Ricevimento: martedì 15:30 - 16:30 1

—o—

Invarianza geometrica della torsione

$\alpha(s)$ param x arclun, bireg

$$\tau_\alpha(s) = -b'_\alpha(s) \cdot n_\alpha(s)$$

se $\beta(\sigma)$ è equivalente ad $\alpha(s)$

· param x arclun

$$\Longrightarrow \sigma = \pm s + c$$

si ha che: se $\sigma = s + c$

allora $t_\alpha = t_\beta$, $n_\alpha = n_\beta$, $b_\alpha = b_\beta$

se $\sigma = -s + c$

allora $t_\alpha = -t_\beta$, $n_\alpha = n_\beta$, $b_\alpha = -b_\beta$

quindi: $$b'_\alpha = -b'_\beta \cdot \frac{d\sigma}{ds} = b'_\beta$$

e dunque:

$$\tau_\alpha = -b'_\alpha \cdot n_\alpha = -b'_\beta \cdot n_\beta = \tau_\beta \quad \blacksquare$$

Teoria globale delle curve ②

Esempi: disuguaglianza isoperimetrica

C curva chiusa, piana, semplice

a parità di lunghezza, quale curva racchiude l'area maggiore?

risposta: circonferenza.

In generale, teoremi di natura geometrica

Oggi vediamo invece 2 teoremi di natura topologica

Curva: $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^3$

- chiusa: $\alpha(0) = \alpha(L)$
- semplice: $\alpha : [0, L) \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva
- curvatura totale:

$$K(C) = \int_0^L k(s)\, ds$$

Teorema di Fenchel (1928) ③

Se C è una curva chiusa, allora

$$k(C) \geq 2\pi$$

$$\left(= \iff C \text{ piana, convessa} \right)$$

Si può dire come:

$$\boxed{\text{• per avere una curva chiusa, bisogna fare almeno un giro}}$$

Si usa l'indicatrice delle tangenti

$$\Gamma : [0, L] \longrightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$s \longmapsto \underline{t}(s)$$

Γ è una curva tracciata sulla sfera unitaria

$$k(C) = \int_0^L k(s)\, ds = \int_0^L \| \underline{t}'(s) \| \, ds = \text{lunghezza di } \Gamma.$$

Esempi di Γ:

se C è piana $\longrightarrow \alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$

$\Longrightarrow \Gamma \subseteq$ equatore della sfera

Lemma A

- se C è chiusa, allora Γ non è contenuta in una semisfera aperta
- $\Gamma \subseteq$ semisfera chiusa $\iff$ C piana

Lemma B

Γ curva chiusa, $\Gamma \subseteq S^2$

- $\ell(\Gamma) < 2\pi \implies \Gamma \subseteq$ semisfera aperta
- $\ell(\Gamma) = 2\pi \implies \Gamma \subseteq$ semisfera chiusa

dimostrazione del teorema

- C chiusa $\underset{\text{Lemma A}}{\implies}$ $\Gamma \not\subseteq$ semisfera aperta

$$\underset{\text{Lemma B}}{\implies} \ \underset{K(C)}{\underset{\shortparallel}{\ell(\Gamma)}} \geq 2\pi$$

- C piana + convessa $\implies$ Γ = equatore percorso una volta

$$\implies K(C) = \ell(\Gamma) = 2\pi$$

$K(C) = 2\pi \underset{\text{Lemma B}}{\implies} \Gamma \subseteq$ semisf. chiusa

$\underset{\text{Lemma A}}{\implies}$ C è piana ∎

dim. Lemma A

C chiusa , Γ ind delle tangenti

supponiamo $\Gamma \subseteq$ Semisfera

possiamo pensare Semisfera = emisfero nord

$= \{z \geq 0\} \cap S^2$

$\Longrightarrow$ $\underline{t}(s)$ = vettore tg $\Longrightarrow$ $\underline{t}_3(s) \geq 0$

$$\int_0^L \underline{t}_3(s)\,ds = \left(\int_0^L \underline{t}(s)\,ds \right)_3 =$$

$$= \left[\alpha(L) - \alpha(0) \right]_3 = 0$$

perché C è chiusa

Abbiamo una funzione ≥ 0, integrale $= 0$

$\Longrightarrow$ • t_3 non è strett. positivo

quindi Γ non è nella semisf. aperta

• $\underline{t}_3 \equiv 0$ (non negativa, continua, int nullo $\Longrightarrow \equiv 0$)

$\Longrightarrow z(s) =$ costante $\Longrightarrow C \subseteq$ piano orizzontale.

Dim. Lemma B

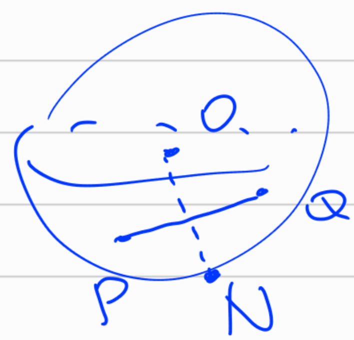
$\Gamma \subseteq S^2$, fissiamo un verso di percorrenza

$P, Q \in \Gamma$: lunghezza (PQ) = lunghezza di (QP)

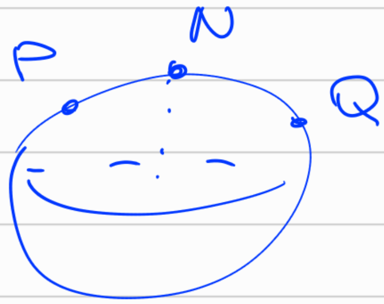
Γ_1 = arco PQ, Γ_2 = arco QP

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \longrightarrow \ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma_2) = \frac{1}{2}\ell(\Gamma)$$

ruotiamo la sfera in modo che P, Q siano simmetrici rispetto al polo nord.



ruotiamo

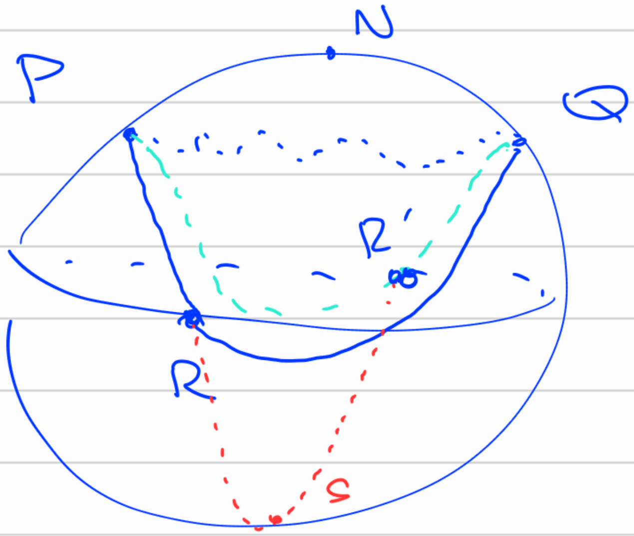


se $\Gamma \subseteq$ emisfero nord OK ∎

supponiamo ora Γ incontra l'equatore

sia R = punto in cui Γ incontra eq.

sia $R \in \Gamma_1$



— $= \Gamma_1$ ····· $=$ meridiano

···· $= \Gamma_2$

- - - - $= \Gamma_2'$

$\Gamma_2' =$ simmetrico di Γ_1 rispetto a N

$R' =$ simmetrico di $R \Longrightarrow \begin{cases} \text{sta sull'eq.} \\ \text{sta su } \Gamma_2' \end{cases}$

$$\ell(\Gamma) = \ell(\Gamma_1) + \ell(\Gamma_2) = \ell(\Gamma_1) + \ell(\Gamma_2')$$

$$\Gamma' = \Gamma_1 + \Gamma_2' \longrightarrow \ell(\Gamma) = \ell(\Gamma')$$

posso pensare $\Gamma' = RR' + R'R$

R, R' sono diametralmente opposti

$\ell(RR') \geq$ meridiano da R a R' passante per S $= \pi$

$$\Longrightarrow \ell(\Gamma) = \ell(\Gamma') = \ell(RR') + \ell(R'R)$$

$$\geq \pi + \pi = 2\pi$$

Quindi: • $\ell(\Gamma) < 2\pi \Longrightarrow R$ non esiste

$\Longrightarrow \Gamma$ emisfero nord aperto

• $\ell(\Gamma) = 2\pi \Longrightarrow \Gamma$ tocca l'eq. ma non lo attraversa

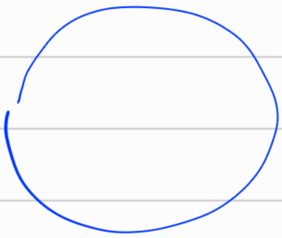
Teorema di Milnor

C = curva chiusa, <u>nodo</u>

$\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

- $\alpha(0) = \alpha(L)$ cioè chiusa
- $\alpha : [0, L) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva cioè semplice
- $\alpha([0,L]) = C$ è omeomorfa con la top indotta ad una circonferenza

Esempio:



C = non nodo

trifoglio

C si dice <u>non annodata</u> se esiste

$F : D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ continua tale che

$$F(\partial D^2) = C$$

Teorema (Milnor, 1950) $C \subseteq \mathbb{R}^3$ chiusa

C annodata $\Longrightarrow \kappa(C) \geq 4\pi$

9

Posso enunciarlo come:

$$\boxed{\text{per fare un nodo, ci vogliono due giri}}$$

La dimostrazione è stata fatta da Milnor a 17 anni, al primo anno di università.