_a^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}_a^n} T_p^*\mathbb{R}_a^n$$

Anche in questo caso c'è una proiezione canonica $\pi^* : T^*\mathbb{R}_a^n \rightarrow \mathbb{R}_a^n$ che associa ad ogni vettore cotangente in p (= forma lineare sullo spazio tangente $T_p\mathbb{R}_a^n$) il "punto di applicazione" p .

Il fibrato tangente a \mathbb{R}_a^n è banale e cioè tutti gli spazi tangenti nei vari punti sono canonicamente isomorfi a uno spazio vettoriale fissato $V = \mathbb{R}_v^n$. Questo ci dice che anche tutti gli spazi cotangenti sono canonicamente isomorfi allo spazio vettoriale fissato $V^* = (\mathbb{R}_v^n)^*$ e quindi possiamo usare la stessa notazione per i differenziali nei punti diversi. Per questo motivo la notazione ambigua nella [Definizione 2.4](#) non causa problemi.

Come nel caso dei campi vettoriali, una 1-forma differenziale ω è una funzione $\omega : \mathbb{R}_a^n \rightarrow T^*\mathbb{R}_a^n$, perché ad ogni punto $p \in \mathbb{R}_a^n$ associa una forma lineare $\omega_p \in T_p^*\mathbb{R}_a^n$ e, come nel caso dei campi, anche una 1-forma differenziale ha la proprietà:

$$\pi^* \circ \omega = \text{id}_{\mathbb{R}_a^n}$$

perché ad ogni punto p viene associata una forma lineare sullo spazio tangente *nel punto stesso* p . Questa proprietà si esprime con la frase

una 1-forma differenziale è una *sezione* del fibrato cotangente

Esempio 2.5. Sia $U = \mathbb{R}^3$ con coordinate x_1, x_2, x_3 . Esempi di 1-forme differenziali sono

$$\omega_1 = x_1 dx_1 + (x_1 x_2 + x_3) dx_2 - 4 dx_3$$

$$\omega_2 = x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3$$

$$\omega_3 = (x_1 + x_2^3) dx_1$$

Ponendo $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ si può osservare che $\omega_2 = df$ e quindi questa forma differenziale è il differenziale di una funzione. Si può dimostrare (lo faremo presto) che le forme ω_1 e ω_3 non sono il differenziale di nessuna funzione. Dunque i differenziali delle funzioni non esauriscono lo spazio vettoriale delle 1-forme differenziali.

A questo punto sfruttiamo l'algebra lineare vista nella scorsa lezione. Lo spazio cotangente in un punto $T_p^* \mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale duale e quindi possiamo costruire le sue potenze esterne. La costruzione che facciamo, apparentemente astratta, avrà molte applicazioni in Analisi e in Geometria.

Definizione 2.6. Una *k-forma differenziale* definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è una famiglia di elementi delle potenze esterne k -esime dello spazio cotangente:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} g_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

dove i coefficienti $g_{i_1 \dots i_k}(x)$ sono funzioni di classe C^∞ su U .

Esempio 2.7. Consideriamo \mathbb{R}^3 con coordinate (x, y, z) . Esempi di k -forme differenziali sono

$$\omega_1 = x dx \wedge dy + y dy \wedge dz$$

$$\omega_2 = (x^2 + 1) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\omega_3 = z dx \wedge dy - y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$$

Le forme ω_1 e ω_3 sono 2-forme, invece ω_2 è una 3-forma.

Esercizio 2.8. Ci sono 4-forme differenziali su \mathbb{R}^3 ?

Osservazione. Anche le k -forme sono sezioni di opportuni fibrati, costruiti a partire dal fibrato cotangente in modo algebrico. Vedrete queste costruzioni in corsi più avanzati, per esempio nei corsi di Geometria o di Fisica Matematica nella Laurea Magistrale

L'insieme delle k -forme differenziali su U si denota con $\Omega^k(U)$ ed è uno spazio vettoriale reale (di dimensione infinita) in quanto somma di forme differenziali e multipli scalari di forme differenziali sono ancora forme differenziali. In particolare $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ indica lo spazio vettoriale delle k -forme differenziali definite su tutto \mathbb{R}^n .

Esempio 2.9. Per vedere che $\Omega^1(\mathbb{R})$ ha dimensione infinita, si possono considerare le 1-forme (usiamo la coordinata x su \mathbb{R})

$$\omega_1 = x dx, \quad \omega_2 = x^2 dx, \quad \dots, \quad \omega_n = x^n dx, \dots$$

da cui si capisce che la dimensione infinita è causata dal fatto che possiamo usare *coefficienti* presi in uno spazio vettoriale di dimensione infinita (lo spazio delle funzioni differenziabili su un aperto U).

Definizione 2.10. Sia A un anello (commutativo con unità). Un A -modulo M (o modulo sull'anello A) è un gruppo abeliano con una operazione di moltiplicazione per elementi di A che soddisfa le usuali proprietà di associatività e distributività.

Un modulo è la generalizzazione del concetto di spazio vettoriale quando gli scalari appartengono ad un anello. Naturalmente uno spazio vettoriale è un esempio di modulo.

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Denotiamo

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ di classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

$\mathcal{C}^\infty(U)$ è un anello con le solite operazioni di somma e prodotto di funzioni (somma e prodotto di funzioni differenziabili sono ancora differenziabili) ed è anche uno spazio vettoriale reale e dunque è una \mathbb{R} -algebra.

Poiché ha senso moltiplicare una funzione $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ per una k -forma differenziale, ottenendo ancora una k -forma, $\Omega^k(U)$ è un modulo sull'anello $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Osservazione (solo per chi conosce i prodotti tensoriali). Si ha

$$\Omega^k(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^k T_p^* \mathbb{R}^n$$

dove $p \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato. Questo isomorfismo vale perché il fibrato cotangente di \mathbb{R}^n è triviale.

Osservazione (solo per chi conosce un po' di algebra commutativa). Per definizione una k -forma differenziale è una combinazione lineare a coefficienti funzioni differenziabili di k -forme ottenute mediante il prodotto wedge dei differenziali delle funzioni coordinate. Allora la [Proposizione 1.15](#)

implica che per un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ il modulo $\Omega^k(U)$ è un *modulo libero di rango* $\binom{n}{k}$ sull'anello $\mathcal{C}^\infty(U)$. Ritroviamo quindi una sorta di dimensionalità finita.

Possiamo definire il *prodotto wedge* di forme differenziali, estendendo la definizione data in precedenza: se $\omega \in \Omega^k(U)$ e $\eta \in \Omega^s(U)$ scriviamo

$$\omega = \sum_I a_I(x) dx_I, \quad \eta = \sum_J b_J(x) dx_J$$

dove usiamo la notazione con multi-indici come prima e poniamo

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I(x) b_J(x) dx_I \wedge dx_J$$

La [Proposizione 1.16](#) vale con lo stesso enunciato e la stessa dimostrazione:

Proposizione 2.11. *Siano $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^s(U)$, $\theta \in \Omega^r(U)$.*

- (1) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
- (2) $(\omega \wedge \eta) = (-1)^{ks}(\eta \wedge \omega)$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Definiamo quindi, in analogia a quanto fatto prima

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$$

dove, per convenzione, $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$. La moltiplicazione esterna di forme rende $\Omega^*(U)$ un anello (anti)commutativo graduato. $\Omega^*(U)$ è una \mathbb{R} -algebra di dimensione infinita come spazio vettoriale e non finitamente generata come algebra.

$\Omega^*(U)$ ha anche una struttura di $\mathcal{C}^\infty(U)$ -algebra (lasciamo al lettore studioso il compito di formulare la definizione di A -algebra, dove A è un anello): è un $\mathcal{C}^\infty(U)$ -modulo libero di rango 2^n (una base è data dagli elementi dx_I) e come $\mathcal{C}^\infty(U)$ -algebra è finitamente generata: un insieme di generatori è dato da $\{dx_1, \dots, dx_n\}$.

2.2. Il pullback di forme differenziali. Sulle forme differenziali sono definite due importanti funzioni: il *pullback* e la *derivazione esterna*. Vediamo ora il pullback e vedremo la derivazione esterna nel [sotto-paragrafo 2.3](#). Ricordiamo che U indica sempre un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

Sia $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile (ricordiamo che significa di classe \mathcal{C}^∞). f induce una funzione $f^* : \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ definita

da

$$f^*(g) = g \circ f$$

Il verso di f^* è opposto a quello di f e per questo motivo l'asterisco si mette in alto. f^* è un omomorfismo di anelli (esercizio!) e poiché $\mathcal{C}^\infty(V) = \Omega^0(V)$ possiamo interpretare questa funzione come $f^* : \Omega^0(V) \rightarrow \Omega^0(U)$. Vogliamo estendere questo omomorfismo all'algebra delle forme.

Definizione 2.12. Sia ω una k -forma su \mathbb{R}^m . Il *pullback* $f^*\omega$ è la k -forma su \mathbb{R}^n data da

$$f^*\omega|_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega|_{f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k))$$

dove $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_p\mathbb{R}^n$ e $df : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ è il differenziale della funzione f nel punto p .

Il significato della definizione è che il valore della forma $f^*\omega$ nel punto p applicata a certi vettori (tangenti a \mathbb{R}^n in p) è uguale al valore della forma ω nel punto $f(p)$ applicata ad altri vettori (tangenti a \mathbb{R}^m in $f(p)$).

La definizione appare misteriosa e perciò vediamo un esempio esplicito. Faremo tutti i calcoli in dettaglio. Vedremo però che con un po' più di teoria, molti di questi calcoli si possono semplificare notevolmente.

Esempio 2.13. Consideriamo \mathbb{R}^2 con coordinate (x_1, x_2) e \mathbb{R}^3 con coordinate (y_1, y_2, y_3) . Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_1 + \cos x_2, e^{x_1})$$

Consideriamo una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = y_1 dy_1 \wedge dy_2 - y_3^2 dy_1 \wedge dy_3$$

Prendiamo $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ l'origine e quindi $f(p) = (0, 1, 1)$. Per chiarezza, diamo un nome al pullback

$$\eta = f^*\omega$$

La forma η è una 2-forma su \mathbb{R}^2 . Nel punto p , per definizione, η_p è una forma bilineare alternante sullo spazio $T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$, che ha per base la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Poiché η_p è una forma bilineare, opera su *coppie* di vettori. Siano dunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_p\mathbb{R}^2$. Dobbiamo quindi calcolare il *numero*

$$\eta_p(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

Per la multilinearità di η_p basta calcolare per i vettori di una base e poiché è alternante si ha

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \eta_p(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$$

e dunque l'unico numero da calcolare è $\eta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Per la definizione appena data

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \omega|_{f(p)}(df_p(\mathbf{e}_1), df_p(\mathbf{e}_2))$$

Per prima cosa, calcoliamo $\omega|_{f(p)}$. Dobbiamo semplicemente sostituire le coordinate di $f(p) = (0, 1, 1)$ nei coefficienti di ω e otteniamo

$$\omega_{(0,1,1)} = -dy_1 \wedge dy_3$$

Adesso dobbiamo calcolare le immagini $df_p(\mathbf{e}_1)$ e $df_p(\mathbf{e}_2)$. Questi vettori appartengono allo spazio tangente $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$, che ha come base la base canonica $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. I vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ della base di $T_p\mathbb{R}^2$ sono i vettori tangenti alle curve coordinate per l'origine in \mathbb{R}^2 . Queste curve hanno equazioni parametriche $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$. Si hanno le composizioni

$$(f \circ \gamma_1)(t) = (t, \sin t, e^t), \quad (f \circ \gamma_2)(t) = (t, \cos t, 1)$$

e perciò, usando la definizione di differenziale

$$\begin{aligned} df_p(\mathbf{e}_1) &= df_p(\gamma_1'(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(t, \sin t, e^t)|_{t=0} = \\ &= (1, \cos t, e^t)|_{t=0} \\ &= (1, 1, 1) \\ &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} df_p(\mathbf{e}_2) &= df_p(\gamma_2'(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(t, \cos t, 1)|_{t=0} = \\ &= (1, -\sin t, 0)|_{t=0} \\ &= (1, 0, 0) \\ &= \mathbf{f}_1 \end{aligned}$$

Dunque

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -(dy_1 \wedge dy_3)(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1)$$

Dalla definizione di prodotto esterno di forme si ha ([Esempio 1.9](#) e [Definizione 1.11](#))

$$-(dy_1 \wedge dy_3)(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1) = -\det \begin{pmatrix} dy_1(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_1(\mathbf{f}_1) \\ dy_3(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_3(\mathbf{f}_1) \end{pmatrix}$$

Ora ricordiamo che $dy_i(\mathbf{f}_j) = \delta_{ij}$ perché i differenziali $\{dy_i\}$ delle funzioni coordinate sono la base duale della base canonica $\{\mathbf{f}_i\}$. Dunque

$$-\det \begin{pmatrix} dy_1(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_1(\mathbf{f}_1) \\ dy_3(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) & dy_3(\mathbf{f}_1) \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Poiché η_p è una 2-forma bilineare alternante su \mathbb{R}^2 si ha $\eta_p \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^2)^*$, che ha dimensione 1. Una base è data da $dx_1 \wedge dx_2$ e quindi η_p è un multiplo scalare di $dx_1 \wedge dx_2$. Poiché

$$\eta_p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 = (dx_1 \wedge dx_2)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

si ha $\eta_p = dx_1 \wedge dx_2$ nel punto $p = (0, 0)$

Osservazione. Tutto il calcolo precedente vale nel punto $p = (0, 0)$. Se cambiamo punto, cosa succede? Dobbiamo rifare tutti i calcoli oppure almeno alcuni dei calcoli non dipendono dal punto?

Il punto è che non abbiamo calcolato la 2-forma differenziale $\eta = f^*\omega$ ma solo η_p , la forma bilineare alternante in un punto. Negli altri punti la forma bilineare cambia e vorremmo ricavare subito un'espressione che valga in tutti i punti.

Per fare questo, studiamo le proprietà algebriche della funzione f^* . Queste proprietà semplificheranno i calcoli.

Proposizione 2.14. *Sia $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile, ω, η delle k -forme differenziali, $g \in \Omega^0(V)$ una 0-forma (cioè una funzione differenziabile).*

- (1) $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$
- (2) $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$
- (3) se $\omega_1, \dots, \omega_k$ sono 1-forme, allora

$$f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) = f^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge f^*(\omega_k)$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono semplicemente dei calcoli, applicando la definizione:

(1)

$$\begin{aligned} f^*(\omega + \eta)|_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= (\omega + \eta)|_{f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= \omega|_{f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) + \eta|_{f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= f^*(\omega)|_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) + f^*(\eta)|_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &= (f^*\omega + f^*\eta)|_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f^*(g\omega)|_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= (g\omega)|_{f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= (g(f(p))) \cdot \omega|_{f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= f^*(g)f^*\omega|_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

(3) omettendo per semplicità l'indicazione del punto p si ha:

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(df(\mathbf{v}_1), \dots, df(\mathbf{v}_k)) \\ &= \det(\omega_i(df(\mathbf{v}_j))) \\ &= \det(f^*\omega_i(\mathbf{v}_j)) \\ &= f^*(\omega_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\omega_k)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

□

Da queste proprietà si può ottenere una descrizione molto semplice del pullback: è la *formula di sostituzione*, ben nota dalla regola di integrazione. Per vedere ciò, fissiamo le coordinate (x_1, \dots, x_n) in \mathbb{R}^n e (y_1, \dots, y_m) in \mathbb{R}^m . La funzione $f : U \rightarrow V$ si scrive in componenti

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

Sia ora $\omega = \sum a_I dy_I$ una k -forma su V . Usando la proposizione appena dimostrata possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*\left(\sum a_I dy_I\right) \\ &= \sum f^*(a_I dy_I) && \text{per la 1.} \\ &= \sum f^*(a_I) f^*(dy_I) && \text{per la 2.} \\ &= \sum f^*(a_I) (f^*dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*dy_{i_k}) && \text{per la 3.} \end{aligned}$$

e poiché

$$f^*(dy_i)(\mathbf{v}) = dy_i(df(\mathbf{v})) = d(y_i \circ f)(\mathbf{v}) = df_i(\mathbf{v})$$

otteniamo

$$f^*\omega = \sum a_I(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

e cioè per calcolare $f^*\omega$ si effettua in ω la "sostituzione" $y_i = f_i$ e $dy_i = df_i$, proprio come nella regola di integrazione per sostituzione. Questo perché, come suggerisce la notazione di Leibniz per gli integrali, l'integrando è una forma differenziale!

Esempio 2.15. Ricalcoliamo l'esempio precedente: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, \sin x_1 + \cos x_2, e^{x_1})$$

e $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ data da

$$\omega = y_1 dy_1 \wedge dy_2 - y_3^2 dy_1 \wedge dy_3$$

Le componenti di f sono

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = e^{x_1}$$

I differenziali sono (usando la definizione usuale dell'analisi)

$$\begin{aligned}df_1 &= dx_1 + dx_2 \\df_2 &= \cos x_1 dx_1 - \sin x_2 dx_2 \\df_3 &= e^{x_1} dx_1\end{aligned}$$

e quindi “sostituendo”

$$\begin{aligned}\eta &= f^*\omega \\&= f_1 df_1 \wedge df_2 - f_3^2 df_1 \wedge df_3 \\&= (x_1 + x_2) (dx_1 + dx_2) \wedge (\cos x_1 dx_1 - \sin x_2 dx_2) - e^{2x_1} (dx_1 + dx_2) \wedge e^{x_1} dx_1 \\&= -(x_1 + x_2) \sin x_2 dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 + x_2) \cos x_1 dx_2 \wedge dx_1 - e^{3x_1} dx_2 \wedge dx_1 \\&= -[(x_1 + x_2)(\sin x_2 + \cos x_1) - e^{3x_1}] dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

Osserviamo che per calcolare η nel punto $p = (0, 0)$ basta sostituire le coordinate di p

$$\eta_{(0,0)} = dx_1 \wedge dx_2$$

proprio come ottenuto prima. Però adesso abbiamo l'espressione generale e quindi per ottenere η_p per un qualunque altro punto p , basta sostituire le coordinate senza dover rifare tutti i calcoli.

Il punto 1. della [Proposizione 2.14](#) dice che $f^* : \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U)$ è un omomorfismo di gruppi abeliani e il punto 3. dice che rispetta il prodotto di 1-forme. Vediamo adesso che è anche un omomorfismo di anelli e cioè rispetta il prodotto di forme di grado qualunque:

Proposizione 2.16. *Sia $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile, ω, η due forme differenziali (qualunque) su V . Allora*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$$

Dimostrazione. Come prima poniamo $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$ e siano $\omega = \sum a_I dy_I, \eta = \sum b_J dy_J$. Si ha

$$\begin{aligned}f^*(\omega \wedge \eta) &= f^* \left(\sum_{I,J} a_I b_J dy_I \wedge dy_J \right) \\&= \sum_{I,J} a_I(f_1, \dots, f_m) b_J(f_1, \dots, f_m) df_I \wedge df_J \\&= \sum_I a_I(f_1, \dots, f_m) df_I \wedge \sum_J b_J(f_1, \dots, f_m) df_J \\&= f^*\omega \wedge f^*\eta\end{aligned}$$

□

Il pullback ha ancora una importante proprietà: è *functoriale*, cioè rispetta la composizione di applicazioni:

Proposizione 2.17. *Se $f : U \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow W$ sono due funzioni differenziabili, allora $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Dimostrazione. Sia $\omega \in \Omega^*(W)$. Allora

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*\omega &= \sum_I a_I((g \circ f)_1, \dots, (g \circ f)_n) d(g \circ f)_I \\ &= \sum_I a_I(g_1(f_1, \dots, f_m), \dots, g_n(f_1, \dots, f_m)) dg_I(df_1, \dots, df_m) \\ &= f^*(g^*\omega) = (f^* \circ g^*)(\omega) \end{aligned}$$

□

2.3. La derivazione esterna. Passiamo ora alla derivazione esterna, che generalizza alle k -forme il differenziale di una funzione (cioè di una 0-forma).

Abbiamo visto nell'[Esempio 2.1](#) che data $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, il suo differenziale in un punto $p \in U$ è un'applicazione lineare $T_p U \rightarrow T_{g(p)} \mathbb{R}$, e cioè un elemento dello spazio cotangente $T_p^* U$.

Se facciamo variare il punto p otteniamo una 1-forma differenziale. Usando la base data dai differenziali delle funzioni coordinate dx_i , questa forma si scrive

$$dg = \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$$

con opportune funzioni coefficienti $g_i(x)$. Chi sono queste funzioni? Per capirlo, valutiamo dg sui vettori di una base: nello spazio tangente $T_p U$, una base è data dai vettori $\{\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p\}$ (i vettori della base canonica "applicati" in p). Calcoliamo allora

$$dg_p(\mathbf{e}_j|_p) = \sum_{i=1}^n g_i(p) dx_i(\mathbf{e}_j|_p) = g_j(p)$$

perché $dx_i(\mathbf{e}_j|_p) = \delta_{ij}$. D'altra parte, il vettore $\mathbf{e}_j|_p$ è il vettore tangente alla curva $\gamma_j(t) = p + t\mathbf{e}_j$ e quindi, per definizione di differenziale

$$dg_p(\mathbf{e}_j|_p) = \frac{d}{dt} (g \circ \gamma_j)|_{t=0} = \frac{\partial g}{\partial x_j}(p)$$

Confrontando le due espressioni vediamo che i coefficienti $g_j(x)$ non sono altro che le derivate parziali rispetto alle variabili (x_1, \dots, x_n) e quindi possiamo scrivere

$$dg_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) dx_i$$

che è la scrittura usuale del differenziale di una funzione. Poiché il differenziale di una funzione è una 1-forma, otteniamo una funzione

$$d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$$

Per le proprietà solite della derivazione

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(\lambda f) = \lambda df$$

d è un'applicazione lineare fra spazi vettoriali e inoltre d ha un comportamento speciale rispetto al prodotto: soddisfa la regola di Leibniz, cioè

$$d(fg) = g df + f dg$$

Definiamo adesso un operatore che trasforma k -forme in $(k + 1)$ -forme con proprietà analoghe.

Definizione 2.18. Sia $\omega = \sum_I a_I dx_I$ una k -forma su $U \subseteq \mathbb{R}^n$. La *derivata esterna* $d\omega$ di ω è

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

La derivata esterna si ottiene dunque prendendo il *differenziale dei coefficienti*, e dunque delle 1-forme, e moltiplicandoli per i termini dx_I . In questo modo il grado della forma sale di 1.

Esempio 2.19. Facciamo un esempio per forme in \mathbb{R}^3 con coordinate (x_1, x_2, x_3) . Se $\omega = x_2 dx_1 + \sin(x_1 x_3) dx_2 + x_1^2 dx_3$ è una 1-forma si ha

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x_2) \wedge dx_1 + d \sin(x_1 x_3) \wedge dx_2 + d(x_1^2) \wedge dx_3 \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 + (x_3 \cos(x_1 x_3) dx_1 + x_1 \cos(x_1 x_3) dx_3) \wedge dx_2 + 2x_1 dx_1 \wedge dx_3 \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 + x_3 \cos(x_1 x_3) dx_1 \wedge dx_2 + x_1 \cos(x_1 x_3) dx_3 \wedge dx_2 + 2x_1 dx_1 \wedge dx_3 \\ &= (x_3 \cos(x_1 x_3) - 1) dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1 dx_1 \wedge dx_3 - x_1 \cos(x_1 x_3) dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

che esprime la 2-forma $d\omega$ come combinazione lineare (a coefficienti funzioni) delle tre forme di base $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_1 \wedge dx_3$ e $dx_2 \wedge dx_3$.

Esempio 2.20. Vediamo adesso un esempio che dovrebbe essere familiare dai corsi di Analisi. Consideriamo una 1-forma su \mathbb{R}^2 , con coordinate (x, y)

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

La derivata esterna è:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= (P_x dx + P_y dy) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy) \wedge dy \\ &= (Q_x - P_y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

e riconosciamo in ω e $d\omega$ i due integrandi della formula di Green nel piano, vedi per esempio Pagani-Salsa, Teorema 3.2 a pag. 492.

I domini di integrazione sono rispettivamente il bordo orientato ∂D e il dominio D e quindi possiamo scrivere la formula di Green come

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$

Il teorema di Stokes che vedremo alla fine del corso sarà la generalizzazione di questo enunciato per forme di grado qualunque.

Esempio 2.21. Sia $\omega = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ una n -forma su \mathbb{R}^n . Allora $d\omega = 0$ senza bisogno di fare calcoli, perché non ci sono forme non nulle di grado superiore alla dimensione dello spazio.

In effetti si avrebbe

$$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

e in ogni addendo della somma c'è un dx_i ripetuto e dunque tutti gli addendi sono nulli.

Cominciamo a studiare le proprietà della derivazione esterna.

Proposizione 2.22. Siano ω, η due forme differenziali su $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

- (1) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ e $d(c\omega) = c d\omega$, per $c \in \mathbb{R}$
- (2) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, per ω una k -forma

Dimostrazione.

- (1) Chiaro dalla definizione.
- (2) Scriviamo $\omega = \sum_I a_I dx_I$, $\eta = \sum_J b_J dx_J$. Allora:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

□

Ricordiamo che con $\Omega^*(U)$ abbiamo indicato l'algebra (graduata) delle forme differenziali su U di ogni grado. $\Omega^*(U)$ è uno spazio vettoriale reale e un anello, con la moltiplicazione data dal prodotto esterno.

La derivazione esterna è dunque una funzione $d : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$. Allora la 1. dice che d è \mathbb{R} -lineare (cioè d è un'applicazione lineare) e la 2.

dice che soddisfa la regola di Leibniz, con una correzione di segno poiché la moltiplicazione in $\Omega^*(U)$ è anticommutativa graduata. Una funzione con queste proprietà viene detta una *derivazione*.

Poiché d è un endomorfismo di $\Omega^*(U)$, possiamo comporlo con se stesso e cioè possiamo fare la *derivata della derivata*, come si fa con le funzioni con la derivata seconda e quelle di ordine superiore. Però la derivazione esterna ha una proprietà molto caratteristica, le cui conseguenze sono di estrema importanza nello studio della geometria e dell'analisi.

Proposizione 2.23. *Sia $d : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ la derivazione esterna. Allora:*

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

Dimostrazione. Cominciamo con dimostrare l'enunciato nel caso ω una 0-forma, cioè una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right) \end{aligned}$$

I termini con $i = j$ si annullano perché $dx_i \wedge dx_i = 0$. Inoltre, la funzione f è differenziabile (ricordiamo che vuol dire di classe \mathcal{C}^∞) e quindi le derivate seconde miste sono uguali mentre $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ e si ottiene

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Sia ora $\omega = \sum a_I dx_I$ una forma qualunque. Per la linearità di d possiamo supporre $\omega = a_I dx_I$ e allora, dalla definizione di d e dalla regola del prodotto si ha

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_I) \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I)$$

Il coefficiente a_I è una funzione e quindi, per quello che abbiamo appena dimostrato, $d(da_I) = 0$. Inoltre, dx_I ha coefficiente costante 1 e quindi

$$d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0.$$

Dunque, $d(d\omega) = 0$. □

Concludiamo questo paragrafo con un'importante proprietà di compatibilità fra il pullback e la derivazione esterna.

Proposizione 2.24. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile e sia $\omega \in \Omega^k(V)$ una k -forma differenziale su V . Allora:*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Dimostrazione. Anche in questo caso dimostriamo prima l'enunciato per ω una 0-forma. Sia dunque $\omega = g : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile data da $(y_1, \dots, y_m) \mapsto g(y_1, \dots, y_m)$ e siano (x_1, \dots, x_n) le coordinate su \mathbb{R}^n . Si ha

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^* \left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_j \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) \\ &= d(f^*g) \end{aligned}$$

Sia ora $\omega = \sum_I a_I dx_I$. Usando il fatto che f^* è un omomorfismo di anelli, e cioè commuta con la somma e il prodotto esterno, e il caso appena dimostrato si ha

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= f^* \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) = \sum_I f^*(da_I) \wedge f^*(dx_I) \\ &= \sum_I d(f^*(a_I)) \wedge f^*(dx_I) = d \left(\sum_I f^*(a_I) f^*(dx_I) \right) \\ &= d(f^*\omega). \end{aligned}$$

□

Questa Proposizione esprime la commutatività di d e f^* , fatto che sarà spesso usato nel seguito: dice che la definizione della derivata esterna è “independente dalle coordinate”, cioè possiamo prima derivare e poi sostituire oppure prima effettuare la sostituzione e poi derivare ottenendo lo stesso risultato.

Il risultato è particolarmente importante se consideriamo funzioni, campi vettoriali e forme differenziali definite su una superficie regolare (o più in generale su una varietà differenziabile, come vedrete nei corsi della Magistrale) e consente di definire la derivazione esterna anche in questo caso. Vedremo alcuni esempi dell'uso di questa proposizione più avanti nel corso.

3. Esercizi

In questo paragrafo svolgiamo alcuni esercizi sulle forme differenziali presenti nel Capitolo 1 del do Carmo, *Differential Forms and Applications*. Non manteniamo la numerazione del do Carmo, perché salteremo alcuni esercizi e ne faremo altri non presenti sul libro.

Come sempre, è una buona idea provare a fare gli esercizi che qui non sono svolti. Inoltre, è bene provare a fare l'esercizio prima di leggere la soluzione.

Esercizio 3.1. Dimostrare che una forma bilineare $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è alternante se e solo se $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Soluzione. Ricordiamo che per la [Definizione 1.6](#), una forma bilineare φ è alternante se

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$$

Se φ è alternante, basta porre $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ e si ha $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ e quindi $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$.

Viceversa, supponiamo la condizione soddisfatta e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Per la bilinearità si può scrivere

$$0 = \varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$$

Per ipotesi $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ e quindi si ottiene

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$$

e cioè φ è alternante.

Osservazione. Abbiamo usato senza dirlo esplicitamente il fatto (ovvio) che per un numero reale r si ha: $r = -r \implies r = 0$.

Consideriamo ora uno spazio vettoriale V su un campo K qualunque e una forma bilineare $\varphi : V \times V \rightarrow K$. Possiamo considerare le due condizioni

- (1) $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- (2) $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$

Per il campo \mathbb{R} abbiamo appena visto che (1) \iff (2). Per un campo K arbitrario, le due condizioni non sono equivalenti. Rispondere alle seguenti domande:

- Una delle implicazioni è vera per ogni campo K . Quale?
- Quali ipotesi bisogna fare sul campo K affinché le due condizioni siano equivalenti?

Esercizio. L'esercizio 2) del do Carmo è l'enunciato che abbiamo dimostrato come [Lemma 1.14](#) e quindi non lo ripetiamo qui. Però questo lemma si usa nella risoluzione del prossimo esercizio, perciò è bene rivederlo.

Esercizio 3.2. Date delle 1-forme $h_1, h_2, \dots, h_k \in V^*$ abbiamo dato due definizioni di prodotto esterno, una nella [Definizione 1.11](#) e l'altra nella definizione generale di prodotto esterno di forme mediante la [formula \(22\)](#). Dimostrare che le due definizioni coincidono.

Soluzione. La prima definizione è

$$(h_1 \wedge \cdots \wedge h_k)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \det(h_i(\mathbf{v}_j)), \quad 1 \leq i, j \leq k$$

per vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. Fissiamo una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ di V e sia $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ la base duale di V^* , cioè $dx_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ è definito da

$$dx_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$$

Allora possiamo scrivere le 1-forme in termini della base duale come

$$h_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} dx_j$$

dove $h_{ij} \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti (scalari). Usando la multilinearità delle forme, basta dimostrare che le due definizioni coincidono sui vettori di una base e quindi dobbiamo calcolare

$$(h_1 \wedge \cdots \wedge h_k)(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$$

e vedere che le due definizioni danno lo stesso numero.

Per maggiore chiarezza, facciamo prima il caso $k = 2$. Questo ci farà capire come organizzare il calcolo in generale. L'unica difficoltà è nella scelta di notazioni non troppo confuse e quindi cercheremo di scegliere i nomi degli indici in modo semplice.

Scriviamo esplicitamente le forme h_1 e h_2 :

$$h_1 = h_{11} dx_1 + h_{12} dx_2 + \cdots + h_{1n} dx_n$$

$$h_2 = h_{21} dx_1 + h_{22} dx_2 + \cdots + h_{2n} dx_n$$

Prendiamo due vettori della base $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$, con $i < j$. Per prima cosa osserviamo che

$$h_1(\mathbf{e}_i) = h_{1i}, \quad h_1(\mathbf{e}_j) = h_{1j}$$

e lo stesso vale per h_2 . Dunque, calcolando con la prima definizione si ha

$$(h_1 \wedge h_2)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \det \begin{pmatrix} h_{1i} & h_{1j} \\ h_{2i} & h_{2j} \end{pmatrix}$$

La seconda definizione esprime il prodotto di forme come combinazione lineare delle forme della base dx_I , dove I è un multi-indice di lunghezza k . In questo caso, le forme della base di $\wedge^2 V^*$ sono le 2-forme del tipo $dx_\alpha \wedge dx_\beta$. Calcoliamo il prodotto, ricordando che è definito per linearità e quindi si calcola con le regole usuali della proprietà distributiva, rispettando le regole delle anticommutatività:

$$dx_\alpha \wedge dx_\alpha = 0, \quad dx_\alpha \wedge dx_\beta = -dx_\beta \wedge dx_\alpha$$

Si ha:

$$\begin{aligned} h_1 \wedge h_2 &= (h_{11} dx_1 + \cdots + h_{1n} dx_n) \wedge (h_{21} dx_1 + \cdots + h_{2n} dx_n) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n (h_{1\alpha} h_{2\beta}) dx_\alpha \wedge dx_\beta \\ &= \sum_{\alpha < \beta} (h_{1\alpha} h_{2\beta} - h_{1\beta} h_{2\alpha}) dx_\alpha \wedge dx_\beta \end{aligned}$$

dove nell'ultima somma non compaiono i termini con $\alpha = \beta$ e abbiamo raccolto insieme i due termini multipli di $dx_\alpha \wedge dx_\beta$, usando le regole di anticommutatività. Applicando ora questa 2-forma alla coppia di vettori $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ vediamo che, per il [Lemma 1.14](#)

$$(dx_\alpha \wedge dx_\beta)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i\alpha} \cdot \delta_{j\beta}$$

e quindi tutti i termini della somma si annullano tranne il termine $dx_i \wedge dx_j$ e si ottiene

$$(h_1 \wedge h_2)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = h_{1i} h_{2j} - h_{1j} h_{2i}$$

che è proprio il determinante scritto sopra.

Facciamo ora il calcolo con $k = 3$: consideriamo le forme h_1, h_2, h_3 e tre vettori $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$ con $i < j < k$. La prima definizione dà

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \det \begin{pmatrix} h_{1i} & h_{1j} & h_{1k} \\ h_{2i} & h_{2j} & h_{2k} \\ h_{3i} & h_{3j} & h_{3k} \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo ora le tre forme, usando le stesse regole di anticommutatività viste prima:

$$h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 = \sum_{\alpha < \beta < \gamma} H_{\alpha\beta\gamma} dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_\gamma$$

Per prima cosa osserviamo come prima che, sempre per il [Lemma 1.14](#),

$$(dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_\gamma)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{i\alpha} \cdot \delta_{j\beta} \cdot \delta_{k\gamma}$$

e quindi tutti i termini della somma si annullano tranne il termine $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ e quindi si ottiene

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = H_{ijk}$$

Il coefficiente H_{ijk} si ottiene raccogliendo tutti i termini che contengono $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ in un qualche ordine, non solo quello strettamente crescente. Questi termini corrispondono a tutte le permutazioni possibili dei tre indici (i, j, k) e sono quindi 6 e ognuno ha come coefficiente scalare il prodotto di tre coefficienti delle forme h_1, h_2, h_3 . Usando le regole di anticommutatività

per riportare i termini dx nell'ordine corretto, si vede che c'è da considerare il segno della permutazione e quindi si ha

$$H_{ijk} = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma h_{1\sigma(i)} h_{2\sigma(j)} h_{3\sigma(k)}$$

che è la definizione di determinante della matrice considerata prima.

È chiaro (speriamo!) che la dimostrazione nel caso $k = 3$ vale per k qualunque: scrivendo in maniera opportuna gli indici dei vettori della base a cui si applica il prodotto delle forme si ottiene che l'unico coefficiente non nullo è il determinante che appare nella prima definizione.

Naturalmente, tutti i coefficienti del prodotto esterno sono determinanti: se $\dim V = n$ e le forme che si stanno moltiplicando sono k , i coefficienti del prodotto delle forme sono i determinanti dei minori di ordine k della matrice (h_{ij}) formata dai coefficienti delle forme rispetto alla base dx_1, \dots, dx_n dello spazio duale V^*

Esercizio 3.3. Sia ω una k -forma. Dimostrare che

- (1) se ω è una k -forma e k è dispari, allora $\omega \wedge \omega = 0$;
- (2) dare un esempio di k -forma ω (con $k > 0$) per cui $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Soluzione.

- (1) Questa è una semplice conseguenza del punto 2. della [Proposizione 1.16](#): per una forma ω di grado k e una forma η di grado s vale

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{ks} (\eta \wedge \omega)$$

e quindi $\omega \wedge \omega = (-1)^{k^2} \omega \wedge \omega$. Se k è dispari, anche k^2 è dispari e quindi $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$ e perciò $\omega \wedge \omega = 0$

- (2) Proviamo con $k = 2$: se ω è una 2-forma, allora $\omega \wedge \omega$ è una 4-forma e quindi dobbiamo prendere $n = \dim V \geq 4$ per avere 4-forme non nulle. Se ω è un monomio, il prodotto esterno con se stessa ha certamente dx_i ripetuti e quindi è nulla. Consideriamo allora una somma di almeno due termini:

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

Calcolando (esercizio!!)

$$\omega \wedge \omega = 2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \neq 0$$

Esercizio 3.4. In \mathbb{R}^3 si considerino le forme differenziali

$$\varphi = x dx - y dy, \quad \psi = z dx \wedge dy + x dy \wedge dz, \quad \theta = z dy$$

Calcolare $\varphi \wedge \psi$, $\theta \wedge \varphi \wedge \psi$, $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$.

Soluzione. Basta usare le definizioni e le regole di anticommutatività per raccogliere e semplificare le risposte.

$$\begin{aligned}\varphi \wedge \psi &= (x dx - y dy) \wedge (z dx \wedge dy + x dy \wedge dz) \\ &= xz dx \wedge dx \wedge dy + x^2 dx \wedge dy \wedge dz - yz dy \wedge dx \wedge dy - xy dy \wedge dy \wedge dz \\ &= \boxed{x^2 dx \wedge dy \wedge dz}\end{aligned}$$

$\theta \wedge \varphi \wedge \psi = \boxed{0}$ perché è una 4-forma su \mathbb{R}^3 e quindi è nulla.

$$d\varphi = d(x dx - y dy) = dx \wedge dx - dy \wedge dy = \boxed{0}$$

$$d\psi = d(z dx \wedge dy + x dy \wedge dz) = dz \wedge dx \wedge dy + dx \wedge dy \wedge dz = \boxed{2 dx \wedge dy \wedge dz}$$

$$d\theta = d(z dy) = dz \wedge dy = \boxed{-dy \wedge dz}$$

dove nell'ultima cambiamo l'ordine nella risposta finale perché le forme si scrivono sempre con i differenziali in ordine crescente (in questo caso l'ordine alfabetico x, y, z).

Esercizio 3.5. Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Supponiamo che $n < m$ e sia ω una k -forma su \mathbb{R}^m con $k > n$. Dimostrare che $f^*\omega = 0$.

Soluzione. Il pullback di forme rispetta il grado e quindi, se ω è una k -forma su \mathbb{R}^m , anche $f^*\omega$ è una k -forma su \mathbb{R}^n . Poiché $k > n$, la forma $f^*\omega$ è automaticamente nulla, come tutte le forme di grado strettamente maggiore della dimensione dello spazio su cui sono definite.

Esercizio 3.6. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile, data in coordinate da

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

e cioè le componenti della funzione f sono $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$.

Sia $\omega = dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$. Dimostrare che

$$f^*\omega = (\det df) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

dove df è il differenziale di f .

Soluzione. Basta sostituire.

Esercizio 3.7. Sia ω la 2-forma su \mathbb{R}^{2n} data da

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

Calcolare il prodotto $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ ripetuto n -volte.

Suggerimento: ω^n è una $2n$ -forma e quindi $\omega^n = A \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$. Determinare il coefficiente A .

Soluzione. Scriviamo, per brevità

$$a_i = dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \omega^n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \wedge (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \wedge \cdots \wedge (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il prodotto: è come moltiplicare polinomi e quindi dobbiamo scegliere un addendo da ogni parentesi. Osserviamo che se abbiamo un fattore ripetuto (scegliamo lo stesso addendo da due parentesi diverse), il prodotto è automaticamente nullo, perché ci sono dei differenziali ripetuti. Dunque gli unici addendi che possono essere non nulli sono quelli formati da

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$$

in tutti gli ordini possibili e cioè

$$\omega^n = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(n)}$$

Poiché tutti i termini a_i sono delle 2-forme, quando si scambia l'ordine in cui compaiono i fattori, il segno non cambia e gli addendi di questa somma sono tutti uguali. Poiché ci sono $n!$ permutazioni su n elementi, si ottiene

$$\omega^n = n! dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$$

Esercizio 3.8. Sia ν la n -forma alternante definita su \mathbb{R}^n da

$$\nu(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

dove $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^n . Dimostrare che

(1) se $\mathbf{v}_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{e}_j$, $i = 1, \dots, n$ sono n vettori, allora

$$\nu(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det(a_{ij}) = \text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

dove $\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è il volume n -dimensionale del parallelepipedo generato dai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ (cosa succede quando sono linearmente dipendenti?). La forma ν è detta *elemento di volume* di \mathbb{R}^n ;

(2) $\nu = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$;

(3) che relazione c'è fra ν e la forma ω^n dell'esercizio precedente?

Soluzione. Conviene risolvere nell'ordine (2), (1), (3).

(2) Questo è immediato: sono entrambe n -forme e dalla [Proposizione 1.15](#) lo spazio vettoriale $\bigwedge^n(\mathbb{R}^n)^*$ a cui appartengono entrambe ha dimensione 1, sono l'una multipla dell'altra. Sappiamo che

$$(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

(per esempio, usando il [Lemma 1.14](#)) e quindi sono uguali.

(1) Dall'[Esercizio 3.2](#) sappiamo che possiamo calcolare il prodotto wedge di 1-forme tramite i determinanti. Si ha

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) &= (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \\ &= \det(dx_i(\mathbf{v}_j)) \end{aligned}$$

per linearità

$$dx_i(\mathbf{v}_j) = dx_i(a_{j1}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{jn}\mathbf{e}_n) = a_{ji}$$

da cui la tesi (il determinante non cambia trasponendo).

(3) Dal calcolo fatto prima,

$$\omega^n = n! \nu$$

4. La coomologia di de Rham

L'enunciato della [Proposizione 2.23](#) si ricorda, a parole, con la frase

d quadro è uguale a zero

ed ha un'interpretazione algebrica importante. Poiché d porta k -forme in $(k+1)$ -forme, possiamo considerare la seguente successione di spazi vettoriali e applicazioni lineari:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U) \xrightarrow{d} \cdots$$

La [Proposizione 2.23](#) dice che comporre due applicazioni lineari consecutive dà 0 e cioè che l'*immagine* di un'applicazione è contenuta nel *nucleo* di quella successiva. Definiamo allora:

$$Z^k(U) = \ker d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U) = k\text{-forme su } U \text{ chiuse}$$

$$B^k(U) = \text{Im } d : \Omega^{k-1}(U) \rightarrow \Omega^k(U) = k\text{-forme su } U \text{ esatte}$$

Per definizione, le forme *chiuse* sono quelle la cui derivata esterna è nulla, mentre le forme *esatte* sono quelle che sono la derivata esterna di una forma di grado inferiore.

La terminologia è la stessa di quella usata in Analisi per le 1-forme: se ω è una 1-forma, allora ω *chiusa* significa che $d\omega = 0$ mentre ω *esatta* significa che esiste una funzione f tale che $\omega = df$.

$Z^k(U)$ e $B^k(U)$ sono entrambi sottospazi vettoriali di $\Omega^k(U)$ e la [Proposizione 2.23](#) dice

$$B^k(U) \subseteq Z^k(U)$$

e cioè *tutte le forme esatte sono chiuse* o anche *condizione necessaria perché una forma sia esatta è che sia chiusa*.

Osserviamo che verificare se una forma ω è chiusa o no è semplice, perché basta calcolare delle derivate e poi un'espressione algebrica, mentre decidere se una forma ω è esatta è di solito difficile perché significa trovare una *primitiva* e cioè una forma η per cui $\omega = d\eta$. Dunque una condizione necessaria è utile, perché evita di cercare primitive che possiamo facilmente stabilire non esistono.

Vista l'inclusione dei sottospazi, possiamo formare il quoziente:

Definizione 4.1. Lo spazio vettoriale quoziente

$$H_{dR}^k(U) = Z^k(U)/B^k(U)$$

viene detto il *k-esimo gruppo di coomologia di de Rham* dell'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Osservazione. $H_{dR}^k(U)$ è in realtà uno spazio vettoriale reale, ma il nome "gruppo" è tradizionale e quindi lo useremo anche noi. Certamente uno spazio vettoriale è un gruppo rispetto alla somma. Quando parliamo di "gruppi di coomologia", ci interessa solo la struttura di somma.

Osserviamo il prefisso "co"-omologia, che ci ricorda che stiamo usando lo spazio "co"-tangente e più in generale, che stiamo usando spazi vettoriali "duali": il prefisso "co" si usa per indicare il duale a qualcosa di già definito. Quindi la coomologia dovrebbe essere il duale di un'altra teoria, l'*omologia*. Vedremo un esempio di una di queste teorie nel [paragrafo 8.1](#).

$H_{dR}^k(U)$ è detto "*k-esimo*" perché si ottiene usando le forme differenziali di grado k . Quindi, per un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abbiamo $n + 1$ gruppi che possiamo considerare

$$H_{dR}^0(U), \quad H_{dR}^1(U), \quad \dots, \quad H_{dR}^n(U)$$

Ultima osservazione: questi gruppi sono nominati in onore del matematico svizzero Georges de Rham (1903-1990). Come al solito, trovate dettagli sulla vita e le opere matematiche di de Rham su MacTutor, all'indirizzo http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Rham.html

Questi gruppi sono definiti usando la struttura differenziabile di \mathbb{R}^n e dei suoi aperti e esprimono proprietà delle funzioni e forme differenziali. Per esempio, dire che $H_{dR}^k(U) = 0$ significa dire che *tutte le k-forme chiuse su U sono esatte*: se $dw = 0$ allora esiste η tale che $\omega = d\eta$ e cioè esiste su U

una primitiva di ω . Questo non è sempre vero: se $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ conosciamo (dai corsi di Analisi) una 1-forma chiusa ma non esatta

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

e dunque $H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$. Notiamo che la forma ω non è definita su tutto \mathbb{R}^2 e quindi non definisce un elemento in $H_{dR}^1(\mathbb{R}^2)$ (che invece è nullo).

In realtà questi gruppi hanno un significato puramente topologico: se U, V sono due aperti omeomorfi di \mathbb{R}^n allora $H_{dR}^k(U) \cong H_{dR}^k(V)$ per ogni k . Questo è un caso particolare di un importante teorema, il *teorema di de Rham*, di cui vedremo nel [capitolo 8](#) l'enunciato preciso ma non la dimostrazione, che è troppo avanzata per il livello di questo corso. Come introduzione a questa teoria, calcoleremo $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n)$ nel [paragrafo 6](#) e vedremo sotto quali ipotesi *topologiche* su U si può affermare che la coomologia di de Rham è nulla.

Questo enunciato garantirà quindi la possibilità di trovare delle primitive (e quindi di risolvere un problema di integrazione) non appena siano soddisfatte semplici condizioni necessarie (la chiusura della forma).

La coomologia di de Rham, compresa la dimostrazione del teorema di de Rham, fa parte del programma del corso di “Geometria Superiore” della Laurea Magistrale, mentre una esposizione (abbastanza) completa di teorie omologiche e coomologiche viene fatta nel corso di “Topologia Algebrica”.

5. Operatori differenziali

Introduciamo ora un importante endomorfismo sullo spazio delle forme, l'*operatore * di Hodge* (si legge “operatore star di Hodge”). Tramite lo $*$ di Hodge definiremo gli oggetti classici del calcolo differenziale in più variabili, il *gradiente*, la *divergenza* e il *rotore*, più qualcun altro come il *Laplaciano*.

Consideriamo \mathbb{R}^n con la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e le corrispondenti coordinate (x_1, \dots, x_n) . Sappiamo che per un punto $p \in \mathbb{R}^n$ i vettori $\{\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p\}$ sono una base dello spazio tangente $T_p\mathbb{R}^n$ e i differenziali $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ sono una base dello spazio cotangente $T_p^*\mathbb{R}^n$.

Sia ω una k -forma differenziale definita sull'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad \varphi = \sum_J b_J dx_J$$

dove i coefficienti a_I sono funzioni differenziabili definite sull'aperto U .

5.1. Lo * di Hodge.

Definizione 5.1. L'*operatore * di Hodge* è definito ponendo

$$*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = (-1)^\sigma (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}})$$

dove $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{n-k}, \sigma$ è la permutazione

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{array} \right)$$

e $(-1)^\sigma$ indica il *segno* di σ e cioè

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

e poi estendendo per linearità ad una funzione $*$: $\Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. (Attenzione: la linearità va intesa come $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ -moduli e cioè, se f è una funzione e ω una k -forma, si ha $*(f \cdot \omega) = f \cdot (*\omega)$).

Per prima cosa osserviamo che se ω è una k -forma, allora $*\omega$ è una $(n-k)$ -forma e quindi l'operatore $*$ dipende non solo dal grado della forma ma anche dalla dimensione dello spazio ambiente. Vediamo adesso alcuni esempi.

Esempio 5.2. Cominciamo con le 1-forme. Siano $dx_1, dx_2 \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$*dx_1 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad *dx_2 = -dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Infatti nel primo caso la permutazione è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array} \right)$$

mentre nel secondo caso è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{array} \right)$$

In generale

$$*dx_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

dove $\widehat{dx_i}$ significa che il termine dx_i non è presente. La permutazione in questo caso è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ i & 1 & 2 & \dots & i-2 & i-1 & i+1 & \dots & n \end{array} \right)$$

e ci vogliono $i-1$ scambi per portare la permutazione nell'identità.

Esempio 5.3. Riprendiamo le forme dell'[Esercizio 3.4](#) in \mathbb{R}^3

$$\varphi = x dx - y dy, \quad \theta = z dy$$

Calcoliamo per esempio $*\varphi, d(*\varphi), *d\varphi$. Si ha, usando l'ordinamento delle variabili (x, y, z)

$$*dx = dy \wedge dz, \quad *dy = -dx \wedge dz, \quad *dz = dx \wedge dy$$

e dunque

$$\begin{aligned} * \varphi &= x \, dy \wedge dz + y \, dx \wedge dz \\ d(*\varphi) &= dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dx \wedge dz = 0 \\ *d\varphi &= *0 = 0 \end{aligned}$$

Le ultime due righe sembrano indicare che d e $*$ commutano. Questo non è vero in generale come si vede da

$$\begin{aligned} *\theta &= -z \, dx \wedge dz \implies d(*\theta) = 0 \\ d\theta &= dz \wedge dy \implies *d\theta = -dx \end{aligned}$$

In effetti, se ω è una 1-forma, allora $*\omega$ è una $(n-1)$ -forma e quindi $d(*\omega)$ è una n -forma, mentre $d\omega$ è una 2-forma e quindi $*d\omega$ è una $(n-2)$ -forma. Vediamo quindi che l'unico modo in cui possono essere uguali è se sono entrambe nulle (così non vediamo più il grado).

Esempio 5.4. L'operatore $*$ è lineare per definizione e cioè, per ω, η due k -forme e f, g funzioni differenziabili su U si ha

$$*(f\omega + g\eta) = f(*\omega) + g(*\eta)$$

Però l'operatore $*$ non è un omomorfismo di anelli, di nuovo per semplici questioni di grado: se ω, η sono delle 1-forme, allora $*\omega \wedge *\eta$ è una $(2n-2)$ -forma (certamente nulla se $n \geq 3$) mentre $*(\omega \wedge \eta)$ è una $(n-2)$ -forma (non nulla, se $\omega \wedge \eta \neq 0$) e quindi i gradi sono diversi.

Esercizio 5.5. Sia ω una k -forma in n variabili. Quanto vale $**\omega$? Basta farlo per i monomi e poiché su un monomio $*dx_I = \pm dx_J$, dove in J ci sono le variabili che non ci sono in I , è chiaro che $**\omega = \pm\omega$. Dimostrare che

$$**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$$

5.2. La contrazione di una forma. Ricordiamo che una k -forma differenziale è una famiglia di forme k -lineari alternanti che operano sullo spazio tangente. Per esempio, se ω è una 1-forma e X è un campo vettoriale, possiamo definire la funzione $\omega(X) : U \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p)$$

dove a destra c'è il valore della forma lineare ω_p (la forma ω nel punto p) applicata al vettore X_p (il vettore del campo X nel punto p).

In questo modo, usando il campo X , passiamo dalla 1-forma ω alla 0-forma (una funzione) $\omega(X)$. Questa operazione, che abbassa di 1 il grado di una forma, si chiama *contrazione* e si può definire per forme di ogni grado.

Definizione 5.6. Siano X un campo vettoriale e ω una k -forma. La *contrazione* (o *prodotto interno*), denotata con $\iota_X(\omega)$ oppure $X \lrcorner \omega$ è la $(k-1)$ -forma definita da

$$X \lrcorner \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$$

per ogni scelta di Y_1, \dots, Y_{k-1} campi vettoriali.

Esempio 5.7. Prendiamo il campo $X(x, y, z) = (x, y, z)$. Questo campo è il campo su \mathbb{R}^3 che “punta in fuori”, centrato nell’origine. Il modulo dei vettori del campo aumenta all’aumentare della distanza del punto dall’origine.

Sia $\omega = dx \wedge dy$. Cosa è $X \lrcorner \omega$? Per definizione è una 1-forma e quindi è una combinazione lineare di dx, dy, dz .

$$X \lrcorner \omega = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

Per calcolare i coefficienti, basta applicare questa forma ai campi vettoriali della base:

$$(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)(\mathbf{e}_1|_p) = \alpha(p)$$

e analogamente per β e γ . In termini della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, il campo X si scrive

$$X(x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Si ha

$$\begin{aligned} X \lrcorner \omega(\mathbf{e}_1|_p) &= \omega(X, \mathbf{e}_1) \\ &= (dx \wedge dy)(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ &= \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= -y \end{aligned}$$

e analogamente (fare i calcoli!!)

$$X \lrcorner \omega(\mathbf{e}_2|_p) = x, \quad X \lrcorner \omega(\mathbf{e}_3|_p) = 0$$

Dunque

$$X \lrcorner \omega = -y dx + x dy$$

5.3. La dualità. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e V^* il suo duale. Sappiamo che V e V^* sono isomorfi. Però non c’è un isomorfismo canonico: per fissare un isomorfismo dobbiamo fissare una base di V .

La situazione è migliore quando V è uno spazio vettoriale *euclideo* e cioè se abbiamo un prodotto scalare su V . Allora possiamo ottenere un isomorfismo $f : V \rightarrow V^*$ senza dover fissare basi nel seguente modo. Per

$\mathbf{x} \in V$, dobbiamo definire l'elemento $f(\mathbf{x}) \in V^*$ e cioè $f(\mathbf{x})$ è una funzione lineare $V \rightarrow \mathbb{R}$. Allora si definisce

$$f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

dove a destra c'è il prodotto scalare in V . A volte si scrive

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, - \rangle$$

indicando con $-$ il posto della variabile indipendente. La funzione $f(\mathbf{x})$ è lineare perché il prodotto scalare è lineare nella *seconda* variabile (è bilineare). La funzione $f : V \rightarrow V^*$ è lineare perché il prodotto scalare è lineare nella *prima* variabile.

Calcoliamo $\ker f$: un elemento $\mathbf{x} \in V$ sta nel nucleo se $f(\mathbf{x}) = 0 \in V^*$ è l'applicazione lineare nulla e cioè se

$$f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

ma poiché il prodotto scalare è non degenero, questo implica che $\mathbf{x} = 0$ e dunque f è iniettiva. Gli spazi V e V^* hanno la stessa dimensione e perciò un omomorfismo iniettivo è anche suriettivo e dunque un isomorfismo.

Ripetiamo adesso questo discorso per gli spazi tangenti e cotangenti e cioè poniamo $V = T_p\mathbb{R}^n$ e $V^* = T_p^*\mathbb{R}^n$. Il prodotto scalare su $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ è quello standard su \mathbb{R}^n e la base canonica $\{\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p\}$ è ortonormale per questo prodotto. Se

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1|_p + \alpha_2 \mathbf{e}_2|_p + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n|_p$$

è un vettore tangente in p , il prodotto scalare con i vettori della base vale

$$\langle \mathbf{e}_i|_p, \mathbf{v} \rangle = \alpha_i$$

e dunque $f(\mathbf{e}_i|_p) = dx_i$, cioè f è proprio l'omomorfismo che fa corrispondere la base di $T_p\mathbb{R}^n$ con la base duale data dai differenziali delle coordinate.

C'è una convenzione (che non stiamo seguendo) sul diverso posizionamento degli indici nel caso dei vettori tangenti e delle forme differenziali. Questa convenzione è seguita soprattutto in campo fisico (la vedrete l'anno prossimo nel corso di Meccanica Razionale e in generale nei corsi di Fisica Matematica) e posiziona gli indici dei differenziali *in basso* (come facciamo noi) e gli indici dei vettori *in alto*: scriveremmo la base $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n\}$.

Usando questa convenzione, l'isomorfismo f che abbiamo scritto si ricorda facilmente perché “abbassa gli indici”, mentre l'isomorfismo inverso “alza gli indici”. Questo suggerisce una nomenclatura (e notazione) “musicale” per questi isomorfismi: $f(\mathbf{x})$ si scrive \mathbf{x}^\flat e si legge “ \mathbf{x} bemolle”, mentre l'isomorfismo inverso si scrive ω^\sharp e si legge “ ω diesis”.

Diamo la definizione precisa e fissiamo le notazioni:

Definizione 5.8. Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard su $T_p\mathbb{R}^n$ induce un isomorfismo ${}^b : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_p^*\mathbb{R}^n$ dato da $\mathbf{x}_p^b = \omega_p$, dove ω_p è tale che

$$\mathbf{x}_p^b(\mathbf{v}) = \omega_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{v} \rangle$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{R}^n$.

Come abbiamo osservato

$$(\mathbf{e}_i)^b = dx_i$$

L'isomorfismo inverso è denotato con ${}^\sharp : T_p^*\mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathbb{R}^n$.

Questi isomorfismi valgono punto per punto e quindi per un campo vettoriale X o per una 1-forma ω ,

$$X = \sum_i f_i(x)\mathbf{e}_i \longrightarrow X^b = \sum_i f_i(x) dx_i$$

e

$$\omega = \sum_i g_i(x) dx_i \longrightarrow \omega^\sharp = \sum_i g_i(x)\mathbf{e}_i$$

Dunque queste funzioni trasformano campi vettoriali in 1-forme e viceversa. L'uso di questa notazione è molto comodo e permetterà di semplificare la scrittura delle formule che vedremo fra poco.

5.4. Operatori differenziali classici.

Definizione 5.9. (*Divergenza di un campo vettoriale*) Un campo vettoriale

$$X = \sum f_i(x)\mathbf{e}_i$$

su \mathbb{R}^n può essere considerato come una funzione $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (le f_i sono le componenti scalari della funzione vettoriale X). Definiamo allora una funzione $\operatorname{div} X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la *divergenza* di X , come

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}(dX_p)$$

dove dX è il differenziale della funzione X . Quindi dX_p è una funzione lineare $dX_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{X(p)}\mathbb{R}^n$ e tr è la sua traccia, che non dipende dal sistema di coordinate usato.

In componenti, nelle basi standard di $T_p\mathbb{R}^n$ e $T_{X(p)}\mathbb{R}^n$, la matrice di dX_p è data da

$$dX_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)$$

e quindi

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)$$

Definizione 5.10. (*Gradiente di una funzione*) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Definiamo un campo vettoriale su \mathbb{R}^n $\text{grad } f$, il *gradiente* di f , come

$$(\text{grad } f)_p = (df_p)^\sharp$$

dove df è il differenziale della funzione f . Simmetricamente, si ha anche

$$(df)_p = (\text{grad } f)_p^\flat$$

In componenti, $df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i$ e quindi

$$(\text{grad } f)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \mathbf{e}_i$$

Notiamo che con questa terminologia la differenza fra *gradiente* (un campo vettoriale) e *differenziale* (una 1-forma differenziale) è evidente. Anche se nelle basi corrispondenti hanno le stesse coordinate, sono due oggetti completamente diversi.

Definizione 5.11. (*Laplaciano di una funzione*) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Definiamo una funzione $\Delta f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il *Laplaciano* di f , come

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$$

Calcolando, si ha che il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana e cioè

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p)$$

Definizione 5.12. (*Rotore di un campo vettoriale*) Sia X un campo vettoriale su \mathbb{R}^n . Definiamo una $(n-2)$ -forma differenziale $\text{rot } X$, il *rotore* di X , come

$$\text{rot } X = *(dX^\flat)$$

dove X^\flat è la 1-forma che si ottiene dal campo X mediante l'isomorfismo canonico dato dal prodotto scalare.

Notiamo che quando $n = 3$, $\text{rot } X$ è una 1-forma che quindi corrisponde ad un campo vettoriale $Y = (\text{rot } X)^\sharp$. Questo campo Y viene anch'esso chiamato il *rotore* di X .

Svolgiamo i calcoli per $n = 3$:

$$X = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3$$

dunque

$$X^\flat = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

Allora

$$dX^b = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3$$

Calcoliamo l'operatore $*$ di Hodge:

$$*(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3, \quad *(dx_1 \wedge dx_3) = -dx_2, \quad *(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1$$

(basta controllare la parità delle permutazioni) e quindi:

$$\text{rot } X = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_1 - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_3$$

e il campo vettoriale associato è

$$Y = (\text{rot } X)^\sharp = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3$$

proprio come definito in Analisi Matematica.

5.5. Esercizi. Vediamo qualche esercizio che riguarda forme, campi vettoriali e gli operatori appena introdotti.

Esercizio 5.13. Nell'[Esercizio 3.8](#) abbiamo considerato l'*elemento di volume* su \mathbb{R}^n come la n -forma data da

$$\nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Nell'esercizio indicato abbiamo considerato ν come una n -forma su uno spazio vettoriale, ma possiamo anche pensarla come una n -forma *differenziale* e cioè definita in tutti i punti di \mathbb{R}^n , che dà una forma n -lineare alternante su tutti gli spazi tangenti.

Chiamiamo questa forma differenziale la *forma di volume* e la indichiamo con

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Sia X un campo vettoriale differenziabile su \mathbb{R}^n e dV la forma di volume su \mathbb{R}^n . Dimostrare che:

- (1) $d(*X^b) = (\text{div } X) dV$ o, equivalentemente, $\text{div } X = *d(*X^b)$;
- (2) in vista del punto precedente, dV è una forma esatta? Se sì, determinare una $(n-1)$ -forma ω tale che $d\omega = dV$;

Soluzione.

- (1) Questo è un calcolo: scriviamo il campo come

$$X = \sum f_i(x) \mathbf{e}_i$$

$$X^b = \sum f_i(x) dx_i$$

Calcoliamo lo $*$ di Hodge, ricordando l'Esempio 5.2:

$$*X^b = \sum (-1)^{i-1} f_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove ricordiamo che \widehat{dx}_i significa che il termine dx_i non è presente. Calcoliamo adesso il differenziale:

$$d(*X^b) = \sum (-1)^{i-1} df_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Il differenziale df_i ha tutte le derivate parziali e i differenziali di tutte le coordinate. Poiché è moltiplicato per una $(n-1)$ -forma, sopravvive solo il termine dx_i e quindi

$$d(*X^b) = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Per riportare dx_i al suo posto, occorrono $(i-1)$ scambi e quindi il segno cambia per $(-1)^{i-1}$ e dunque in totale $(2i-2)$ volte. Questo numero è sempre pari e quindi il segno di tutti gli addendi è positivo. In conclusione

$$d(*X^b) = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (\operatorname{div} X) dV$$

(2) L'idea è scrivere

$$dV = \frac{1}{\operatorname{div} X} d(*X^b)$$

da cui si vede che dV è esatta in quanto è la derivata esterna della forma $*X^b$. Però dobbiamo essere sicuri di poter dividere e che il termine $\operatorname{div} X$ non influisca sul calcolo della derivata: la strada più semplice è trovare un campo X per cui $\operatorname{div} X = 1$ (o almeno costante). Un tale campo è

$$X_1 = x_1 \mathbf{e}_1$$

e quindi basta adesso ripetere per questo campo i calcoli precedenti. Si ha $X_1^b = x_1 dx_1$ e quindi

$$*X_1^b = x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Osserviamo che ci sono molti altri campi che possono andare bene. Per esempio, tutti i campi

$$X_i = (-1)^{i-1} x_i \mathbf{e}_i$$

producono delle $(n-1)$ -forme $*X_i^b$ la cui derivata esterna è sempre dV .

È ovvio che la risposta non può essere unica: una forma la cui derivata esterna è una forma data è analoga ad una *primitiva* per una funzione e sappiamo bene che la primitiva non è mai unica (ci sono le "costanti di integrazione"). Qui la situazione è un po' diversa, perché le forme che si ottengono dai vari campi non differiscono per delle costanti e quindi sembrano esserci più "gradi di libertà" nel determinare una primitiva.

- sapete trovare altre primitive?

- ci sono infinite primitive “essenzialmente diverse”?
- sapete trovare tutte le primitive?

Esercizio 5.14. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni differenziabili, X un campo vettoriale differenziabile su \mathbb{R}^n e dV la forma di volume su \mathbb{R}^n . Dimostrare che:

- (1) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle$;
- (2) $d(*df) = (\Delta f)dV$ o, equivalentemente, $\Delta f = *d(*df)$;
- (3) $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$;
- (4) $*X^\flat = X \lrcorner dV$;
- (5) sia $n = 3$. Allora $\text{div}(\text{rot } X) = 0$. Si può dare un senso a quest'affermazione quando $n \neq 3$?

Soluzione. Risolvete voi quest'ultimo esercizio, usando le formule viste negli esercizi precedenti. Se avete difficoltà con le formule generali, fate prima il caso $n = 3$ e cercate di vedere se la vostra soluzione vale in generale.

6. Il lemma di Poincaré

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e ω una forma differenziale su U . La proprietà “ ω è chiusa” è semplice da verificare (basta calcolare la derivata esterna) e come abbiamo visto è una condizione necessaria per la proprietà “ ω è esatta” e cioè ω ammette (su U) una primitiva. Questa proprietà è importante, per esempio è esattamente la definizione di *campo conservativo*, per cui la primitiva è il potenziale.

Con il nome di *Lemma di Poincaré* si indicano enunciati che affermano che, sotto opportune ipotesi topologiche sull'aperto U , tutte le forme chiuse su U sono esatte. Abbiamo quindi, sotto queste ipotesi, un metodo semplice per determinare l'integrabilità di una forma.

In questo paragrafo vediamo vari esempi di Lemmi di Poincaré, per forme di grado 1 e per k -forme e con differenti ipotesi topologiche. Il caso delle 1-forme su un aperto stellato è noto dai corsi di Analisi e riportiamo qui una dimostrazione più che altro per fissare le notazioni ed estendere la dimostrazione vista in Analisi da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^n (la dimostrazione è identica).

Nei corsi di Analisi si vede spesso anche il caso del dominio U semplicemente connesso ma spesso senza dimostrazione. Vedremo qui una dimostrazione completa, che dipende dal fatto di poter definire l'integrale di 1-forme differenziali *chiuse* anche su cammini continui e non solo regolari a tratti.

Per le k -forme c'è un risultato molto generale, il [Teorema 6.16](#) che riguarda gli aperti U *contraibili* e non solo semplicemente connessi. L'enunciato

del Teorema 6.16 e la discussione sulla coomologia di de Rham che segue FANNO PARTE del programma d'esame.

Invece il Lemma 6.17, il Teorema 6.18 e la dimostrazione del Teorema 6.16 NON FANNO PARTE DEL PROGRAMMA D'ESAME. Siete naturalmente invitati a leggere queste pagine, ma non obbligati.

Alla fine del paragrafo ci sono alcuni esercizi, in parte svolti, sulle forme differenziali.

6.1. Il caso U stellato. Cominciamo con un enunciato che vale per le 1-forme, sotto ipotesi "geometriche" sull'aperto U , piuttosto che topologiche.

Definizione 6.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $P \in U$. U si dice *stellato rispetto a P* se per ogni $Q \in U$ il segmento PQ è contenuto in U .

Per esempio, se U è convesso allora U è stellato rispetto ad ogni suo punto. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è stellato.

Proposizione 6.2 (Lemma di Poincaré per le 1-forme). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto stellato e sia $\omega \in \Omega^1(U)$ una 1-forma. Se ω è chiusa allora ω è esatta, cioè esiste $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega = df$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre, a meno di un cambiamento di coordinate mediante traslazione, che il punto P rispetto a cui U è stellato sia l'origine. La forma ω si scrive

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$$

e l'ipotesi che sia chiusa significa che per $1 \leq i, j \leq n$ si ha

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

Definiamo $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i \right) dt$$

Dall'ipotesi U stellato rispetto all'origine si ha che i termini sotto il segno di integrale sono definiti e l'integrando è continuo rispetto a t e dunque l'integrale esiste. Dimostriamo adesso che $df = \omega$. Per fare ciò, dobbiamo verificare che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$$

Poiché la funzione integranda è differenziabile, possiamo usare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_j(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_j \right) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_j(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_j \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_j \right) t + a_i(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_j \right) t + a_i(tx_1, \dots, tx_n) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (a_i(tx_1, \dots, tx_n) \cdot t) = [a_i(tx_1, \dots, tx_n) \cdot t]_0^1 \\
 &= a_i(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

□

Questa dimostrazione è la stessa vista nei corsi di Analisi e il passaggio fondamentale è la quarta uguaglianza, dove usiamo l'ipotesi di chiusura per riscrivere l'integrando.

6.2. Il caso U semplicemente connesso. L'ipotesi che U sia stellato è piuttosto forte ed è interessante chiedersi se sotto ipotesi più deboli si possa comunque affermare qualcosa sull'esattezza delle 1-forme usando una condizione di natura topologica.

Per prima cosa stabiliamo una relazione fra esattezza e integrale di una 1-forma su cammini. Cominciamo con il caso in cui il cammino α sia differenziabile:

Definizione 6.3. Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ una mappa differenziabile e sia $\omega \in \Omega^1(U)$. Poniamo

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b \alpha^* \omega$$

dove α^* è il pullback di forme.

Questa definizione è la stessa della Definizione 2.2, pag. 41 del Pagani-Salsa (integrale curvilineo di seconda specie). L'uso della nozione di pullback rende la definizione di integrale e la notazione molto più semplice.

Notiamo che se $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è un cambiamento di parametro (cioè $\varphi'(s) \neq 0 \forall s$), allora

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha \circ \varphi} \omega$$

se e solo se $\varphi'(s) > 0 \forall s$ e cioè se φ mantiene l'orientazione. Se invece $\varphi'(s) < 0 \forall s$ allora l'integrale cambia segno.

Osserviamo anche che basta che il cammino sia differenziabile a tratti. L'integrale sarà allora la somma degli integrali sugli intervalli su cui α è differenziabile. In termini di integrali, è facile caratterizzare le 1-forme esatte.

Proposizione 6.4. *Sia $\omega \in \Omega^1(U)$, con U aperto connesso. Sono equivalenti:*

- (1) ω è esatta in U ;
- (2) $\int_{\alpha} \omega$ dipende solo dagli estremi del cammino α , per ogni cammino α in U ;
- (3) $\int_{\alpha} \omega = 0$, per tutte le curve chiuse α in U .

Dimostrazione.

1. \implies 2. Se $\omega = df$ è esatta, allora

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b \alpha^*(df) = \int_a^b d(\alpha^*(f)) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

e quindi l'integrale dipende solo dagli estremi del cammino. La commutatività fra il pullback e la derivazione esterna ([Proposizione 2.24](#)) rende questa dimostrazione immediata.

2. \iff 3. Immediato dalla definizione di integrale e dal suo comportamento cambiando l'orientazione.

2. \implies 1. Fissiamo un punto $p \in U$ e per ogni $x \in U$ sia α un cammino che congiunge p e x . Definiamo

$$f(x) = \int_{\alpha} \omega$$

dove poniamo $\omega = \sum_i a_i dx_i$. Per ipotesi la funzione $f(x)$ è ben definita e vogliamo dimostrare che $\omega = df$. Basta dunque calcolare le derivate parziali di f . Sia $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ e consideriamo la curva $c_{i,t}(s) = x + s\mathbf{e}_i$, per $0 \leq s \leq t$. La curva $c_{i,t}$ è un segmento parallelo all'asse i -esimo che congiunge il punto x e il punto $x + t\mathbf{e}_i$ e, per ogni t sufficientemente piccolo,

è tutto contenuto nell'aperto U . Dunque:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{f(x + t\mathbf{e}_i) - f(x)\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{\alpha + c_{i,t}} \omega - \int_{\alpha} \omega \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{c_{i,t}} \omega && \text{per l'additività dell'integrale} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t a_i(x + s\mathbf{e}_i) ds && \text{pullback di } \omega \text{ lungo } c_{i,t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_i(x + \bar{s}\mathbf{e}_i) \cdot t}{t} && 0 < \bar{s} < t \text{ per il teorema del valor medio} \\
 &= a_i(x)
 \end{aligned}$$

□

Osservazione. L'ipotesi è che U sia *connesso*, però nell'implicazione 2. \implies 1. usiamo il fatto che sia possibile trovare un cammino che congiunge p e x , cioè serve che U sia *connesso per archi*.

È un fatto non (troppo) difficile da dimostrare che tutti gli *aperti connessi* di \mathbb{R}^n sono connessi per archi. Provate a dimostrare questo fatto per esercizio. Se non riuscite, leggete il Manetti, Definizione 10.4 e Proposizione 10.5.

Poiché faremo un'ipotesi *topologica* su U , abbiamo bisogno di considerare tutti i cammini e non solo i cammini differenziabili. Un uso interessante del Lemma di Poincaré per aperti stellati permette di estendere la definizione di integrale di una forma *chiusa* su cammini continui.

Definizione 6.5. Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k -forma. ω si dice *localmente esatta* se per ogni $p \in U$ esiste un intorno $V_p \subseteq U$ e una $(k-1)$ -forma $\eta \in \Omega^{k-1}(V_p)$ tale che $\omega = d\eta$ su V_p .

Per calcolare $d\omega$ in p dobbiamo calcolare le derivate parziali dei coefficienti e dunque “localmente esatta \implies chiusa”, poiché basta conoscere ω in un intorno di p . D'altra parte, per ogni $p \in U$ esiste una palla di centro p e raggio ε contenuta in U e poiché le palle sono aperti stellati, dal Lemma di Poincaré per gli aperti stellati si ottiene che per le 1-forme “chiusa \implies localmente esatta”.

Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ una curva differenziabile e ω una 1-forma chiusa. Poiché ω è localmente esatta, per ogni punto $p \in U$ esiste una palla aperta $B_p \subseteq U$ su cui ω è esatta. Gli aperti $\{\alpha^{-1}(B_p)\}$ formano un ricoprimento

aperto di $[a, b]$ e questo ricoprimento ha un numero di Lebesgue d (l'intervallo $[a, b]$ è metrico compatto). Possiamo dunque trovare una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$$

(basta che $t_{i+1} - t_i < d$) tale che $\alpha_i = \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ha immagine contenuta in una palla B_i su cui ω è esatta e cioè $\omega = df_i$ su B_i . Allora

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_i \int_{\alpha_i} \omega = \sum_i [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

Osserviamo che per trovare la partizione abbiamo usato solo la *continuità* della funzione α e quindi possiamo fare lo stesso ragionamento per un cammino continuo e *definire* l'integrale con la sommatoria a destra e cioè:

Definizione 6.6. Sia $\omega \in \Omega^1(U)$ una 1-forma *chiusa* e sia $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ un cammino *continuo*. Consideriamo una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$$

tale che $\alpha_i = \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ha immagine contenuta in una palla B_i su cui ω è esatta e cioè $\omega = df_i$ su B_i . Allora definiamo

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_i [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

Poiché ω è una 1-forma chiusa, è anche localmente esatta e quindi possiamo trovare una partizione come nella Definizione, usando il ragionamento precedente. Per avere una buona definizione di integrale, dobbiamo adesso dimostrare che la somma è indipendente dalla partizione scelta.

Sia \mathcal{P} una partizione e sia \mathcal{P}' il raffinamento che si ottiene aggiungendo un punto $t' \in (t_i, t_{i+1})$. Poiché questo punto ha immagine $\alpha(t') \in B_i$ possiamo usare due volte la primitiva locale f_i ottenendo

$$[f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t'))] + [f_i(\alpha(t')) - f_i(\alpha(t_i))] = [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

e cioè la somma non cambia raffinando la partizione. Se ora \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono due partizioni qualunque, possiamo considerare $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Questo è un raffinamento comune e la somma su \mathcal{R} è la stessa che su \mathcal{P} e su \mathcal{Q} , e quindi la somma è indipendente dalla partizione.

Abbiamo dunque ottenuto un concetto di integrale di una 1-forma chiusa su un cammino continuo. Analizziamo adesso l'ipotesi topologica che vogliamo mettere su U . Per comodità, ripetiamo qui le definizioni standard di omotopia di cammini e di spazio semplicemente connesso.

Definizione 6.7. Uno spazio topologico X connesso per archi si dice *semplicemente connesso* se ogni cammino chiuso α in X è omotopo ad un cammino costante.

Si può dare una definizione equivalente di semplicemente connesso utilizzando l'omotopia a estremi fissi. Sia X uno spazio topologico e $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ e $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ due cammini continui con gli stessi estremi, cioè $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$.

Definizione 6.8. I cammini α e β si dicono *omotopi a estremi fissi* se esiste una funzione continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che

1. $H(s, 0) = \alpha(s), H(s, 1) = \beta(s) \quad \forall s \in [0, 1]$
2. $H(0, t) = x_0, H(1, t) = x_1 \quad \forall t \in [0, 1]$

La 1. dice che H è un'omotopia fra α e β e la 2. dice che durante l'omotopia gli estremi dei cammini rimangono fissati.

Si dimostra facilmente che l'omotopia ad estremi fissi è una relazione di equivalenza e si ha

Proposizione 6.9. *Uno spazio topologico X è semplicemente connesso se e solo se tutti i cammini con gli stessi estremi sono omotopi ad estremi fissi.*

Dimostrazione. Esercizio (di GEOMETRIA DUE). □

Esempio 6.10. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso. Invece $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso.

Possiamo adesso dimostrare il teorema centrale di questo sotto-paragrafo:

Teorema 6.11. *Sia ω una 1-forma chiusa su un aperto U di \mathbb{R}^n e siano α, β due cammini in U omotopi ad estremi fissi. Allora*

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$$

Dimostrazione. Sia H un'omotopia a estremi fissi fra α e β . La funzione H ha dominio $R = [a, b] \times [0, 1]$.

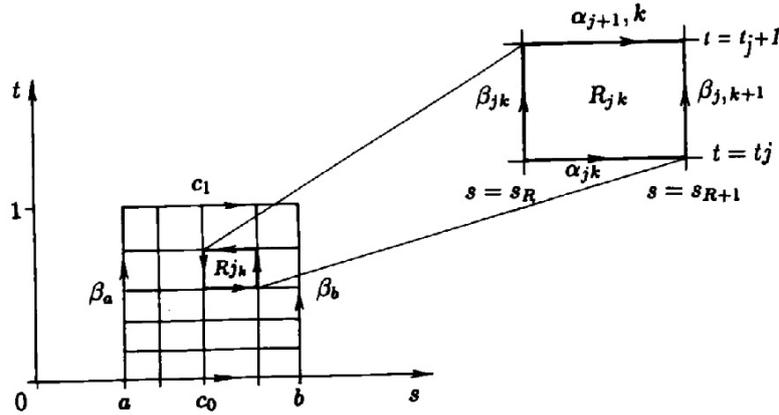
Poiché ω è chiusa, è localmente esatta. Come in precedenza, per ogni punto $p \in U$ esiste una palla aperta B_p su cui ω è esatta. La famiglia di aperti $\{H^{-1}(B_p)\}$ è un ricoprimento aperto di R e come prima questo ricoprimento ha un numero di Lebesgue d , perché R è metrico compatto.

Dividiamo R in rettangoli R_{jk} con lati paralleli agli assi, in modo che ogni rettangolo abbia diametro minore di d (il diametro di un rettangolo è la lunghezza della sua diagonale) e quindi ogni $H(R_{jk})$ è contenuto in uno degli aperti B_p su cui ω è esatta. Allora

$$\int_{\partial R_{jk}} \omega = 0$$

dove ∂R_{jk} è il bordo del rettangolo R_{jk} perché il bordo è una curva chiusa contenuta in un aperto su cui ω è esatta. In effetti per avere una curva

in U dovremmo scrivere $H(\partial R_{jk})$. Per semplicità di notazione, tralasciamo l'indicazione di H qui e nella scrittura dei singoli lati di cui è composto il bordo.



Indichiamo dunque i lati del bordo con a_{jk} , $b_{j,k+1}$, $a_{j+1,k}$, b_{jk} , dove i lati a sono orizzontali orientati da sinistra a destra e i lati b sono verticali orientati dal basso verso l'alto. Sommando gli integrali su tutti questi bordi, si ottiene

$$0 = \sum_{jk} \int_{\partial R_{jk}} \omega = \sum_{jk} \left\{ \int_{a_{jk}} \omega + \int_{b_{j,k+1}} \omega - \int_{a_{j+1,k}} \omega - \int_{b_{jk}} \omega \right\}$$

I termini che corrispondono ai lati interni al rettangolo R compaiono due volte (perché sono lati di rettangoli adiacenti) con segni opposti (perché hanno orientazioni opposte) e quindi si cancellano a due a due. Nella somma rimangono solo i lati esterni del rettangoli, con la stessa orientazione di prima e cioè

$$0 = \int_{\alpha} \omega + \int_{c_b} \omega - \int_{\beta} \omega - \int_{c_a} \omega$$

dove $c_a = H(a, t)$ e $c_b = H(b, t)$ sono i lati verticali. Ma poiché l'omotopia è a estremi fissi, queste curve sono costanti e quindi questi integrali sono nulli. Si ottiene finalmente

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$$

□

Quindi per una 1-forma *chiusa*, l'integrale dipende solo dalla classe di omotopia (a estremi fissi) del cammino di integrazione.

Se quindi U è semplicemente connesso e ω è una 1-forma chiusa, tutti i cammini con gli stessi estremi sono omotopi e l'integrale $\int_a^b \omega$ non dipende dal cammino di integrazione ma solo dagli estremi e quindi dalla [Proposizione 6.4](#) si ottiene il

Teorema 6.12 (Lemma di Poincaré per gli aperti semplicemente connessi). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso e sia ω una 1-forma. Allora ω è chiusa se e solo se è esatta.*

6.3. Il caso U contraibile. Se il dominio U è stellato, la dimostrazione della [Proposizione 6.2](#) può essere estesa alle k -forme chiuse, definendo in modo opportuno la $(k-1)$ -forma primitiva. È però più semplice seguire un'altra strada, dimostrando un fatto più generale.

Definizione 6.13. Uno spazio topologico (connesso) X si dice *contraibile* se è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè se esiste una funzione continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che

$$\begin{cases} H(x, 0) = x_0 & \forall x \in X \\ H(x, 1) = x & \forall x \in X \end{cases}$$

H è un'omotopia fra una funzione costante e la funzione identità di X .

Notiamo che possiamo estendere H ad una funzione continua $H : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ ponendo

$$\begin{cases} H(x, t) = x_0 & \forall x \in X, \quad \forall t < 0 \\ H(x, t) = x & \forall x \in X, \quad \forall t > 1 \end{cases}$$

Esercizio 6.14. Dimostrare che se X è contraibile allora X è connesso.

Esempio 6.15. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato rispetto all'origine, allora

$$H(x_1, \dots, x_n, t) = (tx_1, \dots, tx_n)$$

è un'omotopia fra la funzione costante $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ e l'identità di U . In particolare, \mathbb{R}^n è contraibile.

Possiamo adesso enunciare il risultato principale di questo paragrafo:

Teorema 6.16 (Lemma di Poincaré). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contraibile e sia ω una k -forma differenziale chiusa definita su U , cioè $d\omega = 0$, con $k \geq 1$. Allora ω è esatta, cioè esiste una $(k-1)$ -forma differenziale α definita su U tale che $d\alpha = \omega$.*

Usando la coomologia di de Rham introdotta nel [paragrafo 4](#), possiamo enunciare il Lemma di Poincaré come: se U è contraibile (in particolare se

$U = \mathbb{R}^n$), allora $H_{dR}^k(U) = 0$ per ogni $k \geq 1$, e in particolare $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Il caso $k = 0$ è diverso (e più semplice): per U un aperto qualunque, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione tale che $df = 0$ allora f è localmente costante, cioè costante sulle componenti connesse di U (questa è una conseguenza immediata del teorema di Lagrange). Viceversa, se f è (localmente) costante allora chiaramente $df = 0$.

Scrivendo $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, dove gli U_i sono le componenti connesse di U , si ha dunque

$$H_{dR}^0(U) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}$$

(un addendo per ogni componente connessa). Poiché U contraibile implica U connesso, concludiamo che per U contraibile si ha $H_{dR}^0(U) = \mathbb{R}$.

Osserviamo anche che se U e V sono omeomorfi, allora le loro componenti connesse sono in corrispondenza biunivoca e quindi $H_{dR}^0(U) \cong H_{dR}^0(V)$, come previsto dal fatto che la coomologia di de Rham dipende solo dalla *topologia* di U e non dalla sua struttura differenziabile.

ATTENZIONE. Gli argomenti da questo punto fino alla fine del [sottoparagrafo 6.3](#) NON FANNO PARTE DEL PROGRAMMA D'ESAME.

Prima di iniziare la dimostrazione, c'è un importante commento da fare: l'ipotesi su U è topologica ma la dimostrazione utilizza il pullback di forme e per definire H^* serve che l'omotopia $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ sia differenziabile. Ci sono due modi per risolvere questo problema: uno è rafforzare l'ipotesi richiedendo che U sia *differenziabilmente contraibile*, e cioè che l'omotopia H sia una mappa differenziabile. In questo modo si ottiene un teorema più debole.

L'altro è dimostrare il seguente

Lemma 6.17. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Se U è contraibile come spazio topologico, allora è differenziabilmente contraibile.*

Questo Lemma è conseguenza immediata del famoso

Teorema 6.18 (Teorema di approssimazione di Whitney¹). *Siano M e N varietà differenziabili e sia $f : M \rightarrow N$ una funzione continua. Allora f è omotopa ad una funzione differenziabile $\tilde{f} : M \rightarrow N$. Se f è differenziabile su un sottoinsieme chiuso $A \subseteq M$, allora l'omotopia può essere presa relativa ad A .*

¹vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Whitney/> per una biografia di Hassler Whitney

Per una dimostrazione del teorema (che è molto al di là del livello di questo corso), si può vedere John Lee, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Theorem 6.19.

Per ottenere il [Lemma 6.17](#), basta porre $M = U \times \mathbb{R}$, $N = U$ e $f = H$ l'omotopia fra l'identità di U e una funzione costante. In questo caso, sul sottoinsieme $A = U \times \{0\} \cup U \times \{1\}$ la funzione $f = H$ è già differenziabile, perché è l'identità oppure una costante e quindi otteniamo una funzione differenziabile $\tilde{H} : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ (omotopa ad H) che coincide con H su A ed è quindi una omotopia differenziabile fra l'identità e la funzione costante.

Il lemma verrà usato solo nella parte finale della dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 6.16. Siano (x_1, \dots, x_n) le coordinate su U e t la coordinata su \mathbb{R} . Raccogliendo i termini che hanno un differenziale dt , ogni k -forma $\bar{\omega} \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$ si può scrivere in modo unico come

$$\bar{\omega} = \sum a_I dx_I + dt \wedge \sum b_J dx_J = \omega_1 + dt \wedge \eta$$

dove ω_1 è una k -forma e η una $(k-1)$ -forma. Osserviamo che i coefficienti a_I , b_J sono funzioni delle variabili (x_1, \dots, x_n, t) .

Definiamo una funzione $I : \Omega^k(U \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ come segue: se

$$\bar{\omega} = \sum a_I dx_I + dt \wedge \sum b_J dx_J$$

allora

$$I\bar{\omega} = \sum_J \left(\int_0^1 b_J(x_1, \dots, x_n, t) dt \right) dx_J$$

Il nome I si riferisce al fatto che la mappa è “integrazione rispetto alla variabile t ”. Poiché la decomposizione è unica, è chiaro dalle proprietà dell'integrale che I è una funzione lineare.

Consideriamo ora la famiglia di funzioni differenziabili $i_t : U \rightarrow U \times \mathbb{R}$ date da $i_t(x) = (x, t)$. La funzione i_t è semplicemente l'inclusione di U nel prodotto a livello t . Le funzioni i_t inducono i pullback $i_t^* : \Omega^k(U \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(U)$ fra forme differenziali. Il punto principale della dimostrazione è la formula

$$(23) \quad i_1^* \bar{\omega} - i_0^* \bar{\omega} = d(I\bar{\omega}) + I(d\bar{\omega})$$

valida per ogni k -forma $\bar{\omega} \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$.

Per la linearità di I e la decomposizione $\bar{\omega} = \omega_1 + dt \wedge \eta$, basta dimostrare la [formula \(23\)](#) per le forme del tipo

$$a) \quad \bar{\omega} = f(x_1, \dots, x_n, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$b) \quad \bar{\omega} = f(x_1, \dots, x_n, t) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

Nel caso a), si ha che

$$d\bar{\omega} = \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \text{termini senza } dt$$

e quindi

$$\begin{aligned} I(d\bar{\omega}) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= [f(x_1, \dots, x_n, 1) - f(x_1, \dots, x_n, 0)] dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= i_1^* \bar{\omega} - i_0^* \bar{\omega} \end{aligned}$$

Poiché $I\bar{\omega} = 0$ in quanto non ci sono termini con dt , anche $d(I\bar{\omega}) = 0$ e la formula è dimostrata.

Nel caso b), $i_1^* \bar{\omega} = i_0^* \bar{\omega} = 0$, in quanto le mappe i_0^* e i_1^* operano mediante la sostituzione $t = 0$ e $t = 1$ rispettivamente. In entrambi i casi, t è costante e quindi dt diventa 0. Calcolando, si ha

$$d\bar{\omega} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

e quindi

$$I(d\bar{\omega}) = - \sum_{\alpha=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} dt \right) dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

(il segno meno viene dallo scambio di ordine fra dx_α e dt prima di integrare). D'altra parte

$$\begin{aligned} d(I\bar{\omega}) &= d \left\{ \left(\int_0^1 f(x_1, \dots, x_n, t) dt \right) \right\} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} dt \right) dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

derivando sotto il segno di integrale e notando che il coefficiente di $I\bar{\omega}$ non dipende da t e quindi il differenziale non contiene termini con dt . Dunque $d(I\bar{\omega}) + I(d\bar{\omega}) = 0$ e la formula vale anche in questo caso.

Notiamo che fino ad ora non abbiamo usato l'ipotesi che U sia contraibile e quindi la [formula \(23\)](#) vale per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sia ora U un aperto contraibile e $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ un'omotopia fra l'identità di U e una funzione costante, che esiste per l'ipotesi di contraibilità. Osserviamo che

$$H \circ i_1 = \text{id}_U = \text{identità di } U, \quad H \circ i_0 = x_0 = \text{funzione costante}$$

Per il [Lemma 6.17](#) possiamo supporre che H sia differenziabile e quindi c'è una mappa indotta fra forme differenziali

$$H^* : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(U \times \mathbb{R})$$

Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k -forma e poniamo

$$\bar{\omega} = H^*\omega \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$$

Poiché il pullback commuta con la composizione ([Proposizione 2.17](#))

$$i_1^*(\bar{\omega}) = i_1^*(H^*\omega) = (H \circ i_1)^*(\omega) = \text{id}_U^*\omega = \omega$$

$$i_0^*(\bar{\omega}) = i_0^*(H^*\omega) = (H \circ i_0)^*(\omega) = \text{cost}^*\omega = 0$$

perché il pullback rispetto a una mappa costante annulla tutti i dx_i . La [formula \(23\)](#) diventa

$$\omega = d(I\bar{\omega}) + I(d\bar{\omega})$$

Se ora supponiamo che ω sia chiusa, abbiamo

$$d\bar{\omega} = d(H^*\omega) = H^*(d\omega) = H^*(0) = 0$$

per la commutatività del pullback con la derivazione esterna ([Proposizione 2.24](#)) e quindi $I(d\bar{\omega}) = I(0) = 0$. Otteniamo perciò che per una forma chiusa ω si ha

$$\omega = d(I\bar{\omega})$$

e quindi ω è esatta. Osserviamo che la dimostrazione dà anche una formula per una primitiva di ω , calcolabile esplicitamente se si conosce l'omotopia H in modo esplicito e si sanno calcolare gli integrali nella formula di I . \square

Esercizio 6.19. Sia U stellato rispetto all'origine. Possiamo allora usare

$$H(x_1, \dots, x_n, t) = (tx_1, \dots, tx_n)$$

come omotopia (vedi [Esempio 6.15](#)), osservando che H è differenziabile. Se ω è una 1-forma su U , determinare $I(\bar{\omega})$ e osservare che è la stessa primitiva usata nella dimostrazione della [Proposizione 6.2](#).

Anche in questo caso semplice, l'espressione esplicita di $I(\bar{\omega})$ per una k -forma è piuttosto complicata e questo è il motivo per cui abbiamo preferito una dimostrazione più astratta ma con meno calcoli.

7. Esercizi

Esercizio 7.1. Per ognuna delle seguenti 1-forme differenziali

$$\omega_1 = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{su } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$\omega_2 = \left[\log(x + y) + \frac{x}{x + y} \right] dx + \frac{x}{x + y} dy \quad \text{su } \{x + y > 0\}$$

dire se si tratta di una 1-forma differenziale esatta e, in caso affermativo, determinare una funzione $f_i(x, y)$ tale che $\omega_i = df_i$.

Soluzione. Calcoliamo la derivata esterna per vedere se le forme sono chiuse (condizione necessaria).

$$d\omega_1 = -2 \frac{y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} dy \wedge dx - 2 \frac{y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} dx \wedge dy = 0$$

La forma è chiusa, ma il dominio non è semplicemente connesso e quindi non sappiamo ancora se è esatta o no. Se $\omega_1 = df$, allora f è tale che

$$f_x = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e } f_y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Integrando si ottiene

$$\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{x}{x^2 + y^2} + c(y)$$

$$\int \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{x}{x^2 + y^2} + d(x)$$

possiamo scegliere $c(y) = d(x) = 0$ e dunque ω_1 è esatta e

$$\omega_1 = d\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per ω_2 :

$$d\omega_2 = \frac{y}{(x+y)^2} dy \wedge dx + \frac{y}{(x+y)^2} dx \wedge dy = 0$$

La forma è chiusa e in questo caso il dominio è semplicemente connesso e quindi la forma è esatta. Se $\omega_2 = df$, allora f è tale che

$$f_x = \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y} \right] \text{ e } f_y = \frac{x}{x+y}$$

Integrando si ottiene

$$\int \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y} \right] dx = \log(x+y)x - y + c(y)$$

e derivando rispetto a y si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} (\log(x+y)x - y + c(y)) = \frac{x}{x+y} - 1 + c'(y)$$

e imponendo

$$\frac{x}{x+y} - 1 + c'(y) = \frac{x}{x+y}$$

si ottiene $c'(y) = 1$ e cioè $c(y) = y$. Dunque una primitiva per ω_2 è

$$f = \log(x+y)x$$

Esercizio 7.2. Dato il campo vettoriale su \mathbb{R}^3

$$X(x, y, z) = \left(\sin(e^{z+x}), e^{y^2+z^2}, \cos(x+z) \right)$$

- (1) se ne calcoli il rotore $\text{rot}(X)$. La 2-forma differenziale $\text{rot}(X) \lrcorner dV$ è esatta?
- (2) se ne calcoli la divergenza $\text{div}(X)$. La 3-forma differenziale $\text{div}(X) dV$ è esatta?

Soluzione.

- (1) Ricordiamo la definizione di rotore:

$$\text{rot } X = *(dX^{\flat})$$

Si ha

$$X^{\flat} = \sin(e^{z+x}) dx + e^{y^2+z^2} dy + \cos(x+z) dz$$

e allora

$$\begin{aligned} dX^{\flat} &= \cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x} dz \wedge dx + 2ze^{y^2+z^2} dz \wedge dy - \sin(x+z) dx \wedge dz \\ &= -(\cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x} + \sin(x+z)) dx \wedge dz - 2ze^{y^2+z^2} dy \wedge dz \end{aligned}$$

Per definizione di $*$ di Hodge

$$*(dx \wedge dz) = -dy \quad *(dy \wedge dz) = dx$$

e quindi si ha

$$\text{rot } X = -2ze^{y^2+z^2} dx + (\cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x} + \sin(x+z)) dy$$

Poiché siamo su \mathbb{R}^3 , $\text{rot } X$ è una 1-forma e la seconda parte della domanda rende chiaro che vogliamo considerare $\text{rot } X$ come un campo vettoriale e cioè scriviamo

$$Y = (\text{rot } X)^{\sharp} = -2ze^{y^2+z^2} \mathbf{e}_1 + (\cos(e^{z+x}) \cdot e^{z+x} + \sin(x+z)) \mathbf{e}_2$$

Invece di fare i calcoli per determinare $Y \lrcorner dV$, osserviamo adesso che nell'[Esercizio 5.14](#) abbiamo visto varie formule che legano i diversi operatori differenziali, in particolare la formula (4) dice che, per un campo vettoriale Y vale

$$Y \lrcorner dV = *Y^{\flat}$$

e dunque

$$\begin{aligned} Y \lrcorner dV &= * \left(\left[(\text{rot } X)^{\sharp} \right]^{\flat} \right) \\ &= * \text{rot } X && \text{perché } \flat \text{ e } \sharp \text{ sono inversi l'uno dell'altro} \\ &= * (*dX^{\flat}) && \text{per la definizione di rotore} \\ &= dX^{\flat} && \text{perché } ** = (-1)^{k(n-k)} = 1 \end{aligned}$$

e quindi è esatta. Questo è un utile esercizio nel vedere come il formalismo con lo $*$ di Hodge aiuta a risolvere i problemi senza fare i calcoli.

(2) Ricordiamo la definizione di divergenza: per un campo vettoriale $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la divergenza è la funzione a valori reali

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}(dX)_p$$

Usando le coordinate standard di \mathbb{R}^n date dalla base canonica, si ha

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)$$

e dunque

$$\operatorname{div} X = \cos(e^{x+z}) \cdot e^{x+z} + 2ye^{y^2+z^2} - \sin(x+z)$$

Anche in questo caso, usando la formula vista nell'[Esercizio 5.13](#) si ha

$$(\operatorname{div} X) dV = d(*X^b)$$

e quindi la forma $(\operatorname{div} X) dV$ è esatta.

Il teorema di Stokes

I tre classici teoremi di Green, della divergenza (o teorema di Gauss) e del rotore (o teorema di Stokes) costituiscono la base di molte applicazioni del calcolo differenziale in più variabili alla Fisica e hanno importanti conseguenze anche in Matematica.

Il teorema di Stokes appare per la prima volta in una lettera datata 2 luglio 1850, scritta da William Thomson¹ (Lord Kelvin) a George Stokes², professore a Cambridge.

Stokes propose questo enunciato come uno dei problemi nell'edizione del 1854 dello Smith's Prize, una gara di matematica per gli studenti di Cambridge, e da un certo punto in poi prese a portare il suo nome. Nell'arco di alcuni anni vennero pubblicate tre diverse dimostrazioni, una da Thomson, un'altra da Thomson-Tait e una terza da Maxwell³ che, studente di Cambridge, vinse lo Smith's Prize nel 1854. Non si sa se Maxwell risolse il problema durante la gara oppure trovò la dimostrazione in seguito.

Una storia completa di questi teoremi, da enunciati ancora precedenti a quelli di Green, Gauss e Stokes che compaiono già in lavori di Lagrange e Laplace alla forma finale che vedremo in questo capitolo, dovuta a Élie Cartan⁴, si trova nell'articolo di Victor J. Katz, *The History of Stokes' Theorem*, in "Mathematics Magazine", Vol. 52, No. 3 (May, 1979),

¹vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thomson/> per una biografia di William Thomson (Lord Kelvin)

²vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stokes/> per una biografia di George Gabriel Stokes

³vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maxwell/> per una biografia di James Clerk Maxwell

⁴vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cartan/> per una biografia di Élie Cartan

pp. 146-156. L'articolo è disponibile per intero sulla piattaforma Jstor e vi si accede tramite il servizio di Ateneo BIBLIOPASS, utilizzando le vostre credenziali SCU: https://www-jstor-org.bibliopass.unito.it/stable/2690275?seq=1#metadata_info_tab_contents

I teoremi classici riguardano in vario modo l'uguaglianza di certi integrali di opportune espressioni su domini di dimensione 1 (integrali di linea), di dimensione 2 (integrali di superficie) e dimensione 3 (integrali di volume) e sono apparentemente indipendenti l'uno dall'altro.

Le dimostrazioni classiche sono piuttosto complicate, ma i teoremi sono immediate conseguenze di un teorema molto più generale, che vale in dimensione arbitraria e che oggi viene chiamato semplicemente Teorema di Stokes. I casi di dimensione bassa sono esattamente i teoremi classici.

Si potrebbe pensare che la difficoltà della dimostrazione del teorema generale sia perlomeno uguale (se non superiore) alla difficoltà delle dimostrazioni nei casi di dimensione bassa. In realtà la dimostrazione dell'enunciato generale è semplice e consiste nel calcolo diretto dei due integrali presenti nell'enunciato.

Se la dimostrazione del teorema è facile, la comprensione dell'enunciato è piuttosto difficile e richiede la comprensione preliminare di una serie di definizioni astratte e di natura algebrica, piuttosto che analitica. Per definire un integrale occorre specificare il *dominio di integrazione*, l'*integrand* e poi qual è il numero risultato dell'*integrazione*.

Abbiamo già svolto parte di questo lavoro con la teoria delle forme differenziali, che sono gli *integrandi* che compaiono nell'enunciato. In questo capitolo lo concludiamo, definendo nel primo paragrafo i domini di integrazione e nel secondo il significato dell'operazione di integrazione. La dimostrazione del teorema di Stokes, come detto, sarà poi solo un calcolo diretto che svolgiamo nel terzo paragrafo. Vedremo anche degli esempi espliciti di calcolo di integrali usando il teorema di Stokes.

Finalmente, nel quarto paragrafo enunceremo e dimostreremo i teoremi classici del calcolo differenziale di più variabili già citati.

Per maggiori dettagli e ulteriori approfondimenti, il testo di riferimento per gran parte di questo capitolo è il libro di Michael Spivak *Calculus on Manifolds*, seconda parte del Capitolo 4 (la prima parte sviluppa la teoria delle forme differenziali).

Concluderemo il capitolo con due applicazioni del teorema di Stokes. In primo luogo, dimostreremo il teorema di Gauss-Bonnet, che lega la curvatura totale di una superficie alla sua caratteristica di Eulero. Questo teorema è un tipico esempio di teoria globale delle superfici, analogo ai teoremi di Fenchel e Milnor che abbiamo visto nel [capitolo 2](#). Per finire, vedremo

un semplice criterio che ci permette di dimostrare che certe forme chiuse non sono esatte, concludendo il discorso iniziato con il Lemma di Poincaré e dando una dimostrazione del fatto che la sfera, pur semplicemente connessa, non è contraibile, fatto che non si riesce a dimostrare usando solo la teoria del gruppo fondamentale.

1. Catene singolari

Sia $[0, 1]$ l'intervallo chiuso e limitato standard in \mathbb{R} . Con la notazione $[0, 1]^k$ indichiamo il prodotto cartesiano dell'intervallo $[0, 1]$ con se stesso k -volte e cioè un cubo k -dimensionale di lato 1. Possiamo pensare $[0, 1]^k \subseteq \mathbb{R}^k$ come l'insieme

$$[0, 1]^k = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \right\}$$

Definizione 1.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto fissato. Un k -cubo singolare in U è una funzione continua $c : [0, 1]^k \rightarrow U$.

Per $k = 0$ poniamo $[0, 1]^0 = \{0\}$ un solo punto. Quindi uno 0-cubo singolare è una funzione $f : \{0\} \rightarrow U$ e cioè semplicemente un punto di U . Una curva è un esempio di 1-cubo singolare, così come una superficie parametrizzata è un esempio di 2-cubo singolare.

Esempio 1.2. Il disco in \mathbb{R}^2 . Sia

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

il disco di centro l'origine e raggio R . La funzione $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$c(\rho, \theta) = (\rho R \cos(2\pi\theta), \rho R \sin(2\pi\theta))$$

ha come immagine il disco D_R , che quindi è un 2-cubo singolare.

Osserviamo che la funzione c non è iniettiva e in particolare tutto il segmento $\rho = 0$ viene mandato in un punto (il centro). Usando le coordinate polari in \mathbb{R}^n si ottiene in modo analogo il fatto che la palla chiusa di raggio R

$$D_R^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$$

è un n -cubo singolare.

Esempio 1.3. Ancora il disco in \mathbb{R}^2 . Possiamo anche immaginare il disco come la retrazione di un quadrato. Per scrivere questa retrazione con precisione, consideriamo $c_1 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c_1(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$$

Questa funzione porta il quadrato $[0, 1]^2$ nel quadrato $[-1, 1]^2$ e cioè il quadrato centrato nell'origine e di lato 2. Adesso retraiamo questo secondo quadrato sul disco di centro l'origine e raggio 1 con la funzione

$c_2 : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c_2(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Questa funzione è l'identità sul disco e retrae i punti fuori dal disco sulla circonferenza bordo. Allora $c_2 \circ c_1 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un 2-cubo singolare, diverso dal precedente, che ha ancora immagine il disco di raggio 1 in \mathbb{R}^2 . Non è difficile modificare leggermente le funzioni precedenti per avere come immagine il disco di raggio R . Per esercizio, scrivere esplicitamente le funzioni necessarie. Sempre per esercizio, disegnare le due funzioni scritte sopra.

Osservazione. Il termine *k-cubo* si riferisce ovviamente al fatto che il dominio è effettivamente un cubo k -dimensionale. La parola *singolare* mette in rilievo il fatto che la funzione c è solo continua e non c'è nessuna richiesta di differenziabilità e dunque l'immagine potrebbe avere singolarità. Inoltre, non è richiesto nemmeno che sia iniettiva. La funzione c potrebbe essere costante, ed è importante distinguere la funzione dalla sua immagine. I due esempi precedenti hanno la stessa immagine, ma sono 2-cubi *diversi*.

Notiamo che può succedere anche il contrario: negli esempi precedenti, il dominio è un quadrato e ha "angoli" mentre l'immagine è un cerchio e quindi è "liscio".

Esempio 1.4. *Il cubo standard.* Un esempio importante di n -cubo singolare in \mathbb{R}^n è l' n -cubo *standard*, dato da $I^n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $I^n(x) = x$. L'immagine dell' n -cubo standard è proprio il cubo dentro \mathbb{R}^n immerso con un vertice nell'origine. Questo cubo sarà essenziale nel seguito e per questo ha un nome proprio e un simbolo, anche se la funzione che lo definisce non è nient'altro che l'identità.

Una delle proprietà fondamentali degli integrali è l'additività sul dominio: se $a < b < c$ allora, per ogni funzione (continua) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Per generalizzare questa nozione al caso n -dimensionale, procediamo per via algebrica.

Definizione 1.5. Una *k-catena singolare* è una combinazione lineare *formale* a coefficienti interi di k -cubi singolari.

Per esempio, se c_1, c_2, c_3 sono k -cubi singolari, e cioè funzioni da $[0, 1]^k$ in U , l'espressione

$$c = 2c_1 - 5c_2 + c_3$$

è una k -catena singolare. L'insieme di tutte queste espressioni forma un gruppo abeliano, dove l'elemento neutro è la catena che ha tutti i coefficienti nulli e l'opposto di una catena è la catena che ha gli stessi cubi presi con coefficienti opposti. Per adesso non diamo significato geometrico a queste espressioni.

ATTENZIONE. È importante osservare che la somma che compare in una catena è un'operazione formale. Anche se i k -cubi c_1, \dots, c_m sono funzioni, una catena non è una funzione e in particolare non è la somma delle funzioni. Una catena singolare è simile ad una *espressione letterale* e obbedisce alle stesse regole di somma e moltiplicazione per scalari imparate alle superiori per le espressioni letterali. Per esempio:

$$(2a + b + c) - (3a - b + c) = -a + 2b$$

senza assegnare nessun significato ai simboli a, b, c .

Il motivo per introdurre le catene è per poter parlare di *bordo*. Ci aspettiamo che il bordo del cubo standard $I^1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ sia costituito da due punti e cioè da due 0-cubi singolari e in particolare non è un cubo singolare. Inoltre, vogliamo orientare i domini di integrazione e vogliamo che i bordi siano orientati in modo consistente. Per esempio, è sensato definire

$$\partial I^1 = \{1\} - \{0\}$$

dove con $\{a\}$ indichiamo lo 0-cubo singolare dato dalla funzione $c_a : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita come $c_a(0) = a$ (cioè semplicemente il punto $a \in \mathbb{R}^n$).

Allo stesso modo vogliamo definire ∂I^2 come somma con segno dei quattro lati del bordo, ∂I^3 la somma delle sei facce del cubo e così via. Per dare la definizione rigorosa, introduciamo delle notazioni.

Sia I^n l' n -cubo standard. Per ogni $0 \leq i \leq n$ definiamo due $(n-1)$ -cubi singolari come segue. Per $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}$ poniamo

$$I_{(i,0)}^n(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$I_{(i,1)}^n(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$$

Quindi $I_{(i,\alpha)}^n$ è una funzione da $[0, 1]^{n-1}$ in \mathbb{R}^n e cioè è un $(n-1)$ -cubo singolare (non standard). $I_{(i,0)}^n$ è la faccia i -esima a livello 0, $I_{(i,1)}^n$ è la faccia i -esima a livello 1. Per esempio, I^2 è un quadrato e $I_{(1,0)}^2$ e $I_{(1,1)}^2$ sono i lati verticali perché abbiamo fissato la *prima* coordinata (rispettivamente a sinistra e a destra), mentre $I_{(2,0)}^2$ e $I_{(2,1)}^2$ sono i lati orizzontali perché abbiamo fissato la *seconda* coordinata (rispettivamente in basso e in alto). In generale, le due facce i -esime sono date dal fissare la coordinata i -esima al valore 0 oppure 1. In questo modo otteniamo tutte le $2n$ facce del cubo n -dimensionale.

Definizione 1.6. Il *bordo* di un n -cubo standard I^n è la $(n-1)$ -catena singolare somma di tutte le facce con il segno dato dalla formula

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^n$$

Per esempio

$$\partial I^2 = -I_{(1,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 + I_{(2,0)}^2 - I_{(2,1)}^2 = I_{(2,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 - I_{(2,1)}^2 - I_{(1,0)}^2$$

dove dalla seconda espressione si vede che è proprio il bordo del quadrato percorso in verso antiorario. Come voluto, è anche

$$\partial I^1 = -I_{(1,0)}^1 + I_{(1,1)}^1 = \{1\} - \{0\}$$

e cioè il bordo di un intervallo è il punto finale *meno* il punto iniziale.

Osserviamo che il bordo di un cubo standard è una catena formata da cubi non standard e cioè da cubi singolari e quindi i cubi standard non bastano per definire il bordo e occorre introdurre il concetto generale di “cubo singolare”.

Per definire il bordo di un cubo singolare (qualunque) procediamo come prima: definiamo prima le facce e poi la somma con segno. Sia $c : [0, 1]^n \rightarrow U$ un cubo singolare. Poniamo

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^n$$

Come prima, $c_{(i,\alpha)} : [0, 1]^{n-1} \rightarrow U$ è un $(n-1)$ -cubo singolare. I cubi $c_{(i,\alpha)}$ sono le facce del cubo c . Poiché c è una funzione di dominio $[0, 1]^k$, le facce $c_{(i,\alpha)}$ sono la restrizione di c alle facce del cubo standard.

Definizione 1.7. Sia $c : [0, 1]^n \rightarrow U$ un cubo singolare. Il *bordo* di c è la $(n-1)$ -catena

$$\partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

Per una catena arbitraria, definiamo il bordo per linearità:

$$\partial \left(\sum_i a_i c_i \right) = \sum_i a_i \partial(c_i)$$

Osservazione. Ricordando la definizione di pullback di funzioni, per le facce di un cubo c si può scrivere

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I_{(i,\alpha)}^n = \left(I_{(i,\alpha)}^n \right)^* c$$

e cioè la faccia di un cubo è il pullback della funzione c lungo la faccia $I_{(i,\alpha)}^n$ del cubo standard. Useremo questa osservazione più avanti.

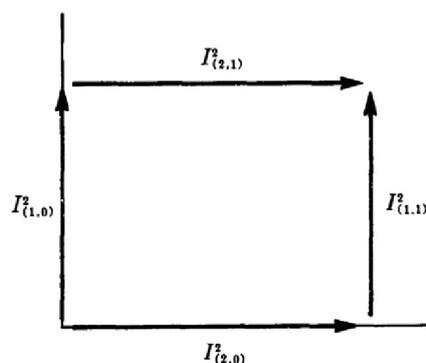
Non avremo bisogno di altre proprietà delle catene oltre a quelle dette finora, però è doveroso almeno citare la proprietà caratteristica del bordo:

Proposizione 1.8. *Sia c una catena singolare. Allora $\partial^2 c = \partial(\partial c) = 0$.*

Dimostrazione. Esercizio. È solo questione di seguire tutte le definizioni e notare che nella sommatoria finale tutti i termini compaiono due volte con segno opposto. Potete vedere i calcoli fatti in Spivak, Theorem 4-12, pag. 99. \square

Esempio 1.9. Riprendendo il caso del 2-cubo standard I^2 , abbiamo calcolato che

$$\partial I^2 = I_{(2,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 - I_{(2,1)}^2 - I_{(1,0)}^2$$



Calcoliamo adesso $\partial(\partial I^2)$. Per linearità

$$\partial(\partial I^2) = \partial I_{(2,0)}^2 + \partial I_{(1,1)}^2 - \partial I_{(2,1)}^2 - \partial I_{(1,0)}^2$$

La funzione $I_{(2,0)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da

$$I_{(2,0)}^2(x_1) = (x_1, 0)$$

perché l'indice $(2, 0)$ significa fissare la *seconda* coordinata a 0. Per definizione

$$\partial I_{(2,0)}^2 = \left(I_{(2,0)}^2 \right)_{(1,1)} - \left(I_{(2,0)}^2 \right)_{(1,0)} = \{(1, 0)\} - \{(0, 0)\}$$

che, come è ovvio, sono i punti finale e iniziale della base inferiore del quadrato. Calcoliamo ancora un bordo: la funzione $I_{(1,1)}^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da

$$I_{(1,1)}^2(x_1) = (1, x_1)$$

perché l'indice $(1, 1)$ significa fissare la *prima* coordinata a 1. Per definizione

$$\partial I_{(1,1)}^2 = \left(I_{(1,1)}^2 \right)_{(1,1)} - \left(I_{(1,1)}^2 \right)_{(1,0)} = \{(1, 1)\} - \{(1, 0)\}$$

che sono i punti finale e iniziale del lato verticale di destra del quadrato. Calcolando allo stesso modo il bordo dei due lati rimanenti, e facendo attenzione ai segni, si vede che $\partial(\partial I^2)$ è la somma di otto termini: i quattro vertici del quadrato presi una volta con segno positivo e una volta con il segno negativo. La somma è dunque 0 perché tutti i termini si cancellano a due a due.

La dimostrazione generale è simile. Il punto è calcolare, per due indici $i \leq j$ l'espressione per la faccia $\left(I_{(i,\alpha)}^n\right)_{(j,\beta)}$ e poi sommare.

Il risultato che si ottiene è (provare a scrivere i dettagli per esercizio e poi leggere Spivak per controllare):

$$\left(I_{(i,\alpha)}^n\right)_{(j,\beta)} = \left(I_{(j+1,\beta)}^n\right)_{(i,\alpha)} \quad \text{per ogni } 0 \leq i \leq j \leq n$$

Nella formula del bordo questi termini compaiono con segni opposti e dunque si cancellano.

Osservazione. È impossibile non notare la somiglianza con l'analogia proprietà della derivazione esterna ($d^2 = 0$). Il teorema di Stokes metterà bene in evidenza che questo non è un caso, ma ha un significato profondo.

2. Integrazione

Vogliamo ora definire l'integrale di una k -forma su una k -catena. Per fare ciò dobbiamo usare catene singolari *differenziabili*, cioè catene del tipo $c = \sum_i a_i c_i$ dove le funzioni $c_i : [0, 1]^k \rightarrow U$ sono differenziabili. Poiché il dominio non è un aperto, ricordiamo che differenziabile significa che esiste un intorno aperto V di $[0, 1]^k$ in \mathbb{R}^k e un'estensione differenziabile della funzione c a V . Questa condizione è la stessa che a volte si trova indicata con il nome di "regolare fino al bordo", perché in effetti le restrizioni delle funzioni c_i al bordo del cubo sono ancora funzioni differenziabili.

D'ora in poi dunque con il termine k -catena singolare intenderemo una k -catena differenziabile. Per brevità non useremo più il termine "singolare", però ricordiamo che una catena è una funzione e che, anche se la funzione è differenziabile, l'immagine può avere singolarità perché non facciamo ipotesi sull'iniettività della funzione o del suo differenziale.

Sia ω una k -forma su $[0, 1]^k$. In questo caso tutte le forme sono multiple della k -forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ e possiamo quindi scrivere

$$\omega = f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

per una unica funzione f . Poniamo allora, per definizione

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{[0,1]^k} f dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

dove l'integrale a secondo membro è l'usuale integrale di una funzione di n variabili. Osserviamo che è importante scrivere la forma ω con i differenziali in ordine crescente di indice, altrimenti la funzione f non è unicamente definita. Per esempio, se $\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_1$, allora $\omega = -x_1 dx_1 \wedge dx_2$ e quindi

$$\int_{[0,1]^2} \omega = \int_{[0,1]^2} -x_1 dx_1 dx_2$$

Osservazione. I differenziali nell'integrale a destra sono "commutativi": se pensiamo all'integrale di una funzione di due variabili su un dominio piano, la definizione vista in Analisi sotto opportune ipotesi di integrabilità, tutte soddisfatte nel caso che ci interessa perché la funzione integranda è differenziabile e il dominio compatto, dà l'uguaglianza (Teorema di Fubini o di scambio dell'ordine di integrazione):

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_D f(x, y) dy dx$$

Invece i differenziali presenti in una forma sono *anticommutativi* e quindi dovrebbe essere

$$\int_D f(x, y) dx \wedge dy = - \int_D f(x, y) dy \wedge dx$$

Avendo già a disposizione la teoria dell'integrazione per funzioni di più variabili, vogliamo definire l'integrale di una forma differenziale sfruttando gli integrali già noti. Per ottenere l'anticommutatività, agiamo allora sull'integrando: per definizione l'integrale di una forma è uguale al corrispondente integrale della funzione coefficiente, *solo quando la forma ha i differenziali nell'ordine crescente*. Altrimenti, come nell'esempio fatto subito prima di questa osservazione, *prima* mettiamo i differenziali in ordine crescente (e in tal modo il segno davanti al coefficiente potrebbe cambiare) e *poi* scriviamo l'integrale.

Nel linguaggio usato in Analisi per gli integrali di funzioni di una variabile, quando l'integrando è una forma differenziale l'integrale è di *seconda specie*.

La definizione vista vale quando il dominio della k -forma ω è il cubo $[0, 1]^k \subseteq \mathbb{R}^k$. Per una k -forma ω definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (notiamo che il grado della forma non è necessariamente uguale alla dimensione dello spazio) e un k -cubo c (invece la dimensione del cubo è uguale al grado della forma), abbiamo la

Definizione 2.1. Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k -forma sull'aperto U e sia c un k -cubo in U . Allora si pone

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*(\omega)$$

Per una k -catena arbitraria estendiamo la definizione di integrale per linearità: se $c = \sum_i a_i c_i$ si ha

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega = \sum_i a_i \int_{[0,1]^k} c_i^* \omega$$

La definizione di integrale tramite il pullback è naturalmente la solita definizione mediante “sostituzione”. Nel caso $k = 1$ la forma ω è una 1-forma $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ e un 1-cubo è semplicemente una curva differenziabile (non necessariamente regolare). Come abbiamo già ossevato, in questo caso la [Definizione 2.1](#) di integrale è l’usuale definizione di *integrale di seconda specie* vista nei corsi di Analisi Matematica.

L’integrale di una forma è additivo rispetto al dominio *per definizione*. Inoltre, per $c = I^k$ il cubo standard e $\omega = f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ si ha

$$\int_{I^k} \omega = \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = \int_{[0,1]^k} f dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

in accordo con la definizione precedente. Notiamo che per $k = 0$ dobbiamo fare una convenzione speciale: una 0-forma ω è una funzione differenziabile e uno 0-cubo $c : \{0\} \rightarrow U$ dà un punto di U poniamo allora, per definizione

$$\int_c \omega = \omega(c(0))$$

il valore della funzione ω nel punto $c(0) \in U$.

Esercizio 2.2. Cosa capita quando si cambia la parametrizzazione? La definizione di integrale è fatta tramite parametrizzazioni e ci aspettiamo che il comportamento sia semplice. Vediamolo in dettaglio. Per linearità, basta analizzare la situazione sui cubi (e non sulle catene).

Sia $c : [0, 1]^k \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ un k -cubo e sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k -forma. Pensando al caso delle curve, un “cambiamento di parametrizzazione” è una funzione differenziabile $\varphi : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$ invertibile e con inversa differenziabile. In particolare, il differenziale di φ è sempre invertibile e quindi $\det J(\varphi) \neq 0$ su tutto il dominio $[0, 1]^k$, che è *connesso*. Dunque il determinante è sempre positivo oppure sempre negativo.

Sia $c \circ \varphi$ il cubo che si ottiene cambiando la parametrizzazione. Dimostrare che:

$$\int_c \omega = (\text{segno di } \varphi) \int_{c \circ \varphi} \omega$$

dove segno di $\varphi = +1$ se $\det J(\varphi) > 0$ e segno di $\varphi = -1$ se $\det J(\varphi) < 0$.

Suggerimento: ricordare che nella formula di cambiamento di variabile degli integrali c’è il *valore assoluto* del determinante Jacobiano, mentre quando si calcola il pullback di una forma, si usa il determinante Jacobiano (ricordare l’[Esercizio 6.3.6](#)).

3. Il teorema di Stokes

Vediamo in questo paragrafo l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Stokes. Dopo di ciò, vedremo degli esempi espliciti di catene, con i relativi bordi, e di integrazione usando il teorema di Stokes.

3.1. Il teorema. Le formule $d^2 = 0$ per la derivazione esterna e $\partial^2 = 0$ per l'operazione di bordo fanno supporre che ci sia una relazione fra la derivazione esterna di forme e l'operazione di bordo per le catene. Il teorema generale che esprime questa relazione è il famoso

Teorema 3.1 (Teorema di Stokes). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ una $(k-1)$ -forma e c una k -catena in U . Allora*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Osservazione. Per $n = 1$ e $k = 1$, un 1-cubo è un intervallo sulla retta e il teorema di Stokes è esattamente il teorema fondamentale del calcolo integrale (scrivere l'espressione esplicita per convincersene).

Per $n = 2$ e $k = 2$, la 2-catena c è un dominio nel piano e ∂c è il suo bordo. Allora il teorema di Stokes diventa il teorema di Gauss-Green.

La dimostrazione del teorema di Stokes non è difficile e consiste nel calcolo diretto dei due termini presenti nella formula.

Dimostrazione del teorema di Stokes. Cominciamo con il caso: $c = I^k$ e ω una $(k-1)$ -forma su $[0, 1]^k$. Allora

$$\omega = \sum_i f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k$$

dove il simbolo \widehat{dx}_i significa che il corrispondente dx_i è omissso. Basta dunque dimostrare la formula per ognuno dei termini nella sommatoria e cioè poniamo

$$\omega = f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k$$

(ATTENZIONE: abbiamo cambiato il significato di ω). Calcoliamo il termine a destra dell'uguale. Il bordo ∂I^k è una somma di $(k-1)$ -cubi (le facce di I^k) e per il termine di indice (j, α) si ha:

$$\begin{aligned} \int_{I_{(j,\alpha)}^k} f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k &= \int_{[0,1]^{k-1}} (I_{(j,\alpha)}^k)^*(f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \text{ perché } dx_j = 0 \\ & \text{in quanto } x_j \text{ è costante} \\ \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, \alpha, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k & \text{se } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

Ricordando la formula del bordo per I^k possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial I^k} \omega &= \int_{\partial I^k} f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k \\
 &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I_{(j,\alpha)}^k)^* (f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k) \\
 &= \boxed{(-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k} \\
 &\quad + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k
 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il termine a sinistra dell'uguale:

$$\begin{aligned}
 \int_{I^k} d\omega &= \int_{I^k} d(f_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k) \\
 &= \int_{I^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \widehat{dx}_i \dots \wedge dx_k \\
 &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_i \dots dx_k \\
 &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k \\
 &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left[f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) - f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) \right] dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k \\
 &= \boxed{(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k} \\
 &\quad + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_k
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema di Fubini per integrare prima rispetto a x_i e il teorema fondamentale del calcolo integrale per calcolare l'integrale più interno.

Poiché i due termini evidenziati sono uguali (attenzione ai segni!), il teorema è dimostrato per il cubo standard $c = I^k$. Se c è un cubo arbitrario, dalla definizione di integrale e di pullback di forme si ha

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^*(\omega)$$

e quindi, dalla commutatività tra pullback e derivazione esterna

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*(\omega) = \int_{\partial c} \omega$$

dove il terzo uguale è il caso appena dimostrato per il cubo standard. Infine, se $c = \sum_i a_i c_i$ è una catena arbitraria, per linearità

$$\int_c d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega$$

e questo conclude la dimostrazione del teorema di Stokes per una catena arbitraria. \square

3.2. Esempi di catene singolari. Vediamo alcuni esempi di scrittura come catena singolare per sottoinsiemi semplici in \mathbb{R}^n .

Esempio 3.2. Il disco in \mathbb{R}^2 . Abbiamo visto nella scorsa lezione l'esempio del disco in \mathbb{R}^2 . Riprendiamolo e calcoliamo anche il bordo. Un possibile cubo singolare che ha per immagine il disco è $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$c(\rho, \theta) = (\rho R \cos(2\pi\theta), \rho R \sin(2\pi\theta))$$

Calcoliamo il bordo:

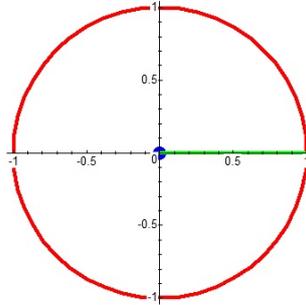
$$\partial c = -c_{(1,0)} + c_{(1,1)} + c_{(2,0)} - c_{(2,1)}$$

dove $c_{(i,\alpha)}$ è la restrizione di c alla faccia (i, α) di I^2 . Più semplicemente, per un quadrato, il bordo è formato dai quattro lati percorsi in verso antiorario. Dunque

$$\partial c = c_{|\theta=0} + c_{|\rho=1} - c_{|\theta=1} - c_{|\rho=0}$$

e analizzando i quattro termini si ha (osservare i colori nel disegno)

- $c_{|\theta=0}$ è il raggio orizzontale percorso dal centro al punto $P = (R, 0)$, in verde
- $c_{|\rho=1}$ è la circonferenza di raggio R percorsa in verso antiorario a partire dal punto $P = (R, 0)$, in rosso
- $c_{|\theta=1}$ è il raggio orizzontale percorso dal centro al punto $P = (R, 0)$, in verde
- $c_{|\rho=0}$ è il cammino costante nel centro, in blu



Dunque $c|_{\theta=0} = c|_{\theta=1}$ e quindi i due termini si semplificano. Quindi, per una 1-forma ω sul disco, il teorema di Stokes dà

$$\int_{D_R} d\omega = \int_{c|_{\rho=1}} \omega - \int_{c|_{\rho=0}} \omega$$

D'altra parte, il pullback di una qualunque forma differenziale su un cammino costante è nullo, perché il termine differenziale dx_I è zero, e quindi è nullo anche l'integrale. Abbiamo allora

$$\int_{D_R} d\omega = \int_{C_R} \omega$$

dove C_R è la circonferenza di raggio R .

Esempio 3.3. Ancora il disco. Il teorema di Stokes afferma che l'integrale su una regione è uguale all'integrale sul bordo (di un'altra forma differenziale). Però nel caso precedente, il "bordo" del cubo singolare che dà il disco non è solo la circonferenza, come ci aspettiamo, ma ha un'altra componente data da un punto (l'origine). Dal punto di vista dell'integrazione, questa componente aggiuntiva non dà contributo perché è della "dimensione sbagliata": dobbiamo integrare una 1-forma su una 0-catena e questi integrali sono automaticamente nulli. Infatti il pullback di forme preserva il grado e quindi il pullback di una 1-forma su uno 0-cubo è ancora una 1-forma che è necessariamente nulla perché il suo grado è maggiore della dimensione dello spazio ambiente (questo è l'[Esercizio 6.3.5](#)).

Però la domanda geometrica resta: si può scrivere il disco come catena in modo che il bordo sia esattamente la circonferenza? Certamente sì, e il modo più semplice è retrarre un quadrato sul cerchio e il bordo è la somma di 4 archi di circonferenza.

Abbiamo già visto questa catena nell'[Esempio 1.3](#) e adesso calcoliamo il bordo: la catena (in realtà è formata da un solo cubo) si ottiene componendo

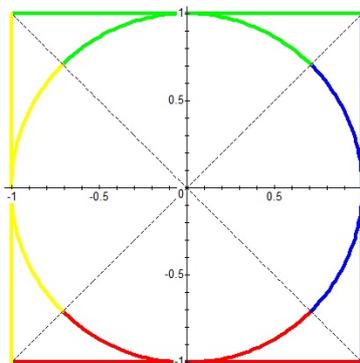
le due funzioni

$$c_1(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$$

che porta il quadrato $[0, 1]^2$ nel quadrato $[-1, 1]^2$ e cioè il quadrato centrato nell'origine e di lato 2 e la retrazione

$$c_2(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

che porta questo secondo quadrato sul disco di centro l'origine e raggio 1. Si può scrivere esplicitamente la composizione (fatelo per esercizio), però è facile vedere geometricamente il bordo di questo cubo nel disegno seguente:



I lati del quadrato (il bordo del 2-cubo) mappano sui corrispondenti archi di circonferenza e quindi il bordo del cubo singolare è la catena somma dei quattro archi di circonferenza presi con l'orientazione corretta. In effetti, scrivendo in dettaglio, si ottiene che gli archi “orizzontali” (rosso e verde) sono orientati da sinistra a destra mentre quelli verticali (blu e giallo) sono orientati dal basso in alto. La regola dei segni presente nella formula del bordo orienta tutti gli archi in verso antiorario

$$\partial c = +\text{rosso} + \text{blu} - \text{verde} - \text{giallo}$$

formando la circonferenza completa.

Esempio 3.4. Il disco, questa volta \mathcal{C}^∞ . Il 2-cubo scritto nel paragrafo precedente è solo continuo e non va bene per integrare. Vogliamo adesso scrivere il disco come un cubo \mathcal{C}^∞ che abbia come bordo la circonferenza.

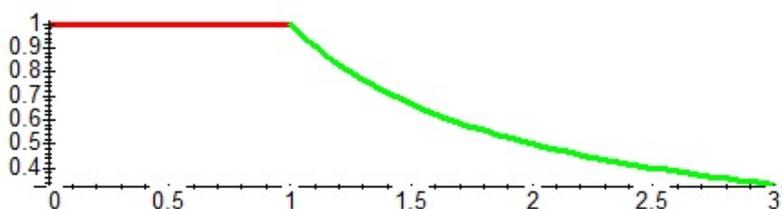
L'idea è di prendere la funzione precedente e “renderla liscia”. Osserviamo che la funzione è radiale e cioè dipende solo dalla distanza dall'origine. Ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ possiamo scrivere la funzione precedente come

$$c_2(x, y) = \varphi(\rho) \cdot (x, y)$$

da cui si vede che per ottenere che c sia differenziabile, basta che lo sia φ . La funzione φ che dà la retrazione precedente è

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \rho \leq 1 \\ 1/\rho & \text{se } \rho > 1 \end{cases}$$

che ha grafico



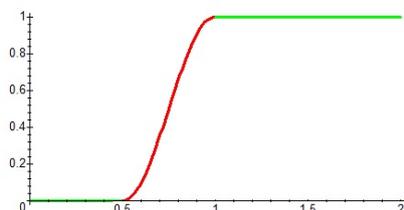
ed è ovviamente non differenziabile per $\rho = 1$. Osserviamo che non si può modificare la funzione quando $\rho \geq 1$, perché dobbiamo retrarre esattamente sulla circonferenza di raggio 1 e quindi dobbiamo dividere per la distanza del punto dall'origine. Dobbiamo quindi intervenire sulla parte "rossa". Scriviamo la funzione cercata come

$$\varphi(\rho) = \beta(\rho) \cdot \frac{1}{\rho}$$

e vediamo che proprietà deve avere β . Deve essere:

- (1) $\beta(\rho) = 1$, per ogni $\rho \geq 1$, così la parte "verde" resta invariata
- (2) $0 \leq \beta(\rho) \leq 1$, per ogni $\rho \in \mathbb{R}$, così i punti all'interno del disco restano all'interno
- (3) $\beta(\rho) = 0$, per ogni $0 \leq \rho \leq 1/2$, così non ci sono problemi dividendo per ρ quando $\rho \rightarrow 0$
- (4) β di classe \mathcal{C}^∞

Per esempio, usando una funzione seno (esercizio: scrivere esplicitamente la funzione rossa, sapendo che è un arco di seno), non è difficile ottenere



che è però solo di classe \mathcal{C}^1 . Osserviamo anche che in questo modo il disco di raggio $1/2$ viene contratto nell'origine. Se vogliamo che la funzione resti iniettiva all'interno del disco, possiamo cambiare la condizione (3) in

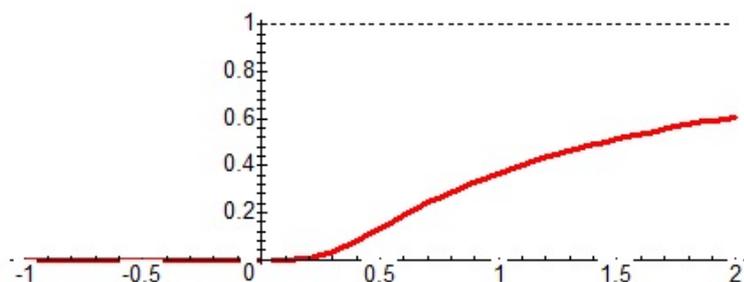
$$(3') \quad \beta^{(n)}(0) = 0 \text{ per ogni } n \geq 0, \text{ tutte le derivate destre di ogni ordine nulle}$$

in modo che φ resti di classe \mathcal{C}^∞ nell'origine (esercizio: verificare che è così).

Una soluzione è usare una funzione simile a quella introdotta nella soluzione dell'[Esercizio 1.6.7](#). Usiamo qui la funzione scritta nell'Osservazione alla fine dell'esercizio. Impariamo anche a scrivere altre funzioni \mathcal{C}^∞ che soddisfano condizioni addizionali. Per prima cosa definiamo

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

che ha grafico

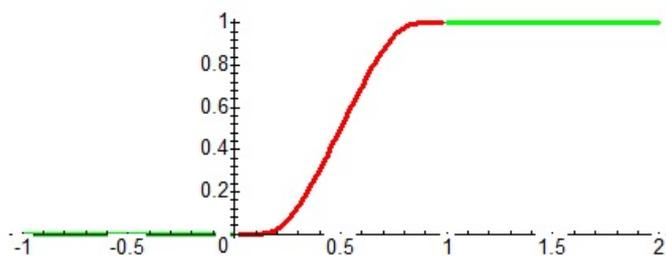


La funzione α è di classe \mathcal{C}^∞ su tutto il suo dominio (anche nell'origine) e tende a 1 per $t \rightarrow +\infty$. Il calcolo delle derivate destre nell'origine è simile a quello dell'[Esercizio 1.6.7](#), come indicato nell'Osservazione alla fine

dell'esercizio. Definiamo adesso la funzione, per $a < b$

$$\beta(t) = \frac{\alpha(t-a)}{\alpha(t-a) + \alpha(b-t)}$$

Il denominatore non è mai nullo perché è la somma di due termini maggiori o uguali a zero che non sono mai contemporaneamente nulli (dovrebbe essere $t < a$ e $t > b$, impossibile per la scelta di a, b). La funzione è dunque di classe \mathcal{C}^∞ su tutto \mathbb{R} . Inoltre è identicamente nulla per $t \leq a$ (il numeratore è nullo), identicamente uguale a 1 per $t \geq b$ (numeratore e denominatore sono uguali) e sempre compresa fra 0 e 1 perché il denominatore è sempre maggiore del numeratore (ha un addendo positivo in più). Scegliendo $a = 0$ e $b = 1$ abbiamo la funzione cercata

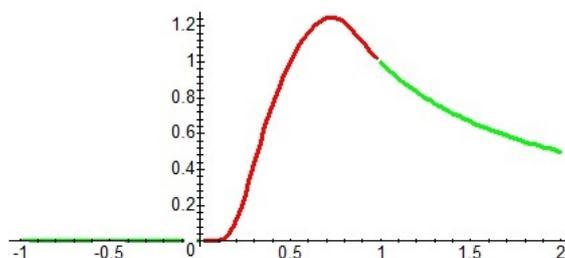


Concludiamo dunque che definendo

$$c_2(x, y) = \frac{\beta(\rho)}{\rho}(x, y)$$

questa funzione è di classe \mathcal{C}^∞ e retrae il quadrato di lato 2 centrato nell'origine sul disco di centro l'origine e raggio 1. Il bordo è lo stesso calcolato prima, perché lungo i lati del quadrato si ha $\rho \geq 1$ e quindi la retrazione è la stessa.

Per completezza, disegniamo il grafico di $\varphi(\rho) = \beta(\rho)/\rho$



dove si vede che la giunzione in $\rho = 1$ è liscia.

Osservazione. Abbiamo visto come sia possibile trovare una funzione \mathcal{C}^∞ che ha tutte le derivate nulle in un punto. C'è un teorema più generale, noto come Teorema di Borel⁵, (vedi per esempio https://encyclopediaofmath.org/wiki/Borel_theorem oppure https://en.wikipedia.org/wiki/Borel's_lemma) che afferma che data una qualunque successione di numeri $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, esiste una funzione di classe \mathcal{C}^∞ in un intorno dell'origine tale che, per ogni $n \geq 0$ le derivate soddisfano $f^{(n)}(0) = a_n$. Il Teorema di Borel è valido anche per funzioni di più variabili,

Il teorema di Borel è a sua volta un caso particolare di un teorema ancora più generale, il Teorema di Estensione di Whitney, vedi https://encyclopediaofmath.org/wiki/Whitney_extension_theorem

Esempio 3.5. Una corona circolare in \mathbb{R}^2 . Sia $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ la corona circolare di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 . Il cubo singolare è

$$c(\rho, \theta) = ((R_1 + \rho(R_2 - R_1)) \cos(2\pi\theta), (R_1 + \rho(R_2 - R_1)) \sin(2\pi\theta))$$

in modo che per $0 \leq \rho \leq 1$ percorriamo il segmento $[R_1, R_2]$. La formula per il bordo è la stessa di prima e si ha:

- $c_{|\theta=0}$ è il raggio orizzontale percorso dal punto $P = (R_1, 0)$ al punto $Q = (R_2, 0)$, in blu
- $c_{|\rho=1}$ è la circonferenza di raggio R_2 percorsa in verso antiorario a partire dal punto $Q = (R_2, 0)$, in rosso
- $c_{|\theta=1}$ è il raggio orizzontale percorso dal punto $P = (R_1, 0)$ al punto $Q = (R_2, 0)$, in blu

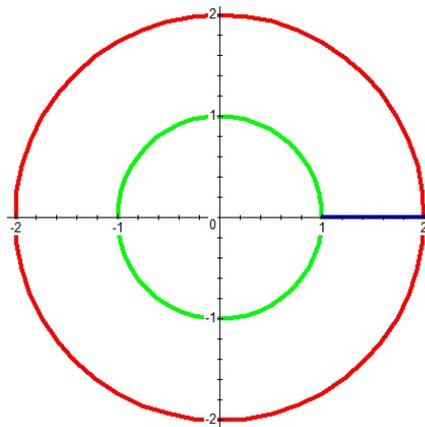
⁵vedi <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Borel/> per una biografia di Émile Borel

- $c_{|\rho=0}$ è la circonferenza di raggio R_1 percorsa in verso antiorario a partire dal punto $P = (R_1, 0)$, in verde

Come prima $c_{|\theta=0} = c_{|\theta=1}$ e quindi si semplificano. Il bordo allora è la catena

$$\partial c = c_{|\rho=1} - c_{|\rho=0}$$

cioè è formato da due circonferenze percorse in versi opposti (quella esterna antiorario, quella interna orario).



Questa volta il teorema di Stokes assume subito la forma “giusta” del teorema di Gauss-Green

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{C_{R_2}} \omega - \int_{C_{R_1}} \omega$$

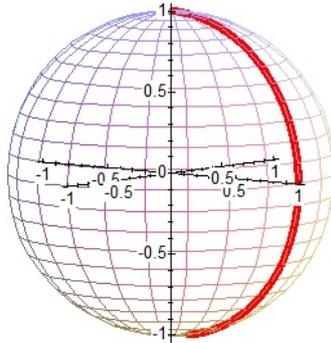
Esempio 3.6. La sfera di raggio R in \mathbb{R}^3 . Sia $S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ la sfera di centro l'origine e raggio R . Con la parametrizzazione solita si può scrivere:

$$c(\varphi, \theta) = (R \cos(2\pi\varphi) \sin(\pi\theta), R \sin(2\pi\varphi) \sin(\pi\theta), R \cos(\pi\theta))$$

Il bordo è

- $c_{|\theta=0}$ è il cammino costante al polo nord $N = (0, 0, R)$
- $c_{|\varphi=1}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0, x \geq 0$ percorso dal polo nord N al polo sud S
- $c_{|\theta=1}$ è il cammino costante al polo sud $S = (0, 0, -R)$
- $c_{|\varphi=0}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0, x \geq 0$ percorso dal polo nord N al polo sud S

Anche in questo caso i due meridiani si cancellano e il resto del bordo è composto da punti, su cui ogni integrale di una 2-forma è nullo.



Se vogliamo rappresentare una sfera come una catena che ha bordo nullo, dobbiamo usare qualcosa di diverso. Il modo più semplice è partire dal cubo standard I^3 di dimensione 3 in \mathbb{R}^3 . Il suo bordo è la catena

$$\partial I^3 = -I_{(1,0)}^3 + I_{(1,1)}^3 + I_{(2,0)}^3 - I_{(2,1)}^3 - I_{(3,0)}^3 + I_{(3,1)}^3$$

Retraendo ognuna di queste 6 facce sulla sfera, si ottiene una catena che ha immagine la sfera e il cui bordo è nullo, perché $\partial^2 = 0$. Osserviamo che la retrazione è \mathcal{C}^∞ , perché la stiamo considerando solo sulle facce e su ogni faccia la funzione è \mathcal{C}^∞ . Non ci sono problemi di “incollamento”, in quanto ci sono 6 cubi distinti e la richiesta è che ogni cubo sia dato da una funzione differenziabile e non ci sono condizioni di compatibilità fra le funzioni che definiscono i differenti cubi.

Però, dal punto di vista dell’integrazione, la parametrizzazione precedente è migliore, in quanto è data da un solo cubo e la parte non nulla di bordo non influisce sull’integrale.

Esercizio 3.7. Dal punto di vista topologico, si può ottenere una sfera anche contraendo tutti i lati di un quadrato ad un punto. Il bordo di questo 2-cubo risulta la somma di 4 volte lo stesso punto (l’immagine dei lati, che è sempre la stessa), però preso due volte con il segno positivo e due con il segno negativo per la formula del bordo e dunque anche in questo caso il bordo è nullo.

Sapete scrivere esplicitamente questa funzione, con dominio il quadrato standard $[0, 1]^2$ e immagine in \mathbb{R}^3 data da una sfera (non importa di quale centro e raggio)? Si può fare in modo che la funzione sia \mathcal{C}^∞ sul quadrato?

Esempio 3.8. La semisfera di raggio R in \mathbb{R}^3 . Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ la semisfera al di sopra il piano xy . Con la stessa

parametrizzazione di prima si ha:

$$c(\varphi, \theta) = (R \cos(2\pi\varphi) \sin(\frac{\pi}{2}\theta), R \sin(2\pi\varphi) \sin(\frac{\pi}{2}\theta), R \cos(\frac{\pi}{2}\theta))$$

(notare che $\theta \in [0, 1]$ e quindi $z \geq 0$). Il bordo è

- $c_{|\theta=0}$ è il cammino costante al polo nord $N = (0, 0, R)$
- $c_{|\varphi=1}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0, x \geq 0$ percorso dal polo nord N all'equatore
- $c_{|\theta=1}$ è l'equatore
- $c_{|\varphi=0}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0, x \geq 0$ percorso dal polo nord N all'equatore

Anche in questo caso i due meridiani si cancellano e il resto del bordo, come catena, è composto dall'equatore e dal polo nord. Il polo nord non contribuisce all'integrale di 1-forme e quindi

$$\int_X d\omega = \int_C \omega$$

dove C è l'equatore.

Esempio 3.9. Il toro in \mathbb{R}^3 . In questo caso la parametrizzazione standard del toro, mostra subito che il toro è un 2-cubo singolare e il bordo è nullo.

I lati del quadrato hanno per immagine rispettivamente un meridiano e un parallelo. Ognuno è preso due volte, con segni opposti e quindi si cancellano.

In particolare, se ω è una 2-forma chiusa definita in un aperto di \mathbb{R}^3 che contiene il toro, il suo integrale sul toro è nullo. Se infatti possiamo scrivere $\omega = d\eta$, allora il teorema di Stokes dà

$$\int_T \omega = \int_T d\eta = \int_{\partial T} \eta = 0$$

perché il dominio di integrazione è nullo.

3.3. Qualche integrale. Calcoliamo qualche integrale usando il teorema di Stokes.

Esempio 3.10. Si consideri in \mathbb{R}^2 il triangolo T con vertici nei punti $A = (5, -1)$, $B = (-1, 6)$, $C = (-5, -1)$ e l'1-forma differenziale $\omega = xdy - ydx$. Usando il teorema di Stokes calcolare l'integrale di ω lungo il bordo del triangolo T .

Soluzione. Orientiamo il bordo del triangolo in verso antiorario. Il teorema di Stokes dice

$$\int_{\partial T} \omega = \int_T d\omega$$

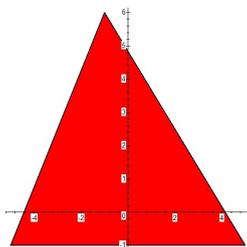
Non è certo difficile calcolare i tre integrali di linea richiesti, ma vediamo prima quanto vale $d\omega$:

$$d\omega = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2 dx \wedge dy$$

Allora

$$\int_T d\omega = \int_T 2 dx \wedge dy = 2 \int_T dx dy = 2 \text{Area}(T)$$

Disegnando il triangolo (ricordiamo che questo corso si chiama GEOMETRIA 3 e non ANALISI ...)



si ha $2 \text{Area}(T) = \text{base} \times \text{altezza} = 10 \times 7 = 70$.

Esempio 3.11. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie regolare data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2\}$$

e $R \subseteq S$ la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \mid x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Orientiamo S in modo tale che il vettore normale in $P = (0, 0, 1)$ sia $(0, 0, 1)$ stesso. Sia infine $\omega = y^2 dx + (x - y) dz$. Calcolare

$$\int_R d\omega$$

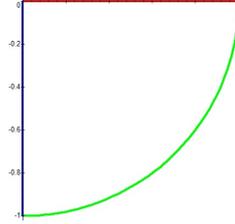
sia direttamente (cioè integrando la 2-forma $d\omega$ sulla regione R) che con il teorema di Stokes (cioè integrando ω sul bordo di R).

Soluzione. Possiamo parametrizzare la regione R con

$$c(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$$

sul dominio D descritto da

$$u \geq 0, \quad v \leq 0, \quad u^2 + v^2 \leq 1$$



La condizione sull'orientazione di S significa che dobbiamo scegliere i nomi delle variabili (u, v) in modo che $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$ nel punto $(u, v) = (0, 0)$ (che corrisponde al punto P sulla superficie). Poiché si ha $\mathbf{x}_u = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{x}_v = (0, 1, 0)$ nell'origine, la condizione dice che sul piano del dominio l'orientazione è già quella giusta e che il bordo di D è orientato in verso antiorario, per tenere la regione di cui è bordo alla sua sinistra.

Prima di iniziare l'integrazione, calcoliamo ancora

$$d\omega = -2y dx \wedge dy + dx \wedge dz - dy \wedge dz$$

e il pullback

$$dx = du, \quad dy = dv, \quad dz = -2u du - 2v dv$$

e quindi

$$\begin{aligned} c^*(d\omega) &= -2v du \wedge dv + du \wedge (-2u du - 2v dv) - dv \wedge (-2u du - 2v dv) \\ &= (-4v - 2u) du \wedge dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^*(\omega) &= v^2 du + (u - v)(-2u du - 2v dv) \\ &= (-2u^2 + 2uv + v^2) du + (-2uv + 2v^2) dv \end{aligned}$$

I due integrali da calcolare sono quindi

$$\int_R d\omega = \int_D c^*(d\omega) = \int_D (-4v - 2u) du \wedge dv = \int_D (-4v - 2u) dudv$$

e

$$\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial D} c^*(\omega) = \int_{\partial D} (-2u^2 + 2uv + v^2) du + (-2uv + 2v^2) dv$$

Questo è un esercizio di Analisi (anzi, due esercizi...) e li potete svolgere da soli. Il teorema di Stokes vi assicura che questi due integrali sono uguali. Se vi vengono diversi, c'è (almeno) un errore di calcolo da qualche parte (nei conti precedenti, oppure nei conti che farete voi...).

4. I teoremi classici

In questo paragrafo enunciamo e dimostriamo i teoremi classici dell'analisi vettoriale: il teorema di Green, il teorema della divergenza (o di Gauss) e il teorema del rotore (o di Stokes).

Questi tre teoremi sono conseguenze immediate del teorema di Stokes del [paragrafo 3](#), ma è necessario un po' di lavoro per trasformare gli enunciati classici in una versione a cui è possibile applicare il teorema generale di Stokes.

Quando abbiamo studiato le curve e le superfici abbiamo visti le espressioni degli integrali che calcolano la lunghezza di una curva e l'area di una porzione di superficie. Cominceremo riscrivendo nel linguaggio delle forme differenziali gli integrandi che compaiono in queste formule e poi utilizzeremo queste espressioni per riscrivere le formule classiche in termini di forme differenziali e loro derivate esterne. Il Teorema di Stokes darà quindi le uguaglianze volute.

Useremo le definizioni degli operatori differenziali e alcuni degli esercizi svolti nel [paragrafo 6.5](#). In particolare, useremo la forma di volume dV su \mathbb{R}^3 e l'operatore $*$ di Hodge.

Concluderemo il paragrafo con alcuni esercizi.

4.1. L'elemento di area. Negli [Esercizi 6.3.8](#) e [6.5.13](#) abbiamo definito e studiato la forma di volume dV su \mathbb{R}^n data dalla formula

$$(dV)_p(\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p) = 1$$

e che, usando le coordinate globali (x_1, x_2, \dots, x_n) su \mathbb{R}^n si scrive

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

La forma dV nel punto p associa alla base standard orientata dello spazio tangente $T_p\mathbb{R}^n$ il numero 1. La proprietà fondamentale della forma di volume (che spiega il suo nome) è la seguente: sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e definiamo il suo *volume* come

$$\text{vol}(U) = \int_U dV$$

quando l'integrale esiste. Si ottiene in questo modo un buon concetto di *misura n-dimensionale*: se $\dim U < n$, allora l'integrale di una n -forma è certamente nullo perché i differenziali dx_1, \dots, dx_n sono linearmente dipendenti su U e quindi $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0$ su U . Altrimenti l'integrale ha le usuali proprietà di positività, additività e monotonia di una misura.

L'ambiente dei teoremi classici è lo spazio \mathbb{R}^3 e quindi useremo le proprietà caratteristiche della dimensione 3 e in particolare il *prodotto vettoriale* fra vettori dello spazio. Useremo la notazione standard e non ci sarà possibilità di confusione fra

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ = prodotto vettoriale di due vettori
- $\omega \wedge \eta$ = prodotto esterno di forme differenziali

Consideriamo una superficie regolare orientata $S \in \mathbb{R}^3$: vogliamo scrivere la forma di volume su S , che di solito si chiama *elemento di area* e cioè una forma che integrata su un dominio R contenuto nella superficie dà l'area di R . Se $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione locale, abbiamo la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ di $T_p S$. Ponendo come al solito

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

si ha che la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ ha la stessa orientazione standard di \mathbb{R}^3 . Il campo normale \mathbf{N} dà quindi su S l'orientazione indotta dallo spazio ambiente.

Definizione 4.1. L'*elemento di area* della superficie S è la 2-forma differenziale dA definita da

$$dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

per $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$.

Per ogni $p \in S$, dA_p è una forma bilineare alternante su $T_p S$ e cioè appartiene a $\bigwedge^2(T_p S)^*$ e dunque dA è una 2-forma differenziale che è definita solo per i punti di S e si applica solo a coppie di vettori tangenti ad S . In particolare, il dominio di dA non è un aperto di \mathbb{R}^3 , ma un aperto di S .

Per definizione

$$dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{N}_p$$

e poiché per ogni coppia di vettori in $T_p S$ il prodotto vettoriale è parallelo al vettore normale \mathbf{N}_p , si ha che

$$dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \pm \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|$$

dove il segno dipende dall'orientazione di $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ come base di $T_p S$: se la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ ha la stessa orientazione di $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ allora $dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|$ altrimenti, se l'orientazione è opposta allora $dA_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|$. Se \mathbf{v} e \mathbf{w} sono linearmente dipendenti, il prodotto vettoriale è nullo e non c'è problema di scelta del segno.

Consideriamo il cubo singolare $\mathbf{x} : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ dato dalla parametrizzazione: in generale, non è detto che il dominio U sia un quadrato standard, ma si può suddividere in cubi singolari, calcolare il contributo di ogni cubo e poi sommare (cioè pensiamo \mathbf{x} come una catena). Calcoliamo il pullback della forma dA : per $q \in U$, sia $\{\mathbf{e}_1|_q, \mathbf{e}_2|_q\}$ la base dello spazio tangente $T_q U$. Il differenziale $d\mathbf{x}$ della parametrizzazione in $p = \mathbf{x}(q) \in S$ è la funzione lineare $d\mathbf{x}_q : T_q U \rightarrow T_p S$ data da

$$d\mathbf{x}(\mathbf{e}_1|_q) = \mathbf{x}_u, \quad d\mathbf{x}(\mathbf{e}_2|_q) = \mathbf{x}_v$$

e quindi dalla definizione di pullback di forme (Definizione 6.2.12) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(dA)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= dA(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{N} \\ &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \cdot \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \\ &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

e dunque

$$\int_S dA = \int_U \mathbf{x}^*(dA) = \int_U \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

e ritroviamo la formula che definisce l'area di una superficie. Dunque dA è proprio l'elemento di area.

C'è un'espressione per l'elemento d'area su una superficie in termini del campo normale e dei differenziali dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 che useremo per riscrivere il teorema di Stokes generale nelle forme dei teoremi classici.

Teorema 4.2. *Sia S una superficie regolare orientata in \mathbb{R}^3 (anche con bordo) e sia \mathbf{N} il campo normale orientato come prima. Allora*

$$dA = N_1 dy \wedge dz + N_2 dz \wedge dx + N_3 dx \wedge dy$$

dove $\mathbf{N} = N_1\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2 + N_3\mathbf{e}_3$ è la scrittura di \mathbf{N} in componenti. Inoltre, su S abbiamo le uguaglianze

$$N_1 dA = dy \wedge dz$$

$$N_2 dA = dz \wedge dx$$

$$N_3 dA = dx \wedge dy$$

Queste uguaglianze di *forme differenziali su S* significano che i due membri delle uguaglianze agiscono allo stesso modo sui vettori tangenti a S ma non su vettori generali di \mathbb{R}^3 .

Dimostrazione. Sviluppando il determinante che definisce dA lungo l'ultima riga e usando la definizione di prodotto wedge di 1-forme si ha

$$\begin{aligned} dA(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= N_1(v_2w_3 - v_3w_2) + N_2(v_3w_1 - v_1w_3) + N_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= N_1 dy \wedge dz(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + N_2 dz \wedge dx(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + N_3 dx \wedge dy(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

(attenzione ai segni dello sviluppo!) e si ottiene la prima uguaglianza. Per dimostrare le altre uguaglianze, siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \alpha \mathbf{N}$ e

scriviamo

$$\begin{aligned}
 N_1 dA(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \cdot \mathbf{N}) && \text{per la definizione di } dA \\
 &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N}) \alpha && \alpha \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \alpha \text{ perché } \mathbf{N} \text{ ha norma } 1 \\
 &= \mathbf{e}_1 \cdot \alpha \mathbf{N} && \text{per la (bi)linearità del prodotto scalare} \\
 &= \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) && \text{per il significato di } \alpha \mathbf{N} \\
 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) && \text{la prima componente del prodotto esterno} \\
 &&& \text{nella base ortonormale } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \\
 &= dy \wedge dz(\mathbf{v}, \mathbf{w}) && \text{per definizione di prodotto esterno di 1-forme}
 \end{aligned}$$

e otteniamo la prima. Usando $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in modo simile, si ottengono le altre due. \square

Si può riscrivere la prima uguaglianza del teorema usando l'operatore di Hodge: \mathbf{N}^\flat è un campo vettoriale e quindi la 1-forma associata è:

$$\mathbf{N}^\flat = N_1 dx + N_2 dy + N_3 dz$$

Calcolando l'operatore $*$ si ha

$$*\mathbf{N}^\flat = N_1 dy \wedge dz + N_2 dz \wedge dx + N_3 dx \wedge dy$$

(attenzione ai segni) che è il termine a destra dell'uguale.

Ricordiamo ora la definizione di contrazione di una forma differenziale per un campo vettoriale ([Definizione 6.5.6](#)): si ha

$$\begin{aligned}
 dA(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} && \text{per definizione di } dA \\
 &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} && \text{per le proprietà del determinante} \\
 &= dx \wedge dy \wedge dz(\mathbf{N}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) && \text{per definizione di prodotto esterno di 1-forme} \\
 &= dV(\mathbf{N}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) && \text{per definizione di } dV \\
 &= \mathbf{N} \lrcorner dV(\mathbf{v}, \mathbf{w}) && \text{per definizione di contrazione}
 \end{aligned}$$

Dunque l'uguaglianza del teorema è

$$\mathbf{N} \lrcorner dV = *\mathbf{N}^\flat$$

e abbiamo risolto l'[Esercizio 6.5.14](#), punto (4) per $n = 3$ e $X = \mathbf{N}$, il campo normale. Questa dimostrazione vale per ogni n e per ogni campo vettoriale X , prestando attenzione ai segni nello sviluppo del determinante e nel calcolo dell'operatore di Hodge.

4.2. L'elemento di lunghezza. Ripetiamo rapidamente nel caso delle curve nello spazio i ragionamenti fatti per le superfici. L'elemento di lunghezza è la 1-forma su una curva che integrata dà la lunghezza della curva.

Sia $\alpha : I \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata (non necessariamente per arcolunghezza) e usiamo la lettera u per indicare la coordinata sull'intervallo I .

Sia $\mathbf{t}(u)$ il campo tangente unitario su C . Lo spazio tangente $T_p C$ alla curva in un suo punto p ha dimensione 1 e \mathbf{t} dà una base di questo spazio e assegna anche l'orientazione. Una 1-forma su C è una famiglia di forme lineari sugli spazi tangenti e quindi basta assegnare il suo valore sugli elementi delle basi.

Definizione 4.3. L'elemento di lunghezza della curva C è la 1-forma differenziale ds sulla curva C definita da

$$ds_p(\mathbf{t}) = 1$$

Se $\mathbf{v} \in T_p C$ allora $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{t}$ e quindi $ds(\mathbf{v}) = \alpha$, per linearità. La forma ds è una 1-forma differenziale che è definita solo per i punti di C e si applica solo a vettori tangenti a C . In particolare, il dominio di ds non è un aperto di \mathbb{R}^3 , ma un aperto di C .

Consideriamo la parametrizzazione $\alpha : I \rightarrow C$ come un 1-cubo singolare e calcoliamo il pullback della forma ds : per $q \in I$, sia $\{\mathbf{e}_1|_q\}$ la base dello spazio tangente $T_q I$. Il differenziale $d\alpha$ della parametrizzazione in $p = \alpha(q) \in C$ è la funzione lineare $d\alpha_q : T_q I \rightarrow T_p C$ data da

$$d\alpha(\mathbf{e}_1) = \alpha'(q)$$

e quindi dalla definizione di pullback di forme si ha

$$\begin{aligned} \alpha^*(ds)(\mathbf{e}_1) &= ds(\alpha'(q)) \\ &= ds\left(\|\alpha'(q)\| \frac{\alpha'(q)}{\|\alpha'(q)\|}\right) \\ &= ds(\|\alpha'(q)\| \mathbf{t}) \\ &= \|\alpha'(q)\| \end{aligned}$$

per definizione del campo tangente unitario $\mathbf{t} = \alpha'/\|\alpha'\|$ e dunque

$$\int_C ds = \int_I \alpha^*(ds) = \int_I \|\alpha'(u)\| du$$

e ritroviamo la formula che definisce la lunghezza della curva. Dunque ds è proprio l'elemento di lunghezza.

Anche in questo caso possiamo riscrivere la forma ds in termini dei differenziali dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 .

Teorema 4.4. *Sia C una curva regolare in \mathbb{R}^3 e sia \mathbf{t} il campo tangente unitario. Allora su C valgono le uguaglianze*

$$\begin{aligned}t_1 ds &= dx \\t_2 ds &= dy \\t_3 ds &= dz\end{aligned}$$

dove $\mathbf{t} = t_1 \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2 + t_3 \mathbf{e}_3$ è la scrittura di \mathbf{t} in componenti.

Dimostrazione. I termini presenti nelle uguaglianze sono delle 1-forme e quindi basta calcolarle sul vettore \mathbf{t} che è la base dello spazio $T_p C$. Si ha

$$t_1 ds(\mathbf{t}) = t_1, \quad t_2 ds(\mathbf{t}) = t_2, \quad t_3 ds(\mathbf{t}) = t_3$$

perché per definizione $ds(\mathbf{t}) = 1$. D'altra parte, $\{dx, dy, dz\}$ è la base duale di $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e quindi

$$dx(\mathbf{t}) = dx(t_1 \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2 + t_3 \mathbf{e}_3) = t_1 dx(\mathbf{e}_1) + t_2 dx(\mathbf{e}_2) + t_3 dx(\mathbf{e}_3) = t_1$$

e analogamente

$$dy(\mathbf{t}) = t_2, \quad dz(\mathbf{t}) = t_3.$$

□

4.3. I teoremi classici. Siamo ora pronti a rivedere i teoremi classici e seguiamo la presentazione del libro di Spivak. Questi teoremi si possono enunciare per varietà con bordo. Noi ci limiteremo a versioni nel piano e nello spazio.

Teorema 4.5 (Il teorema di Green nel piano). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio compatto con bordo un insieme di curve differenziabili regolari (a tratti), orientate in modo da avere il dominio “alla sinistra” (cioè i bordi esterni sono percorsi in verso antiorario, quelli interni in verso orario). Siano $P, Q : S \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Allora*

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Dimostrazione. Basta porre $\omega = P dx + Q dy$ e notare che

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Scrivendo S come una 2-catena differenziabile, il teorema è un caso particolare del [teorema di Stokes](#). □

Teorema 4.6 (Teorema della divergenza o di Gauss). *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio compatto con bordo un insieme di superfici orientate regolari, e sia \mathbf{N} il campo normale con l'orientazione standard sul bordo ∂M e cioè $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ ha la stessa orientazione dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 . Sia $\mathbf{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale differenziabile. Allora*

$$\int_M \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA$$

Dimostrazione. Dall'[Esercizio 6.5.13](#), punto (1) si ha la formula

$$d(*X^b) = (\operatorname{div} X) dV$$

per un campo differenziabile X e applicando il teorema di Stokes si ha

$$\int_M \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_M d(*\mathbf{F}^b) = \int_{\partial M} *\mathbf{F}^b$$

Come prima si ha

$$*\mathbf{F}^b = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

e dal [Teorema 4.2](#) sulla superficie bordo ∂M si ha

$$N_1 dA = dy \wedge dz$$

$$N_2 dA = dz \wedge dx$$

$$N_3 dA = dx \wedge dy$$

e quindi su ∂M abbiamo

$$*\mathbf{F}^b = F_1 N_1 dA + F_2 N_2 dA + F_3 N_3 dA = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA$$

ottenendo dunque la tesi. \square

Teorema 4.7 (Teorema di Stokes o del rotore). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con bordo. Sia \mathbf{N} il campo normale che dà l'orientazione su S e diamo al bordo ∂S l'orientazione indotta. Sia \mathbf{t} il campo tangente unitario su ∂S e sia s l'arcolumgezza. Sia $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo differenziabile (definito e differenziabile su un aperto contentente S .) Allora*

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA = \int_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$. Ricordiamo che la definizione generale di rotore

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = *(d\mathbf{F}^b)$$

produce una $(n-2)$ -forma differenziale. Nel caso $n=3$ abbiamo una 1-forma che può essere interpretata come un campo vettoriale. Questa è l'interpretazione che stiamo usando, perché nell'enunciato del teorema c'è il

prodotto scalare di $\text{rot } \mathbf{F}$ con il campo normale \mathbf{N} . Dunque la definizione usata nell'enunciato del teorema è

$$\mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{F} = (*d\mathbf{F}^b)^\sharp$$

Subito dopo la [Definizione 6.5.12](#) di rotore abbiamo svolto i calcoli che mostrano come nel caso $n = 3$ questa definizione coincida con la definizione nota dai corsi di Analisi Matematica e di Fisica.

Come nella dimostrazione precedente, usando le uguaglianze del [Teorema 4.2](#), si ha:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{N}) dA &= (R_1 N_1 + R_2 N_2 + R_3 N_3) dA \\ &= R_1 N_1 dA + R_2 N_2 dA + R_3 N_3 dA \\ &= R_1 dy \wedge dz + R_2 dz \wedge dx + R_3 dx \wedge dy \\ &= *(\mathbf{R}^b) \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{N}) dA &= *(\mathbf{R}^b) && \text{per il calcolo appena fatto} \\ &= * \left(\left((*d\mathbf{F}^b)^\sharp \right)^b \right) && \text{per la definizione di } \mathbf{R} \\ &= ** (d\mathbf{F}^b) && \text{perché gli isomorfismi } \sharp \text{ e } \flat \text{ sono inversi l'uno dell'altro} \\ &= d\mathbf{F}^b && ** = (-1)^{k(n-k)} = (-1)^{2 \cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

Dunque, usando il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA = \int_S d\mathbf{F}^b = \int_{\partial S} \mathbf{F}^b$$

e dobbiamo calcolare l'ultimo integrale. Usando sulla curva ∂S le uguaglianze del [Teorema 4.4](#) si ha

$$\mathbf{F}^b = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = F_1 t_1 ds + F_2 t_2 ds + F_3 t_3 ds = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds$$

e si ha la tesi. \square

4.4. Esercizi.

Esercizio 4.8. Si consideri la superficie S data dal paraboloide ellittico di equazione

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

per $z \leq 1$ e sia ∂S il suo bordo orientato positivamente. Utilizzando il Teorema di Stokes si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds$$

dove \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (9xz + 2y, 2x + y^2, -2y^2 + 2z)$$

Soluzione. Il bordo della superficie ∂S ha equazione $x^2/4 + y^2/9 = 1$ nel piano $z = 1$ (è una ellisse). Anche senza suggerimento, non sembra una buona idea parametrizzare la curva ∂S , calcolarne il vettore tangente e poi fare l'integrale. Usiamo quindi Stokes:

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA = \int_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds$$

e quindi calcoliamo \mathbf{N} e $\text{rot } \mathbf{F}$, sperando vengano più semplici. Il campo unitario normale \mathbf{N} alla superficie S è dato da

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{81}}} \left(-\frac{x}{2}, -\frac{2y}{9}, 1 \right)$$

Il rotore di \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\text{rot } \mathbf{F} = *(d\mathbf{F}^b)^\sharp$$

e si ha $\mathbf{F}^b = (9xz + 2y) dx + (2x + y^2) dy + (-2y^2 + 2z) dz$ e dunque

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}^b &= 9x dz \wedge dx + 2 dy \wedge dx + 2 dx \wedge dy - 4y dy \wedge dz \\ &= -9x dx \wedge dz - 4y dy \wedge dz \end{aligned}$$

e

$$*(d\mathbf{F}^b) = -4y dx + 9x dy$$

Finalmente il campo vettoriale cercato è

$$\text{rot } \mathbf{F} = (-4y, 9x, 0)$$

e calcolando

$$\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (-4y, 9x, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{81}}} \left(-\frac{x}{2}, -\frac{2y}{9}, 1 \right) = 0$$

Dunque, ricordando che questo è un esercizio di Geometria e non di Analisi, l'integrale non è difficile da calcolare...

$$\int_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds = \int_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA = \int_S 0 = 0$$

Questo conferma la sensazione che gli unici integrali che compaiono negli esercizi o nei compiti d'esame sono banali, perché nessuno sa (o ha voglia di) calcolare veramente degli integrali non banali.

Esercizio 4.9. Definiamo un campo vettoriale \mathbf{F} su \mathbb{R}^3 dato da

$$F(x, y, z) = (0, 0, cz)$$

dove $c > 0$ è costante. Sia M un dominio compatto (un “corpo”) contenuto nella regione $z \leq 0$. Se immaginiamo l’asse z come l’altitudine, allora M è “sotto il livello del mare” e cioè sott’acqua. Il campo F rappresenta la spinta verso il basso esercitata da una colonna di fluido di altezza $-z$ e densità costante c .

Poiché un fluido esercita la stessa pressione in tutte le direzioni, possiamo definire la *spinta di galleggiamento* su M , dovuta al liquido come

$$-\int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA$$

in quanto la pressione è normale alla superficie del corpo. Calcolare la spinta di galleggiamento.

Soluzione. Per il teorema della divergenza

$$-\int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA = -\int_M \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Poiché

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 + 0 + c = c$$

si ha

$$-\int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA = -c \int_M dV = -c \operatorname{vol}(M)$$

(di nuovo un integrale ovvio) e quindi è uguale alla *massa* (= densità \times volume) del fluido spostato. Se immaginiamo questa situazione sulla Terra, la spinta verso l’alto è pari al *peso* della quantità di fluido spostato.

Questo è, ovviamente, il *principio di Archimede*, scoperto più di 2000 anni prima del teorema di Stokes.

Esercizio 4.10. Sia S la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all’asse z la parabola $z = x^2$, orientata in modo tale che il versore normale nell’origine sia $(0, 0, 1)$, e sia R la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \mid x \leq 0, y \geq 0, z \leq 1\}$$

Sia $\omega = 2x^2 dy + 3y dz$. Calcolare $\int_R d\omega$.

Soluzione. La parabola ha equazioni parametriche $x = v$, $z = v^2$ e quindi la superficie è parametrizzata da

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x & = v \cos u \\ y & = v \sin u \\ z & = v^2 \end{cases}$$

Però questa parametrizzazione non è regolare proprio nell'origine, perché la parabola tocca l'asse z . Guardando la parametrizzazione si vede che una equazione cartesiana è

$$x^2 + y^2 = z$$

e quindi usiamo la parametrizzazione (più semplice, in realtà)

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x & = u \\ y & = v \\ z & = u^2 + v^2 \end{cases}$$

I vettori tangenti sono $\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u)$ e $\mathbf{x}_v = (0, 1, 2v)$. Il prodotto esterno vale

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-2u, -2v, 1)$$

e quindi nell'origine vale proprio $(0, 0, 1)$. Dunque l'orientazione data dalla base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ è quella richiesta dall'esercizio. Da questo punto in poi l'esercizio è simile all'[Esempio 3.11](#) e si può rileggerlo per farsi guidare nello svolgimento.

5. Il Teorema di Gauss-Bonnet

Il teorema di Gauss-Bonnet ha varie “versioni” e cominciamo la trattazione dalla versione cosiddetta “locale”. Questa versione “locale” lega l'area di una regione su una superficie con la curvatura della superficie e la curvatura (geodetica) della curva che ne costituisce il bordo. Questa versione è interessante perché mostra che la curvatura influenza l'area. Ai tempi di Gauss, l'unica geometria nota era quella euclidea, in cui la curvatura è identicamente nulla e perciò è impossibile notare questa influenza. Proprio il lavoro di Gauss mostrò per la prima volta la possibile natura della geometria non euclidea.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata e sia $\gamma \subseteq S$ una curva regolare contenuta in S . Il vettore \mathbf{t} , tangente alla curva γ , appartiene al piano tangente $T_p S$, mentre il vettore \mathbf{N} è normale a $T_p S$. Il vettore $\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}$ è perpendicolare a \mathbf{N} e quindi sta sul piano tangente. La terna $\{\mathbf{N}, \mathbf{t}, \mathbf{N} \wedge \mathbf{t}\}$ è una terna ortonormale che dà una base di \mathbb{R}^3 : il primo vettore è perpendicolare al piano tangente $T_p S$ mentre gli altri due danno una base ortonormale (orientata positivamente) del piano tangente.

Sia \mathbf{t}' la derivata del campo tangente della curva γ . In ogni punto di S possiamo decomporre il vettore \mathbf{t}' nelle sue componenti *normale* (parallela al campo \mathbf{N} normale alla superficie) e *tangenziale* (appartenente al piano tangente):

$$\mathbf{t}' = a\mathbf{N} + b\mathbf{t} + c(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t})$$

Per calcolare i coefficienti di questa decomposizione basta fare i prodotti scalari con i vettori della base ortonormale e si ottiene

$$a = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{N} = k\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = k_n$$

e cioè la curvatura normale nella direzione del vettore \mathbf{t} ,

$$b = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$$

perché \mathbf{t} è un campo di norma costante 1 e

$$c = \mathbf{t}' \cdot (\mathbf{N} \wedge \mathbf{t}) = k_g$$

che si dice *curvatura geodetica* della curva γ . In termini di vettori scriviamo quindi

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n} = k_n\mathbf{N} + k_g(\mathbf{N} \wedge \mathbf{t})$$

I termini fisici, \mathbf{t}' è l'accelerazione e abbiamo scritto la decomposizione in accelerazione normale (dovuta al vincolo di stare sulla superficie S) e tangenziale, dovuta a forze non vincolari. Abbiamo già studiato a fondo il significato della curvatura normale e i legami con la seconda forma fondamentale. Nel teorema di Gauss-Bonnet il termine che compare è invece la curvatura geodetica.

Il primo enunciato che vediamo è

Teorema 5.1 (Gauss-Bonnet, versione locale liscia). *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata, sia γ una curva regolare chiusa e semplice contenuta in S e sia R la regione di superficie racchiusa dalla curva γ , in modo che $\partial R = \gamma$. Allora*

$$\int_{\gamma} k_g ds = 2\pi - \int_R K dA$$

dove k_g è la curvatura geodetica di γ , K è la curvatura Gaussiana di S e ds , dA sono rispettivamente l'elemento di lunghezza di γ e di area di S .

La dimostrazione, che non vediamo, consiste nell'identificare una forma differenziale opportuna e calcolare gli integrali del teorema di Green. La dimostrazione di questo enunciato è la parte difficile di tutto questo argomento. Una dimostrazione semplice si trova sulle note di Hitchin.

La prima generalizzazione interessante sta nel prendere la curva γ regolare a tratti e quindi possiamo pensare a γ come un *poligono curvilineo*, cioè una curva formata da un numero finito di archi regolari che si incontrano, formando degli angoli. Nei punti d'incontro si formano quindi gli angoli interni ed esterni al poligono e analizzando la dimostrazione del teorema precedente, si vede che la quantità 2π proviene dall'integrale del vettore tangente lungo la curva e quindi dà 2π perché per una curva chiusa e semplice il vettore tangente compie un giro intorno alla curva.

Nel caso ci siano degli angoli, il vettore tangente “salta” e quindi si accumulano contributi dati dagli angoli esterni. Si ottiene un enunciato in cui il termine 2π è sostituito da

$$\sum_i \alpha_i - (n - 2)\pi$$

dove α_i sono gli angoli *interni* e cioè per γ un poligono curvilineo di n lati si ha

$$\int_{\gamma} k_g ds = \sum_i \alpha_i - (n - 2)\pi - \int_R K dA$$

Nel caso di un triangolo ($n = 3$) si ottiene

Teorema 5.2 (Gauss-Bonnet per un triangolo). *La somma degli angoli interni di un triangolo curvilineo è*

$$\pi + \int_R K dA + \int_{\gamma} k_g ds$$

Questa formula, dovuta a Gauss, è già sorprendente perché mostra come la curvatura della superficie e dei lati alteri la somma degli angoli di un triangolo. Naturalmente, nel piano euclideo $K = 0$ e quindi la regione non influisce.

Un altro caso interessante è quando $k_g = 0$ e cioè sulla traiettoria γ non agiscono forze esterne: l'accelerazione tangenziale è nulla e le curve di questo tipo si chiamano “geodetiche”. Non avere accelerazione significa “andare dritti” (per quanto sia possibile rimanendo sulla superficie vincolo): nel piano, queste curve sono le rette, ma in un cilindro sono le eliche circolari di passo e velocità angolare costante (anche le circonferenze orizzontali e le rette verticali sono geodetiche).

Su una sfera, le geodetiche sono gli archi di cerchio massimo. Dunque per un triangolo sulla sfera di raggio 1 con lati archi di cerchio massimo si ha

$$\text{somma degli angoli} = \pi + \int_R dA = \pi + \text{area del triangolo } R$$

che mostra come in un triangolo sferico la somma degli angoli sia sempre maggiore di π e sia tanto maggiore tanto più grande è l'area del triangolo. Per i triangoli sferici questa formula era conosciuta già ben prima di Gauss ed è nota come teorema di Girard.⁶

Però Gauss è il primo a fornire un motivo per questa formula e a individuare con precisione tutti i termini che contribuiscono a determinare la somma degli angoli.

⁶vedi https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Girard_Albert/ per una biografia di Albert Girard

L'ultimo teorema che vediamo è la “versione globale” di Gauss-Bonnet. I teoremi precedenti valgono sotto l'ipotesi addizionale che la regione R considerata sia tutta contenuta nell'immagine di una parametrizzazione regolare, per poter applicare il teorema di Stokes (non abbiamo insistito su questo perché tanto non vediamo la dimostrazione del teorema locale).

Sia ora S una superficie connessa, compatta e orientabile in \mathbb{R}^3 . Dalla teoria delle superfici topologiche sappiamo che S è omeomorfa alla somma connessa di g tori, ma naturalmente la curvatura su S può essere molto diversa anche per superfici topologicamente equivalenti. Per esempio, due sfere di raggio diverso sono omeomorfe fra loro ma le curvature sono diverse.

L'ultima versione di Gauss-Bonnet dice

Teorema 5.3 (Gauss-Bonnet globale). *Sia S una superficie connessa, compatta e orientabile in \mathbb{R}^3 . Allora*

$$\int_S K \, dA = 2\pi\chi(X)$$

dove $\chi(X) = 2 - 2g$ è la caratteristica di Eulero di S .

Prima di vedere la dimostrazione, analizziamo l'enunciato: il termine a sinistra nell'uguaglianza coinvolge la curvatura Gaussiana, che è una quantità *locale* e che dipende dalla metrica della superficie. Il termine a destra invece è *globale* e dipende solo dalla topologia. L'uguaglianza afferma (come in altri casi già visti) che “accumulando” tante quantità geometriche/differenziali locali si ottiene una quantità che è un invariante *topologico* e dunque non dipende dalla geometria o dalla struttura differenziabile.

Deformando una superficie, si può cambiare la sua curvatura. Per esempio, se prendiamo una sfera (tutti i punti hanno curvatura positiva) e la “pieghiamo” possiamo ottenere con continuità una “banana”, che ha punti di curvatura positiva (all'esterno) e punti di curvatura negativa (all'interno). È possibile deformare una sfera in modo che la curvatura sia minore o uguale a zero in tutti i punti? Il teorema di Gauss-Bonnet dice di no: per una superficie omeomorfa ad una sfera l'integrale della curvatura vale $4\pi > 0$ e quindi l'integrando non può essere sempre minore o uguale a zero. La topologia impone delle restrizioni alle deformazioni geometriche possibili.

Dimostrazione. Una superficie connessa e compatta può sempre essere triangolata (teorema di Radó): fissiamo dunque una triangolazione, con i triangoli che hanno lati curve regolari e sono ognuno contenuto nell'immagine di una parametrizzazione. Suddividendo i triangoli in modo che siano abbastanza piccoli, questo si può certamente ottenere. La triangolazione scelta avrà V vertici, L lati e F facce.

Sommiamo tutti gli angoli di tutte le facce: dal teorema di Gauss-Bonnet per i triangoli otteniamo

$$\text{somma di tutti gli angoli} = \pi F + \int_S K dA + \sum_i \int_{\gamma_i} k_g$$

dove γ_i sono tutti i lati di tutti i triangoli. In questa somma ogni lato compare due volte, perché ogni lato è lato di due triangoli adiacenti e i due integrali si cancellano perché i lati sono percorsi con orientazione opposta. Abbiamo perciò

$$\text{somma di tutti gli angoli} = \pi F + \int_S K dA$$

Gli angoli intorno ad ogni vertice sommano a 2π perché siamo su una superficie e quindi la somma di tutti gli angoli vale $2\pi V$ e dunque

$$2\pi V = \pi F + \int_S K dA$$

Quanti lati ci sono? Ogni faccia ha 3 lati e ogni lato è lato di due facce e quindi

$$L = 3F/2$$

Sostituendo si ha la tesi

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(S) &= 2\pi V - 2\pi L + 2\pi F \\ &= \left(\pi F + \int_S K dA \right) - 3\pi F + 2\pi F \\ &= \int_S K dA \end{aligned}$$

□

6. Una 2-forma chiusa ma non esatta

Abbiamo detto più volte che la condizione di chiusura $d\omega = 0$ è una condizione *necessaria* per l'esattezza di una forma, ma in generale non sufficiente. Per dimostrare che una forma non è esatta abbiamo bisogno di qualche proprietà che tutte le forme esatte hanno e che è semplice da verificare.

Per esempio, nel caso della forma “argomento”, nota in Analisi

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si può dimostrare la non esattezza calcolandone l'integrale sulla circonferenza unitaria (un cammino chiuso) e usando la [Proposizione 6.6.4](#): una 1-forma è esatta se e solo se il suo integrale su ogni cammino chiuso è nullo.

Il teorema di Stokes ci permette di ottenere dei criteri simili anche per forme di grado superiore. Introduciamo un po' di terminologia per le catene singolari:

Definizione 6.1. Sia $c = \sum_i \alpha_i c_i$ una k -catena singolare definita nell'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

- c è un k -ciclo se $\partial c = 0$
- c è un k -bordo se esiste una $(k+1)$ -catena b tale che $c = \partial b$

Naturalmente ogni bordo è automaticamente un ciclo: se $c = \partial b$ allora $\partial c = \partial^2 b = 0$.

Occorre prestare attenzione al fatto che le proprietà di essere ciclo oppure bordo dipendono dal dominio U . Per esempio, la 1-catena $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

è un ciclo perché $\partial c = \{c(1)\} - \{c(0)\} = \{(1, 0)\} - \{(1, 0)\} = 0$ (ricordiamo che il bordo di un cammino è "punto finale - punto iniziale" e quindi ogni cammino chiuso è un ciclo). Questo ciclo è un bordo? Se il dominio è $U = \mathbb{R}^2$ allora c è un bordo, perché è il bordo del disco chiuso di centro l'origine e raggio 1, come abbiamo visto nell'Esempio 3.3 (oppure Esempio 3.4 se vogliamo una catena differenziabile).

Se invece consideriamo $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, allora il disco non è più una catena in U e quindi non è detto che c sia un bordo. Il teorema di Stokes dà due implicazioni immediate che aiutano a rispondere a queste domande: quando una forma chiusa è esatta? quando un ciclo è un bordo?

Teorema 6.2. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k -forma differenziale e sia c una k -catena a valori in U . Allora

- (1) Se ω è chiusa e c è un bordo, allora $\int_c \omega = 0$
- (2) Se ω è esatta e c è un ciclo, allora $\int_c \omega = 0$

Dimostrazione. Se c è un bordo, allora esiste una $(k+1)$ -catena b tale che $c = \partial b$. Allora

$$\int_c \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = \int_b 0 = 0$$

perché ω è chiusa e otteniamo la (1).

In modo analogo, se ω è esatta, allora esiste una $(k-1)$ -forma η tale che $\omega = d\eta$ e

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = \int_0 \eta = 0$$

perché c è un ciclo e otteniamo la (2). In entrambi i casi, la seconda uguaglianza è data dal teorema di Stokes. \square

Poiché verificare che una forma differenziale è chiusa oppure che una catena è un ciclo è semplice, in quanto basta calcolare la derivata esterna oppure il bordo, questo teorema dà i seguenti utili criteri

- ω chiusa e $\int_c \omega \neq 0 \implies c$ non è un bordo
- c ciclo e $\int_c \omega \neq 0 \implies \omega$ non è esatta

Riprendendo l'esempio iniziale, poniamo $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, c la circonferenza unitaria

$$c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

e

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

la forma argomento. Il calcolo ben noto dall'Analisi è

$$\int_c \omega = 2\pi \neq 0$$

e quindi:

- poiché c è un ciclo, concludiamo che ω non è esatta
- poiché ω è chiusa, concludiamo che c non è un bordo

Osserviamo che in entrambi i casi, da un'ipotesi di un tipo (topologica oppure differenziale) otteniamo una conclusione del tipo opposto (differenziale oppure topologica).

L'esistenza di una forma chiusa ma non esatta implica, per il Lemma di Poincaré generale ([Teorema 6.6.16](#)), che il dominio $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è contraibile. In questo caso, poiché stiamo usando 1-forme, possiamo usare il [Teorema 6.6.12](#) per i domini semplicemente connessi e otteniamo il risultato più forte che U non è nemmeno semplicemente connesso.

Questa conclusione topologica si può anche ottenere osservando che U è omotopicamente equivalente ad una circonferenza e una circonferenza non è semplicemente connessa perché il suo gruppo fondamentale non è banale.

Le due dimostrazioni sono ugualmente complicate: la prima usa le forme differenziali, il lemma di Poincaré e il teorema di Stokes, l'altra richiede tutta la teoria del gruppo fondamentale, la sua invarianza omotopica e il calcolo del gruppo fondamentale della circonferenza.

Per l'estensione alle dimensioni superiori, che adesso vedremo, abbiamo già gli strumenti per seguire la strada tramite Poincaré e Stokes. Consideriamo il dominio $U = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ (notiamo che U è semplicemente connesso) e la 2-forma

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy)$$

Con un calcolo diretto (anche se noioso) si verifica che $d\omega = 0$ e cioè ω è chiusa. La catena c è la usuale parametrizzazione della sfera unitaria, data da

$$c(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

sul rettangolo $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Per calcolare l'integrale, calcoliamo il pullback $c^*(\omega)$: i differenziali sono

$$dx = -\sin \varphi \sin \theta d\varphi + \cos \varphi \cos \theta d\theta$$

$$dy = \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta$$

$$dz = -\sin \theta d\theta$$

e quindi

$$dy \wedge dz = -\cos \varphi \sin^2 \theta d\varphi \wedge d\theta$$

$$dx \wedge dz = \sin \varphi \sin^2 \theta d\varphi \wedge d\theta$$

$$dx \wedge dy = (-\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta) d\varphi \wedge d\theta = -\sin \theta \cos \theta d\varphi \wedge d\theta$$

Gli addendi dell'integrale sono quindi (il denominatore vale 1 sulla sfera)

$$x dy \wedge dz = -\cos^2 \varphi \sin^3 \theta d\varphi \wedge d\theta$$

$$-y dx \wedge dz = -\sin^2 \varphi \sin^3 \theta d\varphi \wedge d\theta$$

$$z dx \wedge dy = -\sin \theta \cos^2 \theta d\varphi \wedge d\theta$$

e dunque

$$\begin{aligned} -\cos^2 \varphi \sin^3 \theta - \sin^2 \varphi \sin^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta &= -\sin^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta \\ &= -\sin \theta \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_c \omega = -\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \sin \theta d\theta = -2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -4\pi \neq 0$$

Questa particolare catena non è un ciclo, in quanto $\partial c = \{N\} - \{S\}$ dove N e S sono rispettivamente il polo nord e il polo sud ottenuti come i cammini costanti per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (i cammini $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ sono lo stesso meridiano e si cancellano, vedi [Esempio 3.6](#)) e non possiamo dunque utilizzare direttamente i criteri che si ottengono dal [Teorema 6.2](#). Se ω fosse esatta, avremmo $\omega = d\eta$, con η una 1-forma. Dunque

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = \int_N \eta - \int_S \eta = 0$$

perché l'integrale di una 1-forma su un punto (= 1-catena costante) è sempre nullo in quanto il differenziale di una funzione costante è nullo. Otteniamo quindi che ω non è esatta.

Come abbiamo osservato nell'[Esempio 3.6](#), si può parametrizzare la sfera con un vero ciclo, usando le facce di un quadrato. L'integrazione viene più

complicata (dobbiamo calcolare e sommare 6 integrali), ma il risultato finale è lo stesso perché è solo una riparametrizzazione della sfera e gli integrali sono invarianti per riparametrizzazione.

Poiché la forma ω è chiusa e l'integrale non nullo, otteniamo che la sfera unitaria *non* è un bordo in $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Inoltre, usando il Lemma di Poincaré generale (Teorema 6.6.16), concludiamo che U non è contraibile e abbiamo quindi un esempio di spazio topologico semplicemente connesso ma non contraibile. Poiché la sfera S^2 è un retratto di deformazione di U , anche la sfera è non contraibile (sappiamo bene che è semplicemente connessa). La non contraibilità della sfera era già stata enunciata in Geometria DUE, ma non dimostrata per la mancanza di strumenti topologici adeguati. La teoria delle forme differenziali fornisce questi strumenti.

Naturalmente la non contraibilità di S^2 è un fatto puramente topologico e ci possiamo chiedere se sia possibile una dimostrazione interamente nell'ambito della topologia. La risposta è sì e uno strumento possibile è la teoria dell'omologia (corso di Topologia Algebrica).

Osservazione. Perché l'integrale è venuto negativo? La parametrizzazione della sfera che abbiamo usato dà come campo normale $\mathbf{N} = c_\varphi \wedge c_\theta$ (normalizzato) il vettore che punta verso l'interno della sfera (calcolare le derivate parziali e il prodotto vettoriale per esercizio per verificare questa affermazione) e poiché la sfera è di raggio 1 il campo normale è dato in componenti da $\mathbf{N} = (-x, -y, -z)$.

Se ricordiamo il Teorema 4.2 sull'elemento d'area di una superficie, abbiamo che

$$dA = N_1 dy \wedge dz - N_2 dx \wedge dz + N_3 dx \wedge dy$$

(controllare i segni, sono giusti) e cioè

$$\omega = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dA$$

perché nella definizione di ω i segni sono opposti alle componenti del vettore normale. Dunque (sulla sfera il termine $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$)

$$\int_c \omega = -\int_c \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dA = -\int_c dA = -\text{area della sfera}$$

e quindi l'integrale viene negativo (otteniamo anche che l'area della sfera unitaria è 4π).

Questa integrazione sembra più semplice di quella che abbiamo svolto: è perché sappiamo già l'area della sfera, che si calcola proprio svolgendo l'integrale precedente.

Osservazione. Un esempio come il precedente esiste in tutte le dimensioni. Poniamo $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora esiste una $(n-1)$ -forma $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$

chiusa ma non esatta. Un esempio di tale forma è, usando le coordinate (x_1, \dots, x_n) :

$$\omega = \frac{1}{r^{n/2}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dove $r = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ e \widehat{dx}_i significa che il termine dx_i non è presente. Si calcola facilmente che $d\omega = 0$. La dimostrazione della non esattezza si fa integrando ω sulla sfera S^{n-1} usando le coordinate polari di \mathbb{R}^n (solo la parte “angolare”).

Complementi

In questo capitolo presentiamo alcuni approfondimenti ed applicazioni del formalismo delle forme differenziali ad argomenti più avanzati: il teorema di de Rham e le equazioni di Maxwell. Questi paragrafi sono solo di lettura e **NON SONO NEL PROGRAMMA D'ESAME**. Leggeteli se siete interessati a vedere cosa imparerete nei corsi dei prossimi anni.

1. Il teorema di de Rham

Il teorema di de Rham è uno degli argomenti importanti che vengono fatti nel corso di Geometria Superiore. Prerequisiti al teorema sono il corso di Istituzioni di Geometria, in cui vengono esposte la teoria delle forme differenziali, la coomologia di de Rham e il teorema di Stokes per le varietà differenziabili (generalizzando i risultati visti in questo corso) e il corso di Topologia Algebrica, in cui vengono sviluppate in generale le teorie omologiche e coomologiche, di cui la coomologia di de Rham che abbiamo definito nel [paragrafo 6.4](#) è un esempio particolarmente significativo. In questo paragrafo vediamo l'enunciato del teorema di de Rham, ma naturalmente non la dimostrazione.

Prima della dimostrazione del teorema di Stokes abbiamo osservato la somiglianza fra le proprietà $d^2 = 0$ e $\partial^2 = 0$. Per interpretarne correttamente il significato, occorre sviluppare l'appropriato ambito algebrico. Qui di seguito diamo alcuni dettagli di questa costruzione.

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ fissato. Negli spazi vettoriali $\Omega^k(U)$ delle forme differenziali, abbiamo individuato due sottospazi,

$$Z^k(U) = \ker d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U) = k\text{-forme su } U \text{ chiuse}$$

$$B^k(U) = \text{Im } d : \Omega^{k-1}(U) \rightarrow \Omega^k(U) = k\text{-forme su } U \text{ esatte}$$

La proprietà $d^2 = 0$ implica che $B^k(U)$ è un sottospazio di $Z^k(U)$ e si può quindi considerare lo spazio vettoriale quoziente

$$H_{dR}^k(U) = Z^k(U)/B^k(U)$$

detto k -esimo gruppo di coomologia di de Rham ([Definizione 6.4.1](#)).

Anche l'insieme di tutte le catene singolari su U forma un gruppo. Per avere la giusta costruzione dobbiamo considerare catene a coefficienti *reali*. Definiamo

$$C_k(U, \mathbb{R}) = \left\{ c = \sum_i a_i c_i \mid c_i \text{ } k\text{-cubo singolare, } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

In questo modo $C_k(U, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale e i suoi elementi sono detti *catene singolari a coefficienti reali*. Poiché in questo paragrafo considereremo solo questo tipo di catene, le chiameremo semplicemente catene reali. La definizione di integrale di una k -forma su una k -catena reale è la stessa data per le catene a coefficienti interi. Se $c = \sum_i a_i c_i$ allora

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega$$

In analogia alla definizione di forme chiuse ed esatte, possiamo considerare i due sottospazi vettoriali di $C_k(U, \mathbb{R})$ nucleo ed immagine della mappa bordo ∂

$$Z_k(U, \mathbb{R}) = \ker \partial : C_k(U, \mathbb{R}) \rightarrow C_{k-1}(U, \mathbb{R}) = k\text{-cicli}$$

$$B_k(U, \mathbb{R}) = \text{Im } \partial : C_{k+1}(U, \mathbb{R}) \rightarrow C_k(U, \mathbb{R}) = k\text{-bordi}$$

Naturalmente $\partial^2 = 0$ implica che $B_k(U, \mathbb{R}) \subseteq Z_k(U, \mathbb{R})$ e possiamo quindi formare lo spazio vettoriale quoziente:

$$H_k(U, \mathbb{R}) = Z_k(U, \mathbb{R})/B_k(U, \mathbb{R})$$

che viene detto k -esimo gruppo di omologia singolare (a coefficienti reali).

Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una forma fissata. La funzione

$$\int_- \omega : C_k(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c \mapsto \int_c \omega$$

è lineare perché l'integrale è lineare rispetto al dominio di integrazione (per definizione di integrale su una catena) e cioè è un elemento dello spazio

vettoriale duale $C_k(U, \mathbb{R})^*$. Dunque ad ogni forma associamo un elemento del duale e cioè abbiamo una funzione

$$\int : \Omega^k(U) \rightarrow C_k(U, \mathbb{R})^*$$

$$\omega \mapsto \int_- \omega$$

che è lineare perché l'integrale è lineare rispetto all'integrando.

Gli spazi vettoriali $\Omega^k(U)$ e $C_k(U, \mathbb{R})$ sono di dimensione infinita e non sono in generale interessanti. Restringiamoci quindi al sottospazio $Z^k(U)$ delle forme chiuse e integriamo solo sui cicli: abbiamo una funzione

$$\int : Z^k(U) \rightarrow Z_k(U, \mathbb{R})^*$$

$$\omega \mapsto \int_- \omega$$

Cosa capita se ω è esatta? Se $\omega = d\eta$, per il teorema di Stokes si ha

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0$$

perché integriamo solo sui *cicli*: $\partial c = 0$. Dunque le forme esatte sono contenute nel nucleo dell'integrale e quindi la funzione passa al quoziente e cioè possiamo scrivere

$$\int : Z^k(U)/B^k(U) \rightarrow Z_k(U, \mathbb{R})^*$$

Cosa capita se c è un bordo? Se $c = \partial b$, dove $b \in C_{k+1}(U, \mathbb{R})$ di nuovo per il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\int_c \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0$$

perché consideriamo solo forma *chiuse*: $d\omega = 0$. Dunque l'integrale si annulla sul sottospazio dei bordi e cioè definisce una funzione lineare sul quoziente $Z_k(U, \mathbb{R})/B_k(U, \mathbb{R})$. In conclusione, dal teorema di Stokes si ottiene che l'integrale fornisce una funzione lineare

$$\int : H_{dR}^k(U) \rightarrow (H_k(U, \mathbb{R}))^*$$

fra la coomologia di de Rham e (il duale del)l'omologia singolare.

Tutta questa teoria può essere generalizzata al caso di una varietà differenziabile M definendo le forme differenziali e le catene singolari su M . Il culmine è dato dal famoso

Teorema 1.1 (Teorema di de Rham). *Se M è una varietà differenziabile, la funzione lineare*

$$\int : H_{dR}^k(M) \rightarrow (H_k(M, \mathbb{R}))^*$$

è un isomorfismo e cioè la coomologia di de Rham è il duale dell'omologia singolare.

L'importanza di questo teorema è che la coomologia di de Rham è definita tramite la struttura differenziabile mentre l'omologia singolare è una costruzione puramente topologica. Si può infatti dimostrare che i gruppi di omologia costruiti a partire dalle catene differenziabili sono isomorfi a quelli costruiti a partire dalle catene continue. Dunque è possibile “vedere” proprietà topologiche usando strumenti differenziabili e, dualmente, la struttura topologica impone vincoli alle possibili strutture differenziabili.

2. Le equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell descrivono il comportamento del campo elettromagnetico e sono uno dei grandi trionfi della Fisica dell'Ottocento. Il loro studio ha messo in luce per la prima volta che lo spazio-tempo non è euclideo e questa è stata una delle ispirazioni per la relatività speciale di Einstein. Nel corso del Novecento, le equazioni di Maxwell si sono rivelate un caso particolare di teorie più generali (teorie di gauge, equazioni di Yang-Mills) che sono di studio corrente nella fisica contemporanea. Le equazioni di Maxwell sono studiate nel corso di Fisica 2 e compaiono anche in corsi più avanzati di Fisica Matematica. In questo paragrafo facciamo vedere come, usando il formalismo delle forme differenziali e in particolare l'operatore $*$ di Hodge, si possano scrivere le equazioni di Maxwell in una forma particolarmente semplice.

Per scrivere le equazioni di Maxwell dobbiamo per prima cosa rivedere la definizione dell'operatore $*$ di Hodge. La definizione che abbiamo visto nel [sotto-paragrafo 6.5.1](#) è corretta ma incompleta: per definire l'operatore $*$ occorre fissare una forma bilineare simmetrica non degenera sullo spazio vettoriale considerato. Il caso visto in precedenza è quello di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare euclideo standard, il caso che servirà per scrivere le equazioni di Maxwell è lo spazio-tempo \mathbb{R}^4 con la metrica non-euclidea di Minkowski della relatività speciale.

Vediamo dunque prima la definizione generale di operatore $*$ e poi la scrittura delle equazioni di Maxwell.

2.1. L'operatore $*$ di Hodge. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $\langle -, - \rangle$ una forma bilineare, simmetrica e non degenera

che chiameremo *prodotto interno* (e non prodotto scalare perché non è necessariamente definito positivo). Dal Teorema di Sylvester sappiamo che possiamo trovare una base ortonormale e poiché la forma è non degenere, sulla diagonale ci sono solo 1 e -1 . Fissiamo dunque una tale base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ per cui

$$\begin{cases} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1 & \text{per } i = 1, \dots, k \\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = -1 & \text{per } i = k+1, \dots, n \\ \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

Chiamiamo (x_1, \dots, x_n) le coordinate relative a questa base, in modo che $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ è una base per lo spazio vettoriale duale V^* . Definiamo su V^* un prodotto interno con le formule

$$\begin{cases} \langle dx_i, dx_i \rangle = 1 & \text{per } i = 1, \dots, k \\ \langle dx_i, dx_i \rangle = -1 & \text{per } i = k+1, \dots, n \\ \langle dx_i, dx_j \rangle = 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

in modo che l'isomorfismo $V \rightarrow V^*$ dato da $\mathbf{e}_i \mapsto dx_i$ rispetta i prodotti interni. Diciamo che un prodotto interno come quello dato ha segnatura $(\underbrace{+\dots+}_{k \text{ volte}} \underbrace{-\dots-}_{n-k \text{ volte}})$.

Un prodotto scalare è definito positivo e quindi ha segnatura $(+\dots+)$. Il caso che studieremo in dettaglio per le equazioni di Maxwell avrà segnatura $(+ - - -)$ su \mathbb{R}^4 .

Il prodotto interno su V^* induce un prodotto interno sulle potenze esterne $\bigwedge^k V^*$ nel modo seguente: se $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ e $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ poniamo

$$\langle dx_I, dx_J \rangle = \det (\langle dx_{i_\alpha}, dx_{j_\beta} \rangle), \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq k$$

Poiché la base $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ è ortonormale, se esiste un indice i_α che non compare in dx_J , la riga corrispondente nella matrice è tutta nulla e quindi il determinante è zero. Questo mostra che dobbiamo solo calcolare $\langle dx_I, dx_I \rangle$: in questo caso la matrice dei prodotti interni è diagonale e ci sono solo 1 e -1 a seconda degli elementi in dx_I . Dunque la base $\{dx_I\}$ di $\bigwedge^k V^*$ è ortonormale e si hanno le formule

$$\begin{cases} \langle dx_I, dx_I \rangle = \prod_{\alpha=1}^k \langle dx_{i_\alpha}, dx_{i_\alpha} \rangle = \pm 1 \\ \langle dx_I, dx_J \rangle = 0 & \text{per } I \neq J \end{cases}$$

Possiamo adesso definire l'operatore $*$ di Hodge relativo al prodotto interno fissato.

Definizione 2.1. Sia $\beta \in \bigwedge^k V^*$. Allora $*\beta \in \bigwedge^{n-k} V^*$ è l'unico elemento tale che per ogni $\alpha \in \bigwedge^k V^*$

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Capiamo il senso della definizione e vediamo delle formule esplicite per calcolare l'operatore $*$. Per linearità possiamo porre $\alpha = dx_I$, $\beta = dx_J$. Se $\alpha = \beta = dx_I$ allora il monomio $*dx_I = *\beta$ deve essere il monomio complementare a $*dx_I = \alpha$, in modo da avere la parte dei differenziali corretta e poi dobbiamo prendere il segno appropriato, in base al prodotto interno e all'ordine in cui scriviamo i differenziali. Si ottiene

$$*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = (-1)^\sigma \langle dx_I, dx_I \rangle (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}})$$

dove $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_{n-k}$, σ è la permutazione

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{array} \right)$$

e $(-1)^\sigma$ è il segno della permutazione. Se il prodotto interno è un prodotto scalare (definito positivo), allora questa definizione è la stessa che abbiamo dato in precedenza, altrimenti il segno di $\langle dx_I, dx_I \rangle$ compare nel risultato finale.

Se $I \neq J$, allora $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ e anche il monomio complementare a $dx_J = \beta$ ha un differenziale in comune con $dx_I = \alpha$ e quindi entrambi i membri sono nulli e l'uguaglianza vale.

Chiudiamo questo paragrafo scrivendo in modo esplicito tutte le formule dell'operatore $*$ per lo spazio di Minkowski, che è l'unico caso che useremo nel seguito.

Lo spazio di Minkowski è lo spazio \mathbb{R}^4 , con coordinate tradizionalmente scritte (t, x, y, z) , dove t è la coordinata *temporale* e (x, y, z) sono le coordinate *spaziali*. Il prodotto interno sul duale è definito da

$$\langle dt, dt \rangle = 1, \quad \langle dx, dx \rangle = \langle dy, dy \rangle = \langle dz, dz \rangle = -1$$

Calcoliamo $*dt$: la permutazione è l'identità (segno +1) e il prodotto interno è +1 e dunque

$$*dt = dx \wedge dy \wedge dz$$

come nel caso standard. Invece per $*dx$ la permutazione è

$$\sigma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

che ha segno -1 , ma anche $\langle dx, dx \rangle = -1$ e quindi

$$*dx = dt \wedge dy \wedge dz$$

opposto al caso di \mathbb{R}^4 con il prodotto scalare euclideo. Calcolando allo stesso modo tutti i termini si ha

$$\begin{aligned} *dt &= dx \wedge dy \wedge dz \\ *dx &= dt \wedge dy \wedge dz \\ *dy &= -dt \wedge dx \wedge dz \\ *dz &= dt \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

Il calcolo per le 2-forme è analogo: se ci sono due differenziali “spaziali”, allora il prodotto interno vale 1 e la formula è la stessa di quella standard, se invece c’è un differenziale “spaziale” e il differenziale “temporale” il segno è opposto al caso euclideo. La tabella completa è

$$\begin{aligned} *(dt \wedge dx) &= -dy \wedge dz \\ *(dt \wedge dy) &= dx \wedge dz \\ *(dt \wedge dz) &= -dx \wedge dy \\ *(dx \wedge dy) &= dt \wedge dz \\ *(dx \wedge dz) &= -dt \wedge dy \\ *(dy \wedge dz) &= dt \wedge dx \end{aligned}$$

Come per il caso di un prodotto scalare, iterare due volte l’operatore $*$ dà l’identità a meno del segno e la formula esatta è

$$**\omega = (-1)^{k(n-k)} s \omega$$

dove s è il *segno* del prodotto interno e cioè il determinante della matrice che lo rappresenta. Per un prodotto scalare $s = 1$, mentre per lo spazio di Minkowski, di segnatura $(+ \ - \ - \ -)$ si ha $s = -1$. Usando questo, è immediato calcolare $*$ per le 3-forme: per le 1-forme il fattore $k(n-k) = 1 \cdot 3 = 3$ è dispari e dà un segno negativo. Anche s è negativo e dunque per lo spazio di Minkowski, $**\omega = \omega$ per una 1-forma. Dalla tabella per le 1-forme si ottiene dunque

$$\begin{aligned} *(dx \wedge dy \wedge dz) &= dt \\ *(dt \wedge dy \wedge dz) &= dx \\ *(dt \wedge dx \wedge dz) &= -dy \\ *(dt \wedge dx \wedge dy) &= dz \end{aligned}$$

2.2. Le equazioni di Maxwell. Consideriamo ancora \mathbb{R}^4 come prima con base $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ con coordinate (t, x, y, z) . In particolare usiamo la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ per la parte “spaziale”. Il campo elettrico e il campo magnetico sono due campi vettoriali su \mathbb{R}^3 dati in componenti da

$$\mathbf{E} = E_1 \mathbf{i} + E_2 \mathbf{j} + E_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k},$$

dove però le componenti E_i, B_j dipendono anche dal tempo, e sono cioè funzioni del tipo $E_i = E_i(t, x, y, z), B_j = B_j(t, x, y, z)$. Quindi dovremmo scrivere più correttamente

$$\mathbf{E} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{B} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Usando la notazione tradizionale

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

la divergenza di un campo si scrive come un prodotto scalare

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

e il rotore come un prodotto vettoriale

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_2}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

In questa notazione le equazioni di Maxwell sono

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Legge di Gauss per il campo magnetico}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Legge di Faraday}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{Legge di Gauss per il campo elettrico}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J} \quad \text{Legge di Ampère-Maxwell}$$

dove ρ = carica elettrica e \mathbf{J} è la corrente elettrica. La prima legge di Gauss dice che non esistono monopoli magnetici, la seconda legge di Gauss che il flusso del campo elettrico dipende dalle cariche presenti. La legge di Faraday afferma che una variazione del campo magnetico produce una corrente elettrica (il rotore del campo elettrico), e la legge di Ampère-Maxwell che una variazione di campo elettrico o la presenza di una corrente elettrica producono campo magnetico.

In questa formulazione la coordinata temporale e le coordinate spaziali hanno ruoli distinti e le leggi non hanno una forma particolarmente simmetrica. Introduciamo una 2-forma, la *forma di Faraday*

$$\mathbf{F} = B_1 dy \wedge dz - B_2 dx \wedge dz + B_3 dx \wedge dy + E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt$$

Osserviamo che possiamo scrivere \mathbf{F} in una forma più comprensibile come

$$\mathbf{F} = *_s \mathbf{B}^b + \mathbf{E}^b \wedge dt$$

dove $*_s$ è l'operatore di Hodge sulle variabili "spaziali" e anche \mathbf{B}^b e \mathbf{E}^b sono 1-forme "spaziali".

Calcoliamo la 3-forma $d\mathbf{F}$: facendo i calcoli direttamente con la definizione si ottiene

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} dx + \frac{\partial B_1}{\partial y} dy + \frac{\partial B_1}{\partial z} dz + \frac{\partial B_1}{\partial t} dt \right) \wedge dy \wedge dz + \dots \\ &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right) dx \wedge dy \wedge dt + \dots \end{aligned}$$

e dunque l'equazione $d\mathbf{F} = 0$ corrisponde alle prime due equazioni di Maxwell.

Per trovare le altre due, definiamo la 1-forma

$$\mathbf{J} = \rho dt - J_1 dx - J_2 dy - J_3 dz$$

dove ρ è la carica elettrica presente e (J_1, J_2, J_3) sono le componenti della corrente. Allora, calcolando l'operatore $*$ di Hodge rispetto alla metrica di Minkowski (con le formule date nel paragrafo precedente), la terza e la quarta equazione di Maxwell corrispondono all'uguaglianza di 3-forme

$$d(*\mathbf{F}) = 4\pi(*\mathbf{J})$$

Anche qui, per verificare questa affermazione, basta calcolare $*\mathbf{F}$ e poi calcolare tutte le derivate necessarie. Dunque in termini della forma di Faraday le equazioni sono più semplici da scrivere e rivelano anche una certa simmetria, maggiore di prima

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= 0 \\ d(*\mathbf{F}) &= 4\pi(*\mathbf{J}) \end{aligned}$$

