CONDIZIONI DI CARATHÉODORY

$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,s) \mapsto g(x,s)$

(i) $g(\cdot, s)$ è misurabile in x $\forall s$.

(iii) $g(x,\cdot)$ è continua in s, per quasi ogni x

TEOREMA: Sotto tali ipotesi, $g_{\#} : M(\Omega) \to M(\Omega)$.

$M(\Omega)$ = { funzioni misurabili }

Nel seguito supporremo sistematicamente che le condizioni di Carathéodory siano verificate

CONDIZIONI DI CRESCITA su g (caso $|\Omega| < +\infty$)

(iii) $\exists\, C$, $\exists\, p \geq 0$: $|g(x,s)| \leq C(1 + |s|^p)$

TEOREMA: $q \geq 1$, $g_{\#} : L^q(\Omega) \to L^{q/p = r}(\Omega)$

Dimostrazione: $|g_{\#}(u)(x)| \leq C(1 + |u(x)|^p)$

$$\Rightarrow |g_{\#}(u)(x)|^{q/p} \leq C(1 + |u(x)|^p)^{q/p} \leq$$

$$\leq C'(1 + |u(x)|^{p \cdot q/p}) = C'(1 + |u(x)|^q)$$

Infatti $\left[C(1+|s|^p)^{q/p} \leq C'(1 + |s|^q) \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \right]$

$$\Rightarrow \quad |g_*(u)(x)|^{q/p} \le C^1 \left(1 + |u(x)|^q\right)$$

$$u \in L^q(\Omega) \Rightarrow g_*(u) \in L^{q/p} \qquad \left(\frac{q}{p} \ge 1\right)$$

$$g_*: L^q(\Omega) \to L^2(\Omega) \qquad 1 \le 2 \le \frac{q}{p}. \qquad \blacksquare$$

Ci occupiamo ora della <u>differenziabilità secondo Fréchet</u> della funzione $g_*: L^q(\Omega) \to L^2(\Omega)$

<u>DIFFERENZIABILITÀ</u> (Nel senso di Fréchet)

(iv) per q.o. x, $g(x,\cdot) \in C^1$ in $s \Rightarrow \exists \frac{\partial g}{\partial s}(x,s)$.

e per ogni s, $\frac{\partial g}{\partial s}(\cdot,s)$ è misurabile in x. $\forall s$

Sotto tali ipotesi che consideriamo $\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*$.

Quali sono le ipotesi di crescita ragionevoli?

$$g_*: L^q(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

(iii) $|g(x,s)| \le C(1 + |s|^p)$

(v) $\boxed{\left|\frac{\partial g}{\partial s}(x,s)\right| \le C\left(1 + |s|^{p-1}\right)}$ $\boxed{p \ge 1}$

<u>Osservazione</u>: se $g(x,0)$ è limitata $\Rightarrow$ (v)

$\Rightarrow$ (*) (semplice esercizio di integrazione)

TEOREMA: Se valgono (V) e (*) $\Rightarrow$ $\forall u_0 \in L^q(\Omega)$

$g_\#$ é differenziabile in u_0 e

$$\boxed{d_{u_0} g_\#[h] = \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_\#(u_0)\, h \qquad \forall h \in L^q(\Omega)}$$

Osservazione: $g_\# : L^q(\Omega) \to L^r(\Omega)$ $\quad r = q/p \geq 1$

dove p é quello delle ipotesi di crescita.

$d_{u_0} g_\# : L^q(\Omega) \to L^r(\Omega)$ lineare $\quad \boxed{r = \frac{q}{p}}$

$d_{u_0} g_\#[h] \in L^r(\Omega) \quad \forall h \in L^q(\Omega)$

Cominciamo a verificare che sotto le nostre ipotesi di crescita $\boxed{\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_\#(u_0)\, h \in L^r(\Omega)}$ $\quad \forall h \in L^q(\Omega)$

$$\int \left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x))\, h \right|^{q/p = r} \overset{?}{<} +\infty$$

$\wedge$ Hölder (p, p') $\quad \boxed{p' = \frac{p}{p-1}}$ $\quad p > 1$

$$\left(\int \left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right|^{q/p \cdot p'} \right)^{1/p'} \left(\int |h|^{q/\cancel{p} \cdot \cancel{p}} \right)^{1/p}$$

$$\frac{q}{p} p' = \frac{q}{p-1}$$

$$\leq \left(\int_\Omega C_1 \left(1 + |u_0|^{\frac{q}{p'}} \right) \right)^{1/p'} \|h\|_{L^q}^{q/p}$$

$$\leq C' \left(\int_\Omega \left(1 + |u_0|^q \right) \right)^{1/p'} \|h\|_{L^q}^{q/p} \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione del teorema: $\quad r = \frac{q}{p}$

$$g_*(u_0+h) - g_*(u_0) \overset{?}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h + o(\|h\|)$$

$\sim \in L^r(\Omega)$ in $L^r(\Omega)$; $\quad h \to 0$ in $L^q(\Omega)$

vale in $L^r(\Omega)$

$$\lim_{\|h\|_{L^q} \to 0} \frac{\| g_*(u_0+h) - g_*(u_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h \|_{L^r(\Omega)}}{\|h\|_{L^q(\Omega)}} \overset{?}{=} 0$$

$$\left[g_*(u_0+h) - g_*(u_0) - \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_*(u_0)\, h \right](x) = g(x, u_0(x)+h(x)) - g(x, u_0(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x))\, h(x) \qquad \text{per q.o. } x$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t\,h(x))\, h(x)\, dt - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x))\, h(x)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t\,h(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right] h(x)\, dt$$

per q.o. $x \in \Omega$.

Dobbiamo dimostrare che

$$\lim \frac{\left\| \int_0^1 \left[\frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right] h(x)\, dt \right\|_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{L^q(\Omega)}} \cdot \frac{1}{\|h\|_{L^q(\Omega)}}$$

$$= 0$$

Convergenza dominata: lo facciamo per successioni

$h_n \to 0$ in $L^q(\Omega)$

$$\left\| \int_0^1 \left[\frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h_n(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right] h_n(x)\, dt \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Hölder

$$\leq \|h_n\|_{L^q(\Omega)} \left(\int_\Omega \int_0^1 \left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h_n(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right|^{\frac{q}{p}p'} dt\, dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$p' = \frac{p}{p-1}$$

È vero che $h_n \to L^q(\Omega) \overset{?}{\Rightarrow} h_n \to 0$ q.o. ?

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA DI LEBESGUE:

$(u_n)_n$ in $L^p(\Omega)$ $p \geq 1$

$u_n \to u$ q.o.

$\exists \varphi \in L^p(\Omega)$: $|u_n(x)| \leq \varphi(x)$ per q.o. $x \in \Omega$

$\Rightarrow \quad u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$.

ENUNCIATO "INVERSO" DEL TEOREMA DI CONV. DOMINATO

$u_n \to u$ in $L^p(\Omega) \Rightarrow \exists\, u_{n_k}\ \exists \varphi \in L^p(\Omega)$

t.c. $u_{n_k} \to u$ q.o. e $|u_{n_k}(x)| \le \varphi(x)$ per q.o.

Viene fuori nella prova della completezza di $L^p(\Omega)$

Riprendiamo ora la dimostrazione del teorema $h_n \to L^q(\Omega)$, estraiamo una sottosuccessione (tale) che $h_{n_k} \to 0$ q.o. e $|h_{n_k}(x)| \le \varphi(x)$ q.o., $\varphi \in L^q(\Omega)$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h_{n_k}(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right|^{\frac{q}{p}p'}$$

La funzione integranda $\to 0$ q.o. in x.

$$\left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h_{n_k}(x)) - \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right|^{\frac{q}{p}p'} \le \left(\left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x) + t h_{n_k}(x)) \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial s}(x, u_0(x)) \right| \right)^{\frac{q}{p}p'}$$

crescita su $\frac{\partial g}{\partial s}$ $\Rightarrow$ $\le C \left(1 + |u_0(x)| + t|h_{n_k}(x)| \right)^{(p-1)\cdot\frac{q}{p}p'}$ $\le$

$$\le C \left(1 + |u_0(x)| + |\varphi(x)| \right)^q \in L^1(\Omega) \quad (u_0, \varphi \in L^q(\Omega))$$

$p' = \frac{p}{p-1}$

ESERCIZIO: Dimostrare che nelle stesse ipotesi g_* è differenziabile

tale $d_{u_0} g_* = \left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)(u_0)$ ma è anche di classe C^1. Cioè

$$g_* : L^q(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad dg_* : u_0 \longmapsto d_{u_0} g_* : L^q(\Omega) \to \mathcal{L}(L^q, L^2)$$

è una funzione continua fra due spazi di Banach.

OSSERVAZIONE: Volevamo dim che $\lim_{\|h\|_{L^q(\Omega)} \to 0} \frac{\|Exp(h)\|_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{L^q(\Omega)}} = 0$

abbiamo dim che

$\forall\ h_m \to 0$ in $L^q(\Omega)$ $\exists$ sottosuccessione h_{m_k} t.c.

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\|Exp(h_{m_k})\|_{L^2(\Omega)}}{\|h_{m_k}\|_{L^q(\Omega)}} = 0$$

Negare $\lim_{h \to 0} F(h) = \ell$ in uno sp. metrico

$\exists \varepsilon > 0$ $\exists\ h_m \to 0$ t.c. $\operatorname{dist}(F(h_m), \ell) \geq \varepsilon > 0$

$f: E \to F$ diff. Fréchet $\overset{\text{in } x_0}{\text{se}}$ $\exists\, d_{x_0} f \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x_0+h) - f(x_0) - d_{x_0} f[h] \|_F}{\|h\|_E} = 0$$