SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale (posso pensarlo come campo di velocità)

$F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

Problema di Cauchy (PC) $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = \xi \end{cases} \to y(t;\xi)$

Teorema di esistenza e unicità locale
$\Rightarrow \exists!$ soluzione di (PC) definita su un intervallo massimale $(T_{min}(\xi), T_{max}(\xi))$

Supponiamo che l'esistenza sia globale $\Longrightarrow$

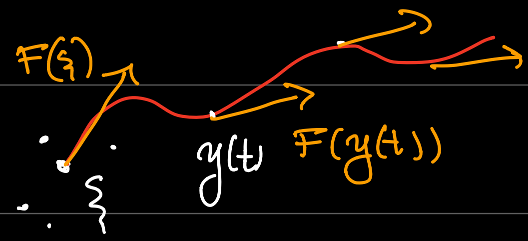
$T_{min}(\xi) = -\infty$ e $T_{max}(\xi) = +\infty$.

Abbiamo definito una funzione $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$(\xi, t) \longmapsto \underset{\uparrow \text{ la sol. di (PC)}}{y(t,\xi)} =: \Phi^t(\xi)$ (flusso associato al campo F)

$$\frac{d}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fissato}}}{\Phi^t(\xi)} = y'(t;\xi) = F(y(t;\xi)) = F(\Phi^t(\xi))$$

$\Phi^t(\xi)$ prende il nome di flusso associato al sistema $y' = F(y)$.



Fluido che viene trasportato lungo il campo di velocità F.

TEOREMA DI DIFFERENZIAZIONE RISPETTO AI DATI INIZIALI

a t fissato; $\xi \mapsto \Phi^t(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile

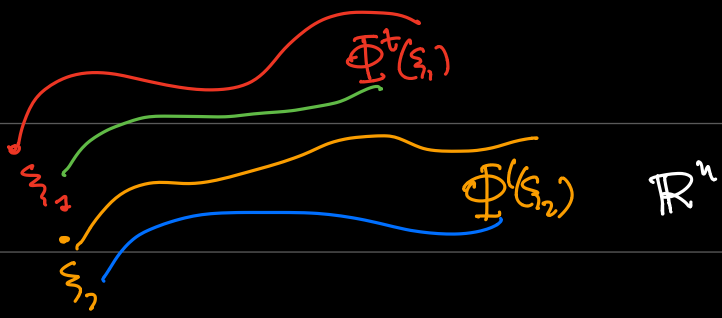
e $\underbrace{J_{\Phi^t}(\xi)}_{\approx M(t)}$ risolve l'equazione linearizzata $\frac{d}{dt} M(t) = B(t) M(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} J_{\Phi^t}(\xi) = J_F\left(\Phi^t(\xi)\right) J_{\Phi^t}(\xi) & \forall t \in \mathbb{R} \\ J_{\Phi^0}(\xi) = \mathbb{1} \end{cases}$$

COROLLARIO: $\forall t$ fissato, $\xi \mapsto \Phi^t(\xi)$ è un diffeomorfismo e la sua funzione inversa è $\Phi^{-t}(\xi)$.

Dimostrazione: per esercizio $\Phi^t\left(\Phi^{-t}(\xi)\right) = \xi \quad \forall \xi$

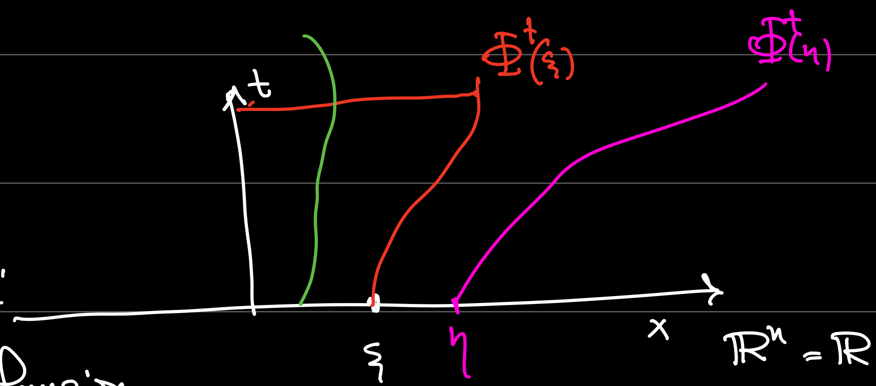
Suggerimento: provare che $\underbrace{\Phi^t\left(\Phi^s(\xi)\right) = \Phi^{t+s}(\xi)}_{\text{proprietà di semigruppo}} \quad \forall \xi$ $\forall t, \forall s$.



ESERCIZIO: Provare che $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $J_{\Phi^t}(x)$ è una matrice non singolare e vale.

$$\left(J_{\Phi^t}(x)\right)^{-1} = J_{\Phi^{-t}}\left(\Phi^t(x)\right)$$

Supponiamo che le curve siano insiemi di livello di una funzione



$u(t,x) \Rightarrow u(t, \Phi^t(\xi)) = \text{cost} \quad \forall \xi$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} u(t, \Phi^t(\xi)) = 0$$

$$u_t(t, \Phi^t(\xi)) + \nabla_x u(t, \Phi^t(\xi)) \cdot \frac{d}{dt}\Phi^t(\xi) = 0$$

$$u_t(t, \underbrace{\Phi^t(\xi)}_{= x}) + \nabla_x u(t, \Phi^t(\xi)) \cdot F(\Phi^t(\xi)) = 0$$

$$\boxed{u_t(t,x) + \nabla_x u(t,x) \cdot F(x) = 0}$$

EQUAZIONE DEL TRASPORTO .