DIFFERENZIABILITÀ DI FUNZIONALI

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,s) \mapsto F(x,s) \in \mathbb{R}$$

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt \qquad F(x,0) = 0$$

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Chiediamo che $\frac{\partial f}{\partial s}$ esista e sia continua per q.o. x verifichi le condizioni di Caratheodory, $f(x,0) \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\boxed{\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\right| \le C\left(1 + |s|^{p-1}\right)} \qquad p > 1$$

di modo che ne seguano

$$|f(x,s)| \le C\left(1 + |s|^{p}\right)$$

$$|F(x,s)| \le C\left(1 + |s|^{p+1}\right)$$

Vogliamo studiare le proprietà di differenziabilità del funzionale

$$\boxed{\mathcal{J}(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\,dx}$$

$\mathcal{J} = I \circ F$ dove F, e $I : v \mapsto \int_\Omega v(x)dx$

$I : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Vogliamo applicare la teoria in modo che

$$F : ? \to L^1(\Omega)$$

$$F : L^q(\Omega) \to L^2(\Omega) \qquad 2 = \frac{q}{p+1} = 1$$

$$\boxed{F : L^{p+1}(\Omega) \to L^1(\Omega)} \quad \checkmark$$

$$d_{u_0}\mathcal{J}[h] = I \cdot d_{u_0}(F)[h] = \int_\Omega f(x, u_0(x))\, h(x)\, dx$$

$h \in L^{(p+1)'}(\Omega)$, $u_0 \in L^{p+1}(\Omega)$

$\frac{p}{p+1} = \frac{1}{(p+1)'}$ sempre vero

$$f : L^{p+1}(\Omega) \to L^{(p+1)'}(\Omega)$$

OSSERVAZIONE: Scriviamo $d_{u_0}\mathcal{J} = f(u_0)$ sottointendendo l'integrazione nella dualità L^{p+1} e $L^{(p+1)'}$

$$f(u_0)[h] = \int_\Omega f(u_0)\, h\, dx$$

$f(u_0) \in L^{(p+1)'}$, $h \in L^{p+1}$

(nello stesso modo in cui identifichiamo $(L^p)'$ con $L^{p'}$).

Abbiamo fatto una differenziazione e ne vogliamo fare una seconda. Sappiamo che:

$$d_{u_0}\left(\frac{f}{\#}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#}$$

Problema: <u>differenziale secondo</u>? <u>Forma quadratica</u>?

$d_{u_0} f$, se $f: E \to F$, $d_{u_0} f \in \mathcal{L}(E,F)$

$$df : u_0 \mapsto d_{u_0} f : E \to \mathcal{L}(E,F)$$

2 spazi di Banach

$d_{u_0} df : \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$ che oggetto è?

Non vediamo al momento nessuna forma quadratica.

Noi siamo in un caso particolare

$$\mathcal{J} : L^{p+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$d_{u_0}\mathcal{J} \in L^{(p+1)'}(\Omega)$$

$$d\mathcal{J} : L^{p+1}(\Omega) \to L^{(p+1)'}(\Omega)$$

$$d_{u_0} dJ \in \mathcal{L}\left(L^{p+1}(\Omega), L^{(p+1)'}(\Omega) \right)$$

$$d_{u_0} dJ[h] \in L^{(p+1)'}(\Omega) \qquad \forall h \in L^{p+1}(\Omega)$$

$$d_{u_0} dJ[h][k] \in \mathbb{R}$$

$$d^2_{u_0} J[h,k] \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $d^2_{u_0} J$ é uma forma bilinear em $L^{p+1}(\Omega)$.

Qual é a forma bilinear? Que relação tem com $\frac{\partial f}{\partial s}$ $\left(= \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\right)$?

$$d_{u_0} J = \overset{\text{dualidade}}{\downarrow} \quad f_{\#}(u_0) \qquad \Rightarrow \qquad dJ = f_{\#}$$

$$d^2 J = d(f_{\#}) = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\right| \leq C\left(1 + |s|^{p-1}\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#} : L^{p+1}(\Omega) \longrightarrow L^{r}(\Omega) \qquad \boxed{r = \frac{p+1}{p-1}}$$

$$\boxed{d^2_{u_0} J[h,k] = \int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#}} h\,k\,dx} \qquad \forall\, h,k \in L^{p+1}(\Omega)$$

Hölder $\quad \frac{1}{r} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1 \iff \frac{p-1}{p+1} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$