1. Circonferenza (1)

$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad r > 0$

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$k = \frac{1}{r}$ (costante)

$\tau \equiv 0$ (costante)

Una curva β è un arco di circonf.

$\Longleftrightarrow \tau \equiv 0, \; k = \text{costante} \; (\neq 0)$

$\Longrightarrow$ calcolo diretto

$\Longleftarrow$ teor. fond.

—o—

2. Elica circolare

$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \qquad a > 0$
$b \neq 0$

$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\qquad\qquad i \qquad\qquad j \qquad\qquad k$

$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\alpha''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$

$\alpha' \wedge \alpha'' = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$

$$\alpha''' = (a \sin t, -a\cos t, 0)$$ (2)

$$k = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2}}$$

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} = a \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\|\alpha'\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tau = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{\cancel{a^2}\, b}{\cancel{a^2}(a^2+b^2)}$$

$$= \boxed{\frac{b}{a^2+b^2}}$$

Elica circolare ha curvatura e torsione costanti

teor. fond.: se una curva ha curvatura e torsione costanti allora è un'elica circolare.

$$k = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\longrightarrow \quad a = \frac{k}{k^2+\tau^2}, \quad b = \frac{\tau}{k^2+\tau^2}$$

Dispense, esercizio 5.6 pag. 29 (3)

sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ reg., param. x arc. lun.

$\underline{t}(s) = \alpha'(s)$ = indicatrice delle tangenti

ind. delle tangenti è una curva contenuta nella sfera di centro l'origine e raggio 1.

esercizio 6 del foglio

siano $k(s)$, $\tau(s)$ curv. e tors. di α

allora $k_1(s)$ dell'ind. delle tangenti è: ...

$$\boxed{k_1^2(s) = 1 + \frac{\tau^2}{k^2}}$$

sia $\sigma(s) = \underline{t}_\alpha(s) = \alpha'(s)$

$$k_1 = \frac{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3}$$

$$\sigma' = \alpha'' = k(s) \cdot \underline{n}_\alpha(s)$$

$$\sigma'' = \alpha''' = k'\underline{n} + k\underline{n}'$$

$$= k'n + k(-k\underline{t} + \tau\underline{b})$$

$$= -k^2 \underline{t} + k' \underline{n} + \tau k \underline{b}$$ 4

$$\sigma' \wedge \sigma'' = -k^3 \, \underline{n} \wedge \underline{t} + \tau k^2 \, \underline{n} \wedge \underline{b}$$

$$= k^3 \, \underline{b} + \tau k^2 \, \underline{t}$$

$$\| \sigma' \wedge \sigma'' \| = \sqrt{k^6 + \tau^2 k^4} = k^2 \sqrt{k^2 + \tau^2}$$

ricordiamo: $\underline{t} \wedge \underline{n} = \underline{b}$

$\longrightarrow$ $\underline{n} \wedge \underline{t} = -\underline{b}$

$$\| \sigma' \| = k$$

$$k_1 = \frac{k^2 \sqrt{k^2 + \tau^2}}{k^3} = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k}$$

elevando al quadrato si ottiene la tesi

<u>esercizio 2 del foglio</u>

$\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ <u>biereg</u>, param. x arclun

sia $r \in \mathbb{R}$ fissato

$$\alpha_r(s) = \alpha(s) + r \cdot \underline{b}(s)$$

Dimostrare che:

a. . α_r è regolare cioè: $\alpha_r'(s) \neq 0 \ \forall s$

• α_r è biregolare? cioè $k_{\alpha_r} \neq 0 \ \forall s$??

(5)

$$\alpha_r' = \alpha' + r b' =$$

$$= \underline{t} - r\tau \underline{n}$$

$\alpha_1' \neq 0 \ \forall s$ perché

• componente $\underline{t} \neq 0$

• $\|\alpha_r'\| = \sqrt{1 + r^2\tau^2} \neq 0$

α_r param x arclu $\iff \tau \equiv 0 \iff$ α piana

$$k_r = \frac{\|\alpha_r' \wedge \alpha_r''\|}{\|\alpha_r'\|^3}$$

$$\alpha_r' = \underline{t} - r\tau \underline{n}$$

$$\alpha_r'' = \underline{t}' - r\tau' \underline{n} - r\tau \underline{n}'$$

$$= k\underline{n} - r\tau' \underline{n} - r\tau(-k\underline{t} + \tau \underline{b})$$

$$= rk\tau \underline{t} + (k - r\tau')\underline{n} - r\tau^2 \underline{b}$$

$\alpha_r' \wedge \alpha_r'' \neq 0 \iff \alpha_r', \alpha_r''$ lin. ind.

se $\boxed{\tau \neq 0 \ \forall s} \longrightarrow$ la comp $\underline{b}$ di $\alpha_r'' \neq 0 \longrightarrow$ lin. ind.

se $\tau = 0$ si ha: ⑥

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_r &= \underline{t} \\ \alpha''_r &= (k - r\tau')\,\underline{n} \end{aligned}\right\}$$ son lin. ind.p. ??

$$\boxed{k - r\tau' \neq 0}$$

Condizione sufficiente è: $\forall s$:

- $\tau(s) \neq 0$

oppure

- $\tau(s) = 0$, $k(s) - r\,\tau'(s) \neq 0$

Esiste una curva per cui in qualche punto si ha $\tau = 0$, $k - r\tau' = 0$??

esempio:
$$\left\{\begin{aligned} r &= 1 \\ k(s) &\equiv 1 \\ \tau(s) &= s \end{aligned}\right]$$ teor fond. $\longrightarrow \alpha(s)$

per $s = 0$ si ha: $\tau(0) = 0$

: $1 - 1 \cdot 1 = 0$

$\underline{b}_r$ α piana $\Longleftrightarrow$ $\underline{b}_{\alpha_r} = \pm \underline{b}_\alpha$ (7)

(sotto l'ipotesi α_r biregolare)

$\Longrightarrow$ α piana $\Rightarrow$ $\underline{b}_\alpha$ costante

$\Rightarrow$ α_r = traslata di α per un vettore costante

$\Rightarrow$ $\underline{b}_{\alpha_r} = \underline{b}_\alpha$

$\Longleftarrow$ $\underline{b}_r(s) = \pm \underline{b}(s)$

$\underline{b}_r \parallel \alpha_r' \wedge \alpha_r'' =$

$= r^2 \tau^3 \underline{t} + r\tau^2 \underline{n} + (k - r\tau' + r^2 k \tau^2) \underline{b}$

$\Longrightarrow$ componenti $\underline{t}$, $\underline{n}$ nulle

$\Longrightarrow$ $\tau \equiv 0$ $\Longrightarrow$ α piana.

<u>Osserviamo</u>: $\underline{b}_r = -\underline{b}$

$\Longrightarrow$ α piana $\Longrightarrow$ $\underline{b}_r = \underline{b}$

<u>cioè</u>: $\underline{b}_r = -\underline{b}$ è impossibile

Foglio:

es 1 → facile

es 4 → facile: dimostrare che α è un'elica circolare: basta calcolare k, τ e vedere che son costanti

es. 5

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ bireg, param x arclun

$\tau(s) \neq 0 \quad \forall s \in I$

(1) $\Rightarrow$ (2)

(1) $\exists\, c, d \in \mathbb{R}$, non entr. nulli tali che

$$c\, k(s) + d\, \tau(s) \equiv 0$$

(2) $\exists\, \underline{v}_0$ costante, $\|\underline{v}_0\| = 1$

$$: \langle \underline{t}(s), \underline{v}_0 \rangle = \text{costante}$$

$$\underline{0} \equiv (c k + d \tau) \cdot \underline{n} = c\, \underline{t}' - d\, \underline{b}'$$

$$= (c\, \underline{t} - d\, \underline{b})'$$

$\Rightarrow \underline{v} = c\, \underline{t} - d\, \underline{b}$ è costante è non nullo perché c, d non sono entr. nulli e $\underline{t}, \underline{b}$ lin. ind.

$$\underline{v}_0 = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}\,\underline{v}$$

$$\langle \underline{t}(s), \underline{v}_0 \rangle = \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = \text{costante}$$

---

(3) $\Rightarrow$ (4)

(3) $\exists\, \underline{v}$ non nullo, costante : $\langle \underline{n}(s), \underline{v} \rangle \equiv 0$

(4) $\exists\, v_0$ versore costante : $\langle \underline{b}(s), \underline{v}_0 \rangle = \text{costante}$

Se prendo $\underline{v}_0 = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ v_0 costante, $\perp \underline{n}$

$$\underline{v}_0 = c(s)\,\underline{t}(s) + d(s)\,\underline{b}(s) \quad \text{costante}$$

deriviamo:

$$c'\underline{t} + c\underline{t}' + d'\underline{b} + d\underline{b}' \equiv 0$$

$$c'\underline{t} + ck\underline{n} + d'\underline{b} - d\tau\underline{n} \equiv 0$$

$$c'\underline{t} + (ck - d\tau)\underline{n} + d'\underline{b} \equiv 0$$

$\Rightarrow c' \equiv d' \equiv 0 \Rightarrow c, d$ costanti

non entrambe nulle, perché $\underline{v}_0 \neq 0$

$\langle b(s), \underline{v}_0 \rangle = d = \text{costante}$

$(4) \Rightarrow (1)$

$\underline{v}_0$ = versore costante nell'ipotesi

$\underline{v}_0 = c(s)\,\underline{t}(s) + d(s)\,\underline{n}(s) + e(s)\,\underline{b}(s)$

$\langle \underline{b}(s), \underline{v}_0 \rangle = e(s) = \underline{\text{costante}}$

deriviamo:

$$\underline{0} \equiv c'\underline{t} + c\underline{t}' + d'\underline{n} + d\underline{n}' + e\underline{b}'$$

$$= (c' - k d)\underline{t} + (ck + d' - e\tau)\underline{n}$$

$$+ (d\tau)\underline{b}$$

identicamente nulli

- $\tau \neq 0$ sempre $\Rightarrow d \equiv 0 \Rightarrow d' \equiv 0$
- $c' \equiv 0 \Rightarrow c$ costante (usando $\underline{t}$)
- $ck - e\tau \equiv 0$ che è la tesi