FUNZIONALI $J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u(x))\right] dx$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto (limitato, regolare) $\min_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u)$

PROBLEMI

(a) esistenza di minimi (o altri pti estremo, pti critici)

(b) condizioni di estremalità ('$d_{u_0} J = ?$')

(c) esistenza di minimi vincolati (o altri pti critici)

(d) condizioni di estremalità vincolata

minimizzazione con simmetrie e

vincolo naturale (i moltiplicatori di Lagrange

sono zero -

(e) condizioni di estremalità $\overset{\text{e.g.}}{\Rightarrow} \begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

in senso debole (o variazione)

$u \in H_0^1(\Omega)$: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f(u) v$

Regolarità: (i) posso dire che $u \in C^2$ ed è soluzione classica? (ii) posso dire che $u \in W^{2,1}(\Omega)$ e $-\Delta u^{(x)} = f(u(x))$ quasi ovunque?

(f) proprietà qualitative delle soluzioni (obbligo o forbi) e.g. simmetrie ecc...

Ω ha delle simmetrie e u risolve $\begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ u riflette le simmetrie di Ω?

E.g. $\Omega = B_R$ (simmetria radiale) $\overset{?}{\Rightarrow}$ u ha simmetria radiale?

CONDIZIONI DI BUONA POSITURA ED ESTREMALITÀ

Ci concentriamo su equazioni del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,s) \mapsto \boxed{f(x,s) = \frac{\partial F}{\partial s}(x,s)}$$

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,s) \mapsto \boxed{F(x,s)}$$

$$\boxed{J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u(x)) \right] dx}$$

se prendiamo come dominio $H^1_0(\Omega)$

$\Rightarrow \mathcal{J}(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\,dx$ → ben definito?
→ differenziabile 1,2.
↳ chi è il differenziale

Problema → Differenziale di Fréchet?

$I : L^1(\Omega) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi$ è un'applicazione lineare continua $\Rightarrow$ è differenziabile.

OPERATORI DI NEMITZKII

Data $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,s) \mapsto g(x,s)$

$g_* : u \in M(\Omega) \mapsto v(x) = g(x, u(x)) = g_*(u) \in$ (operatore di Nemitzkii ass. a g)

Vogliamo dare condizioni su g in modo che

$g_* : \boxed{M(\Omega) \to M(\Omega)}$

$g_* : \boxed{L^q(\Omega) \to L^r(\Omega)}$ per opportuni q e r

Pb.? Trovare il differenziale di g_*?

E.g. $g(x,s) = g(s)$ ed è misurabile $\Rightarrow g_* : M(\Omega) \to M(\Omega)$

CONDIZIONI DI CARATHÉODORY

$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,s) \mapsto g(x,s)$

(i) $g(\cdot, s)$ é misurabile in x $\forall s$.

(ii) $g(x, \cdot)$ é continua in s, per quasi ogni x

TEOREMA: Sotto tali ipotesi, $g_* : \mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$.

Dimostrazione: Prendiamo $u \in \mathcal{M}(\Omega)$

$$g_*(u)(x) = g(x, u(x))$$

casi particolari per u ($\forall$ sia g) (1) se $u = c$ $\forall$

(2) $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \chi_{E_k}$ E_k misurabili e $c_k \in \mathbb{R}$.
$E_k \cap E_\ell = \phi$ $k \neq \ell$
$\cup E_k = \Omega$

$$g(x, u(x)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{E_k} \boxed{g(x, c_k)}$$ sono misurabili $\forall k$ per (i)

$\Rightarrow$ misurabile.

(3) La condizione (ii) ci dice che se ho una successione $(u_n)_n \subset \mathcal{M}(\Omega)$, tali che $g_*(u_n) \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $u_n \to \bar{u}$ q.o. in $\Omega \Rightarrow g_*(\bar{u}) \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Infatti $g(x, u_n(x))$ in

$\Omega \setminus \{ u_n$ non converge a $u \} \cup \{ x : g(x,s)$ non é continua in $s \}$

(misura nulla)

converge puntualmente per la continuità in s

a x fissato $g(x, u_n(x)) \longrightarrow g(x, \bar{u}(x))$ -

Ma il limite q.o. di funzioni misurabili è misurabile $\Rightarrow$ $g_{**}(\bar{u}) \in \mathcal{M}(\Omega)$. ∎

ESEMPI: $g(s) = s$

$g(x,s) = a(x)|s|^p$ $\quad$ a, b siano funzioni misurabili

$g(x,s) = e^{b(x)s^2}$

$g(x,s) = \sin(h(x) + g(s))$ . . .

II: Stabilire per quali q e r $\quad$ $\boxed{g_{**} : L^q(\Omega) \to L^r(\Omega)}$

Supponiamo che $|\Omega| < +\infty$ -

CONDIZIONI DI CRESCITA su g (caso $|\Omega| < +\infty$)

(iii) $\exists\, C$, $\exists\, p \geq 0$: $|g(x,s)| \leq C(1 + |s|^p)$

TEOREMA: $q \geq 1$, $g_{**} : L^q(\Omega) \longrightarrow L^{q/p}(\Omega)$

Dimostrazione: $|g_{**}(u)(x)| \leq C(1 + |u(x)|^p)$

$$\Rightarrow |g_{**}(u)(x)|^{q/p} \leq C(1 + |u(x)|^p)^{q/p} \leq$$

$$\leq C'(1 + |u(x)|^{p \cdot q/p}) = C'(1 + |u(x)|^q)$$

Infatti $\left[C(1+|s|^p)^{q/p} \leq C'(1 + |s|^q) \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \right]$

$$\Rightarrow \quad |g_*(u)(x)|^{q/p} \le C^1 \left(1 + |u(x)|^q\right)$$

$$u \in L^q(\Omega) \Rightarrow \quad g_*(u) \in L^{q/p} \qquad \left(\frac{q}{p} \ge 1\right)$$

$$g_* : L^q(\Omega) \to L^2(\Omega) \qquad 1 \le 2 \le \frac{q}{p}. \qquad \square$$

Ci occupiamo ora della differenziabilità secondo Fréchet della funzione $g_* : L^q(\Omega) \to L^2(\Omega)$

DIFFERENZIABILITÀ

(iv) per q.o. x, $g(x,\cdot) \in C^1$ in $s \Rightarrow \exists \frac{\partial g}{\partial s}(x,s)$.

e per ogni s, $\frac{\partial g}{\partial s}(\cdot,s)$ è misurabile in x.

Sotto tali ipotesi ha considerare $\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*$.

Quali sono le ipotesi di crescita ragionevoli?

$$g_* : L^q(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

(iii) $\quad |g(x,s)| \le C(1 + |s|^p)$

(v) $\quad \boxed{\left|\frac{\partial g}{\partial s}(x,s)\right| \le C\left(1 + |s|^{p-1}\right)}$

Osservazione: se $g(x,0)$ è limitata $\Rightarrow$ (v)

$\Rightarrow$ (*) (semplice esercizio di integrazione)

TEOREMA: Se valgono (V) e (*) $\Rightarrow$ $\forall u_0 \in L^q(\Omega)$

g_* è differenziabile in u_0 e

$$d_{u_0} g_*[h] = \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h \qquad \forall h \in L^q(\Omega)$$

Osservazione: $g_* : L^q(\Omega) \to L^r(\Omega)$ $\quad r = q/p$

dove p è quello delle ipotesi di crescita.

$d_{u_0} g_* : L^p(\Omega) \to L^r(\Omega)$ lineare $\quad r = \frac{q}{p}$

$d_{u_0} g_*[h] \in L^r(\Omega) \quad \forall h \in L^q(\Omega)$

Cominciamo a verificare che sotto le nostre ipotesi di crescita $\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h \in L^r(\Omega) \quad \forall h \in L^q(\Omega)$

$$\int \left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x))\, h \right|^{q/p = r} \; ? \; < +\infty$$

// Hölder $\quad p' = \frac{p}{p-1}$

$$\left(\int \left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right|^{q/p \cdot p'} \right)^{1/p'} \left(\int |h|^{q/p \cdot p} \right)^{1/p}$$

$$\frac{q}{p} p' = \frac{q}{p-1}$$

$$\leq \left(\int_\Omega C_1 \left(1 + |u_0|^{\frac{p}{p'}} \right)^{q/p'} \right)^{1/p'} \|h\|_{L^q}^{q/p}$$

$$\leq C' \left(\int_\Omega \left(1 + |u_0|^q \right) \right)^{1/p'} \|h\|_{L^q}^{q/p} \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione del teorema: $\quad 2 = \frac{q}{p}$

$$g_*(u_0+h) - g_*(u_0) \overset{?}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h + o(\|h\|) \quad \text{in } L^q(\Omega)$$

vale in $L^2(\Omega)$

$$\lim_{\|h\|_{L^q} \to 0} \frac{\| g_*(u_0+h) - g_*(u_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h \|_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{L^q(\Omega)}} \overset{?}{=} 0$$

$$g_*(u_0+h) - g_*(u_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h = g(x, u_0(x)+h(x)) - g(x, u_0(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x))\, h$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h(x))\, h(x)\, dt - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x))\, h(x)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right] h(x)\, dt$$

per q.o. $x \in \Omega$.