Teorema Fondamentale della teoria locale delle curve

1

Sia $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ bireg., param x arclun

$\{ \underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s) \}$ triedro di Frenet

$$\begin{cases} \underline{t}'(s) = k(s)\,\underline{n}(s) \\ \underline{n}'(s) = -k(s)\,\underline{t}(s) + \tau(s)\,\underline{b}(s) \\ \underline{b}'(s) = -\tau(s)\,\underline{n}(s) \end{cases}$$

dove: $k(s) = \| \underline{t}'(s) \|$

$\tau(s) = -\underline{b}'(s) \cdot \underline{n}(s)$

Scriviamo:

$$Q = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & t_3(s) \\ n_1(s) & n_2(s) & n_3(s) \\ b_1(s) & b_2(s) & b_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \\ \underline{b} \end{bmatrix}$$

i vettori $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ sono le righe di Q

Frenet:

$$\frac{dQ}{ds} \cdot Q^t = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} = A(s)$$

Proposizione: sia $\beta: I \to \mathbb{R}^3$ biireg, (2) param x arc lun, sia $\alpha(s)$ ottenuta da $\beta(s)$ mediante traslazioni e rotazioni

Allora $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ hanno la stessa curvatura e torsione.

dim.

traslazioni: sia $\underline{v}$ vettore fissato

$$\alpha(s) = \beta(s) + \underline{v}$$

$$\longrightarrow \quad \alpha' = \beta', \quad \alpha'' = \beta'', \dots$$

$\|\beta'(s)\| \equiv 1 \Rightarrow \|\alpha'(s)\| = 1 \Rightarrow \alpha$ param x arc lun.

$$k_\alpha = \|\alpha''(s)\| = \|\beta''(s)\| = k_\beta$$

inoltre: $\underline{t}_\alpha = \underline{t}_\beta, \quad \underline{n}_\alpha = \underline{n}_\beta$

$$\Rightarrow \underline{b}_\alpha = \underline{b}_\beta \Rightarrow \tau_\alpha = \tau_\beta$$

- rotazioni

$$\alpha = M \cdot \beta$$

M = matrice ortogonale 3×3, $\det M = 1$

cioè $M^{-1} = M^t \quad (M \cdot M^t = Id)$

α, β = vettori colonna

Q = ha $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ in riga.

notando la curva β si ha che:

$$\boxed{\underline{t}_\alpha = M\underline{t}_\beta, \quad \underline{n}_\alpha = M\underline{n}_\beta, \quad \underline{b}_\alpha = M\underline{b}_\beta}$$

queste 3 relazioni si scrivono:

$$Q_\alpha = Q_\beta \cdot M^t$$

Si ha:

$$\boxed{\frac{dQ_\alpha}{ds} \cdot Q_\alpha^t} = \frac{d(Q_\beta M^t)}{ds} \cdot (Q_\beta M^t)^t =$$

$$= \left(\frac{dQ_\beta}{ds} \cdot M^t\right) \cdot \left(M Q_\beta^t\right) =$$

$$= \boxed{\frac{dQ_\beta}{ds} \cdot Q_\beta^t}$$

che è la tesi ∎

Osserviamo:

- β param x arclun $\Rightarrow$ $\alpha = M\beta$ param x arclun

$$\alpha' = M\beta' \Rightarrow \|\alpha'\| = \|M \cdot \beta'\| = \|\beta'\|$$

perché M è matrice ortogonale (4)

inoltre si ha:

- $\underline{t}_\alpha = M\,\underline{t}_\beta$ (vera per M ort.)
- $\underline{t}'_\alpha = M\,\underline{t}'_\beta \implies k_\alpha\,\underline{n}_\alpha = M(k_\beta\,\underline{n}_\beta)$

M ortogonale $\implies$

$$\| k_\alpha\,\underline{n}_\alpha \| = \| k_\beta\,\underline{n}_\beta \|$$

$\implies \boxed{k_\alpha = k_\beta}$ e $\boxed{\underline{n}_\alpha = M\,\underline{n}_\beta}$

$\implies$ k invariante per trasl, rot, riflessioni

Invece:

$$\boxed{\underline{b}_\alpha} = \underline{t}_\alpha \wedge \underline{n}_\alpha = M\underline{t}_\beta \wedge M\,\underline{n}_\beta =$$
$$= (\det M)\cdot M(\underline{t}_\beta \wedge \underline{n}_\beta)$$
$$= \boxed{(\det M)\cdot M\,\underline{b}_\beta}$$

Quindi:

M ortogonale, $\det M = 1 \implies k_\alpha = k_\beta$, $\tau_\alpha = \tau_\beta$

M ortogonale, $\det M = -1 \implies k_\alpha = k_\beta$, $\tau_\alpha = -\tau_\beta$

Proprietà generale del prodotto vettoriale:

M matrice ortogonale:

per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$M\underline{v} \wedge M\underline{w} = (\det M) \cdot M(\underline{v} \wedge \underline{w})$$

la terna 1 $= \{M\underline{v}, M\underline{w}, M\underline{v} \wedge M\underline{w}\}$

è sempre orientata positivamente

anche: $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}\}$ positiva

$\rightarrow$ 2 $= \{M\underline{v}, M\underline{w}, M(\underline{v} \wedge \underline{w})\}$ positiva o negativa?

dipende da $\det M$.

poiché in 1 e 2 i primi due vettori sono gli stessi, il terzo vettore ha un fattore $\det M$ per compensare l'orientamento.

Teorema fondamentale

Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(s) > 0 \quad \forall s \in I$.

Supponiamo $0 \in I$.

Per ogni $P_0 \in \mathbb{R}^3$, per ogni base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ orientata positivamente esiste: una e una sola curva $\beta(s)$, diff, biReg, param x arco sull'intervallo I tale che:

① $k_\beta(s) = f(s), \quad \tau_\beta(s) = g(s)$

② $\beta(0) = P_0$, $\begin{cases} \underline{t}(0) = \underline{e}_1 \\ \underline{n}(0) = \underline{e}_2 \\ \underline{b}(0) = e_3 \end{cases}$

Si usa il teorema di esistenza e unicità globale per sistemi di eq. differenziali lineari

Dimostrazione del teorema fondamentale

Passo 1: determinare il triedro

Scriviamo tre "sistemi di Frenet"

$$\begin{cases} t_i'(s) = f(s)\, n_i(s) \\ n_i'(s) = -f(s)\, t_i(s) + g(s)\, b_i(s) \\ b_i'(s) = -g(s)\, n_i(s) \end{cases}$$

$i = 1,2,3$ dove $\underline{t}(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$

e così via sono le incognite del sistema

e $f(s), g(s)$ sono i coefficienti.

Con le cond. iniziali

$$\underline{t}(0) = \underline{e}_1, \quad \underline{n}(0) = \underline{e}_2, \quad \underline{b}(0) = e_3$$

$\longrightarrow$ i sistemi hanno soluzione globale unica.

$\Rightarrow$ otteniamo 3 funzioni vettoriali (8)

$\underline{t}, \underline{n}, \underline{b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché i coeff del sistema sono di classe $\mathcal{C}^\infty$)

che sono soluzioni del sistema di Frenet.

Passo 2: ortonormalità del triedro

Scriviamo come prima:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \underline{t}(s) \\ \underline{n}(s) \\ \underline{b}(s) \end{bmatrix} \quad \text{vettori in riga}$$

tesi: $Q(s)$ è una matrice ortogonale con $\det = 1$ per ogni $s \in I$

scriviamo

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix}$$

allora:

$$\frac{dQ}{ds} = A(s) \cdot Q(s) \qquad \forall s \in I$$

(questo è il sistema di cui Q è soluzione scritto in forma matriciale)

Vogliamo dimostrare: (9)

$$Q^t(s) \cdot Q(s) = I_3 \quad \forall s \in I$$

Consideriamo quindi la funzione matriciale:

$$\varphi(s) = Q^t(s) \cdot Q(s)$$

- $\varphi(0) = Q^t(0) \cdot Q(0) = [e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$

$= I_3$ perché e_1, e_2, e_3 base ortonormale (positiva).

- $\varphi'(s) = \left(\frac{dQ}{ds}\right)^t \cdot Q + Q^t \cdot \frac{dQ}{ds} =$

$= (AQ)^t \cdot Q + Q^t \cdot (AQ) =$

$= Q^t \cdot A^t \cdot Q + Q^t \cdot A \cdot Q =$

$= Q^t \cdot \underbrace{(A^t + A)}_{\equiv 0} \cdot Q \equiv 0$

$\rightarrow \varphi$ è costante $\rightarrow \forall s \in I \quad \varphi(s) = I_3$

$\rightarrow$ perciò: $\forall s \in I \quad Q^t(s) \cdot Q(s) = I_3$

$\rightarrow Q(s)$ ortogonale per ogni $s \in I$

$\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ sono una terna ortonormale.

- $\det Q(0) = 1$
- $\det Q(s) = \pm 1 \quad \forall s$
- $\det Q(s)$ è una funzione continua

$\Rightarrow$ $\det Q(s)$ costante $\Rightarrow \det Q(s) \equiv 1$

cioè la terna $\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ è sempre orientata positivamente.

Passo 3 la curva $\underline{\beta}$

β avrà triedro i vettori $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$ trovati prima. Scriviamo

$$\boxed{\beta(s) = P_0 + \int_0^s \underline{t}(u)\,du}$$

Dimostriamo ora che β è la curva della tesi del teorema.

Indichiamo con $\underline{t}_\beta, \underline{n}_\beta, \underline{b}_\beta$ il triedro di β.

11

- $\beta(0) = P_0 + \int_0^0 \underline{t}(u)\, du = P_0$

- $\beta'(s) = \underline{t}(s)$

$\|\beta'(s)\| = \|\underline{t}(s)\| = 1$

$\longrightarrow$ β param x arc len

$$\boxed{\underline{t}_\beta(s) = \beta'(s) = \underline{t}(s)}$$

$\underline{t}_\beta' = k_\beta \cdot \underline{n}_\beta$ $=$

$\underline{t}' = f \cdot \underline{n}$

$\| k_\beta \, \underline{n}_\beta \| = \| f \cdot \underline{n} \|$

$k_\beta = f$ (perché $f > 0 \ \forall s \in I$)

$\longrightarrow$ β è biregolare

$\longrightarrow$ $\underline{n}_\beta = \underline{n}$

$\underline{b}_\beta(s) = \underline{t}_\beta(s) \wedge \underline{n}_\beta(s)$

$= \underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s) = \underline{b}(s)$

$\tau_\beta(s) = -\underline{b}_\beta' \cdot \underline{n}_\beta = -\underline{b}' \cdot \underline{n} = g(s)$