La proprietà caratteristica di una retta è avere <u>direzione</u> costante (1)

Quindi cerchiamo di misurare il cambiamento di direzione

Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ param x arcolungh.

$\alpha'(s)$ ha modulo costante $\equiv 1$

<u>Definizione</u> la funzione

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

è detta <u>curvatura</u> di $\alpha(s)$.

<u>Esempi</u>

- $\alpha(s)$ è (parte) di una retta
  $\Longleftrightarrow k(s) = 0 \quad \forall s \in I$

<u>dimostr.</u>

$\Longrightarrow$ sia $\alpha(s) = P_0 + s\underline{v}$

$\longrightarrow \alpha'(s) = \underline{v}$ (costante)

$\longrightarrow \alpha''(s) = 0 \Longrightarrow k(s) \equiv 0$

$\Leftarrow \quad k(s) \equiv 0 \longrightarrow \alpha''(s) \equiv 0$ ②

$\alpha'(s) = \underline{v}$ (costante)

$\alpha(s) = P_0 + s\underline{v} \longrightarrow$ retta

• circonferenza (di raggio r)

$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$

$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

$\|\alpha'(t)\| = r$

$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = rt$

$t(s) = s/r$

$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$

è param. x arcolun.

$\beta'(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$

(in effetti $\|\beta'(s)\| \equiv 1$)

$\beta''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right)$

$\Rightarrow \boxed{k(s) \equiv 1/r}$

Esercizio trovare la curvatura dell'elica.

—o—

$$\begin{tikzcd} I_s \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^3 \\ J_\sigma \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$\sigma = \varphi(s)$ cambio di param.

$$\boxed{\alpha(s) = \beta(\varphi(s)) = \beta(\sigma)}$$

$\alpha(s), \beta(\sigma)$ = entrambe arcolungh.

$$1 \equiv \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\beta}{d\sigma} \cdot \frac{d\varphi}{ds} \right\| = \underbrace{\left\| \frac{d\beta}{d\sigma} \right\|}_{\equiv 1} \cdot \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| =$$

$$= |\varphi'(s)|$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi'(s) = \pm 1$$

poiché φ' è continua $\Longrightarrow$ φ' costante

$\varphi'(s) \equiv 1$ oppure $\varphi'(s) \equiv -1$

Quindi:

$$\varphi(s) = \pm s + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Definizione se $\alpha(t)$, $\beta(\tau)$ sono curve param equivalenti, (4)

$$\tau = \varphi(t) \longrightarrow \alpha(t) = \beta(\varphi(t))$$

si dice che:

- α e β hanno la stessa orientazione se $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in I$
- α e β hanno orientazione opposta se $\varphi'(t) < 0 \quad \forall t \in I$

Dunque: $\alpha(s)$, $\beta(\sigma)$ param x arcolungh.

- α e β hanno la stessa orientazione:

$$\alpha'(s) = \beta'(\sigma), \quad \alpha''(s) = \beta''(\sigma)$$

- α e β hanno orient. opposta:

$$\alpha'(s) = -\beta'(\sigma), \quad \alpha''(s) = \beta''(\sigma)$$

$\longrightarrow$ $k(s)$ non dipende dalla param. per arcolunghezza usata per calcolarla

Sia $\alpha(s)$ param x arcolength.

$\alpha'(s) = \underline{t}(s) =$ vettore tangente

Definizione $\alpha(s)$ si dice biregolare se è regolare e $\boxed{k(s) > 0}$.

posso definire:

$$\underline{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \cdot \alpha''(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

= vettore normale

$\underline{t}$ e $\underline{n}$ sono perpendicolari

Lemma Sia $\underline{v} : I \to \mathbb{R}^3$ una funzione vettoriale tale che $\|v(t)\| =$ costante

Allora: $\underline{v}(t) \perp \underline{v}'(t) \quad \forall t \in I$

Dimostrazione

Ipotesi: $\underline{v}(t) \cdot \underline{v}(t) = c$

derivo: $\underline{v}' \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v}' \equiv 0$

$\longrightarrow 2\,\underline{v} \cdot \underline{v}' = 0 \longrightarrow \underline{v} \perp \underline{v}'$ ∎

Quindi: $\underline{t} = \alpha'(s)$ ha norma costante

$\Longrightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s)$

$\Longrightarrow$ $\underline{t}(s)$ e $\underline{n}(s)$ sono perpendicolari

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ param x arco lungh.
α <u>biregolare</u>.

Possiamo definire $\forall s \in I$ una <u>terna ortonormale</u>:

- $\underline{t}(s) = \alpha'(s)$ vettore <u>tangente</u>
- $\underline{n}(s) = \frac{1}{k(s)} \cdot \alpha''(s)$ vettore <u>normale</u>
- $\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)$ vettore <u>binormale</u>

$\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ si dice
<u>triedro di Frenet</u>

Il piano generato da $\langle \underline{t}(s), \underline{n}(s) \rangle$

si dice <u>piano osculatore</u>.

Lemma supponiamo α curva (bireg) piana. Allora:

- il piano osculatore è costante ed è il piano che contiene la curva.

dimostrazione

La curva sta nel piano di equazione:

$$(X - P_0) \cdot \underline{v} = 0$$

$$\to \quad \underline{(\alpha(s) - P_0) \cdot \underline{v}} \equiv 0 \quad \forall s \in I$$

deriviamo:

- $\alpha'(s) \cdot \underline{v} \equiv 0$
- $\alpha''(s) \cdot \underline{v} \equiv 0$

$\to$ i vettori $\underline{t}(s)$, $\underline{n}(s) \perp \underline{v}$

$\to$ il piano generato da $\underline{t}$, $\underline{n}$ è costante, perpendicolare a $\underline{v}$.

($\underline{v}$ è un multiplo di $\underline{b}$) ∎

Quindi ha interesse studiare la (8)
variazione del piano osculatore
$\longrightarrow$ la variazione di $\underline{b}(s)$.

$$\underline{b}'(s) = \left(\underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)\right)' =$$

$$= \underline{t}' \wedge \underline{n} + \underline{t} \wedge \underline{n}' =$$

$$= \cancel{k\,\underline{n} \wedge \underline{n}} + \underline{t} \wedge \underline{n}' =$$

$$= \underline{t} \wedge \underline{n}'$$

<u>Si ha</u>: $\underline{b}' \perp \underline{t}$ (per il calcolo appena fatto)

$\underline{b}' \perp \underline{b}$ (perché ha norma costante)

$\Longrightarrow$ $\underline{b}'$ è parallelo a $\underline{n}$

quindi possiamo scrivere:

$$\underline{b}'(s) = -\tau(s)\,\underline{n}(s)$$

dove $-\tau(s)$ = coefficiente di proporz.

$\tau(s)$ = <u>torsione</u> della curva α

$$\boxed{\tau(s) = -\underline{b}'(s) \cdot \underline{n}(s)}$$

Proposizione: α curva biregolare

α è piana $\Longleftrightarrow$ $\tau(s) \equiv 0$ $\forall s \in I$

dimostrazione

$\Longrightarrow$ già fatto: il lemma di prima dice piana $\Rightarrow$ $\underline{b}$ costante

$\Rightarrow \underline{b}' \equiv 0 \Rightarrow \tau \equiv 0$

$\Longleftarrow$ $\tau \equiv 0 \Rightarrow \underline{b}' \equiv 0 \Rightarrow \underline{b}$ costante

adesso dimostriamo che la curva sta in questo piano.

sia $s_0 \in I$, $P_0 = \alpha(s_0)$

$$g(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \underline{b}$$

- $g(s_0) = (\alpha(s_0) - \alpha(s_0)) \cdot \underline{b} = 0$
- $g'(s) = \alpha'(s) \cdot \underline{b} =$

$= \underline{t}(s) \cdot \underline{b} = 0$

perché $\underline{t}(s) \perp \underline{b}$

$\rightarrow$ $g(s)$ è costante $\rightarrow$ $g(s) \equiv 0$.

Questo significa che la curva α è contenuta nel piano $(X - \alpha(s_0)) \cdot \underline{b} = 0$ e quindi è piana.

Formule di Frenet

calcoliamo $\underline{n}'$:

$$\underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n} \longrightarrow \underline{n} = \underline{b} \wedge \underline{t}$$

$$\underline{n}' = \underline{b}' \wedge \underline{t} + \underline{b} \wedge \underline{t}' =$$

$$= -\tau \underline{n} \wedge \underline{t} + \underline{b} \wedge k \underline{n} =$$

$$= -k \underline{t} + \tau \underline{b}.$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} \underline{t}' = & k \underline{n} & \\ \underline{n}' = -k \underline{t} & & + \tau \underline{b} \\ \underline{b}' = & -\tau \underline{n} & \end{cases}$$

Formule di Frenet

Formule per parametro qualunque (11)

$$\begin{array}{ccc} I_t & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ s(t) \downarrow \uparrow t(s) & \nearrow_{\beta} & \\ J_s & & \end{array}$$

$$\boxed{\alpha(t) = \beta(s(t))}$$

β x arcolungh.

$(\dot{\ }) =$ derivata rispetto a t

$(\ )' =$ derivata rispetto a s

$\beta'(s) = \beta' = \underline{t}$

$\dot{\alpha}(t) = \underbrace{\beta' \cdot \dot{s}} = \dot{s} \cdot \underline{t}$ ⟸ tra vettori

$\dot{s} = \|\dot{\alpha}(t)\| =$ velocità scalare

$$\boxed{\dot{\alpha} = \dot{s}\,\underline{t}}$$

$$\ddot{\alpha} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s} \cdot (\dot{\underline{t}}) =$$

$$= \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s} \cdot \underline{t}' \cdot \dot{s} =$$

$$= \ddot{s}\,\underline{t} + (\dot{s})^2 \cdot k\,\underline{n}$$

$$\boxed{\ddot{\alpha} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}^2 k\,\underline{n}}$$

$$\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} = \dot{s}^3 \cdot k \cdot \underline{b}$$

$$\| \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \| = \dot{s}^3 \cdot k$$

$$\longrightarrow \boxed{k = \frac{\| \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \|}{\| \dot{\alpha} \|^3}}$$

per trovare τ : si deriva ancora:

$$\dddot{\alpha} = (\quad) \underline{t} + (\quad) \underline{n} + (\dot{s})^3 k \tau \, \underline{b}$$

$$\longrightarrow (\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha} = (\dot{s})^6 \cdot k \cdot \tau$$

$$\longrightarrow \boxed{\tau = \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha}}{\| \dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \|^2}}$$