TEMPI DI SHOCK E SOLUZIONI DISCONTINUE

Leggi di conservazione scalari

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0 & t>0 \quad x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

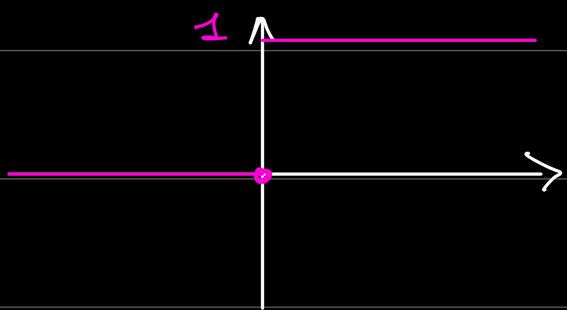
$$F(s) = \int_0^s a(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_t + [F(u)]_x = 0}$$

ESEMPIO: equazione di Burgers : $a(u) = u$

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \qquad F(u) = \frac{1}{2}u^2$$

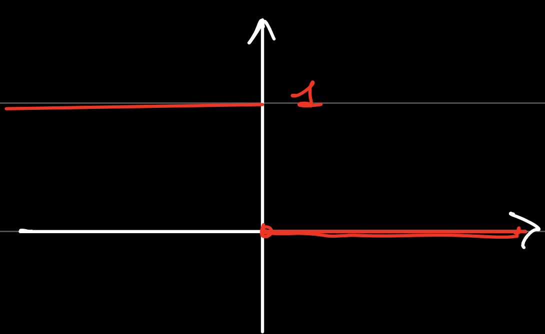
Abbiamo esaminato due condizioni iniziali particolari:

I



$$g(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$$

II



$$g(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$$

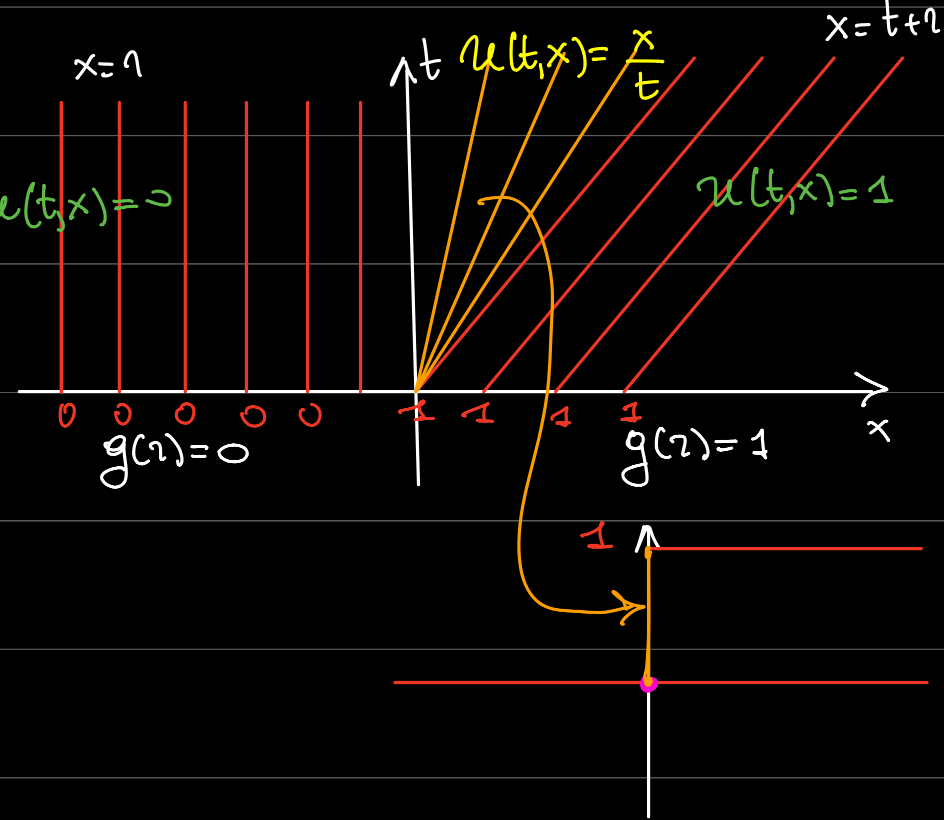
Abbiamo usato il metodo delle caratteristiche, risolvendo il sistema caratteristico $\begin{cases} \dot v = w \\ \dot w = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v(0,z) = z \\ w(0,z) = g(z) \end{cases}$

$w(t,z) = g(z) \qquad v(t,z) = g(z)t + z$

Le semirette caratteristiche ($a(u)=u$) sono

$$\rho(z) = \{ (x,t) : \quad x = \underbrace{g(z)}_{a(g(z))}t + z \}$$

(I)



Possiamo definire $u(t,x) = \frac{x}{t}$ nella zona arancione

$$u_t + u u_x = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2} = 0 \qquad 0 \le \frac{x}{t} \le 1$$

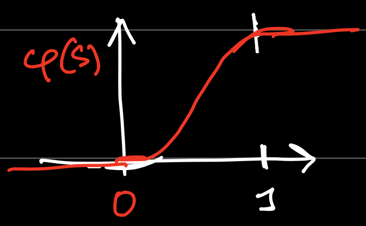
Abbiamo una soluzione continua in tutto il semipiano

$(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

Problema: riusciamo a trovare una soluzione di classe

C^1? $\quad u(t,x) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \Rightarrow u_t + u u_x = \varphi'\left(\frac{x}{t}\right)\left[-\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2}\right] = 0$

[retta verticale $\frac{x}{t} = 0$ bisettrice I quadr $\frac{x}{t} = 1$

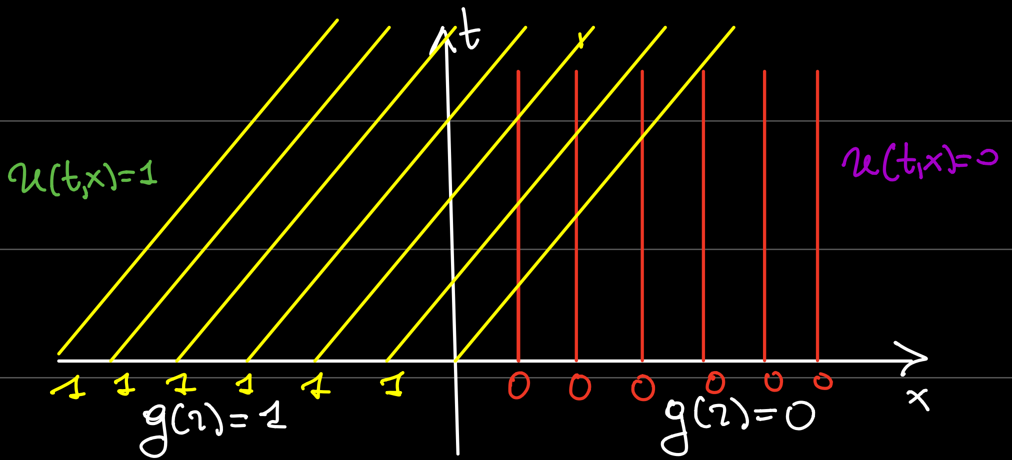


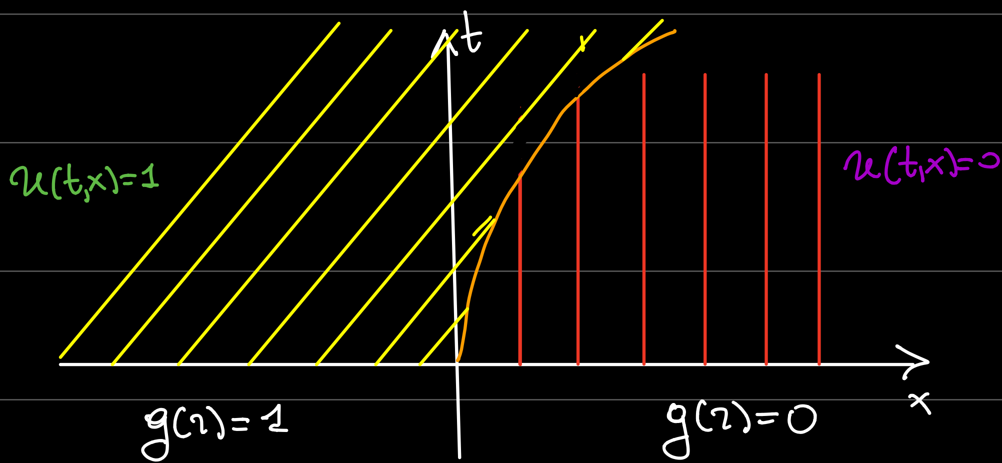
$\varphi \in C^\infty$

C'è un effetto regolarizzante

ONDA DI RAREFAZIONE

(II)





Possiamo definire delle soluzioni discontinue (lungo le linee arancione)

Problema: con quale criterio determiniamo le linee delle discontinuità?

SOLUZIONE DEBOLE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA

Ex: Prendiamo spunto dall'equazione integrale di Volterra associata a un problema di Cauchy:

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = \xi \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = \xi + \int_0^t f(s, y(s))\, ds}$$

inglobato il dato iniziale in

y è una funzione continua per dare senso all'integrale

Ho preso l'equazione differenziale, moltiplicato per $\Phi(t) = 1$ e ho integrato rispetto a t. Sono passata da una formulazione differenziale a una integrale, attraverso il teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni di una variabile t.

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ regolare a pezzi.

Sia $\vec{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, $\vec{F} \in C^1(\overline{\Omega})$

(cioè $\vec{F}$ è la restrizione su $\overline{\Omega}$ di un campo di classe $C^1(U)$ con U aperto $\supseteq \overline{\Omega}$).

Allora

flusso uscente

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu}_{ext}\,d\sigma}$$

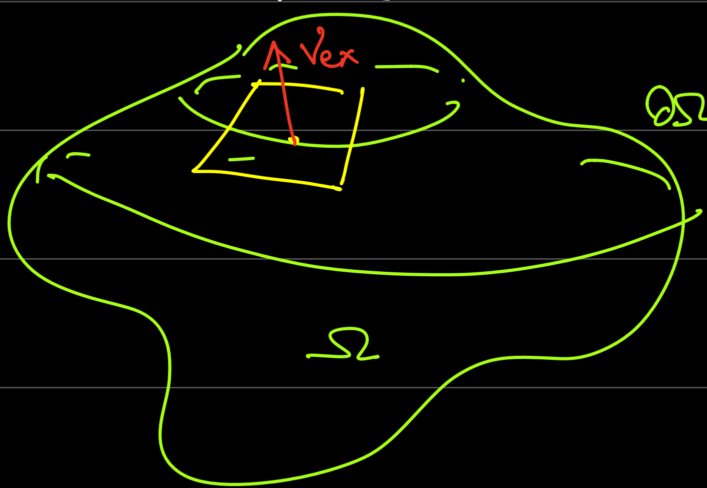
integrale di campo pieno o volume

integrale superficiale

Dove

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) \qquad \vec{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\vec{e}_i$$

$\vec{\nu}_{ext}$ è la normale uscente



OSSERVAZIONE: Nelle stesse ipotesi, se $\Phi \in C^1(\overline{\Omega})$ si ha

$$\int_{\Omega} \Phi(x)\operatorname{div}(\vec{F})(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla\Phi(x)\cdot\vec{F}(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \Phi(x)\vec{F}\cdot\vec{\nu}_{ext}\,d\sigma$$

infatti, è sufficiente osservare che

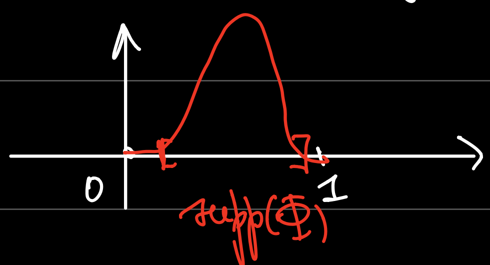
$$\operatorname{div}(\Phi \vec{F}) = \Phi \operatorname{div} \vec{F} + \nabla\Phi \cdot \vec{F}$$

e applicare il teorema della divergenza a $\Phi \vec{F}$.

Definizione: data $\Phi : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua, il supporto di Φ ($\operatorname{supp}(\Phi)$) é la chiusura dell'insieme $\{x \in A : \Phi(x) \neq 0\}$

Definizione: Indico con $\boxed{C_c^k(A)}$ l'insieme delle funzioni $\Phi \in C^k(A)$ che hanno supporto compatto in A.

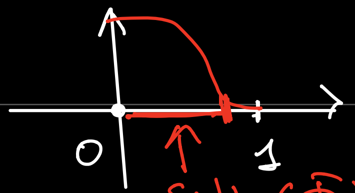
Se A é un aperto, per esempio se $A = (0,1)$, allora



$\Phi \in C_c^1(A)$ deve annullarsi agli estremi (e anche di più)

Ma se A é chiuso (anche solo da un lato),

per esempio, se $A = [0,1)$, allora $\Phi \in C_c^1(A)$ si annulla in 1 ma non necessariamente in 0.



$\mathrm{supp}(\Phi)$ é compatto in $[0,1)$

$$(PC) \quad \begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

OSSERVAZIONE:

$\vec{G}(t,x) = (u(t,x), F(u(t,x)))$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}_{(t,x)} \vec{G}(t,x) = 0}$

PROPOSIZIONE: sia u una soluzione classica (cioé C^1) di (PC). Allora, per ogni $\Phi \in C_c^1((-\infty,T)\times\mathbb{R})$ si ha

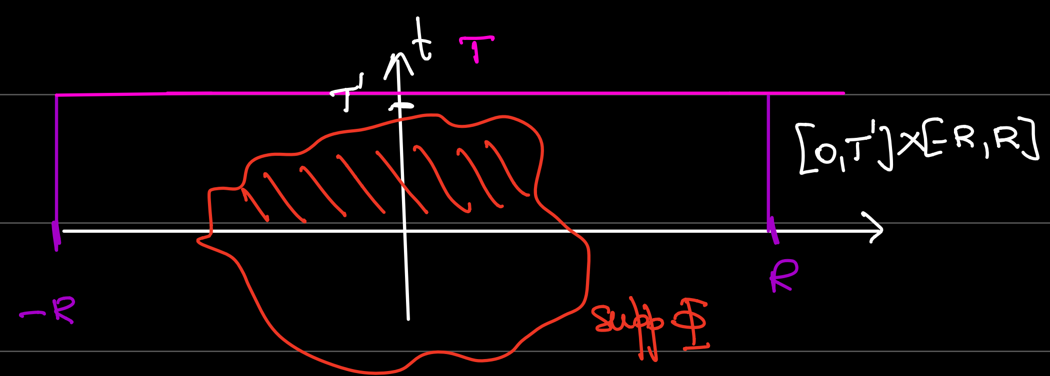
Φ funzione test

$$(**) \quad \boxed{\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Phi_t u + \Phi_x F(u)\right) dx\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \Phi(0,x)\, dx}$$

OSSERVAZIONI

(a) dei valori di Φ su $(-\infty,0)\times\mathbb{R}$ non c'é traccia

(b) $\mathrm{supp}(\Phi)$ é compatto in $(-\infty,T)\times\mathbb{R}$



$\exists R>0 \ : \ \Phi(t,x)\equiv 0$ per $|x|\geq R$ e $t>T'$

(c) Nell'identità integrale sono scomparse le derivate di u e ci sono solo quelle di Φ

(d) se $u, F(u)\in L^1_{loc}([0,T)\times\mathbb{R})$, nell'integrale si può scambiare l'ordine di integrazione

Dimostrazione

Consideriamo $z=(t,x)$ e $\vec{G}(t,x) = (\overset{G_1}{u(t,x)}, \overset{G_2}{F(u)})$.

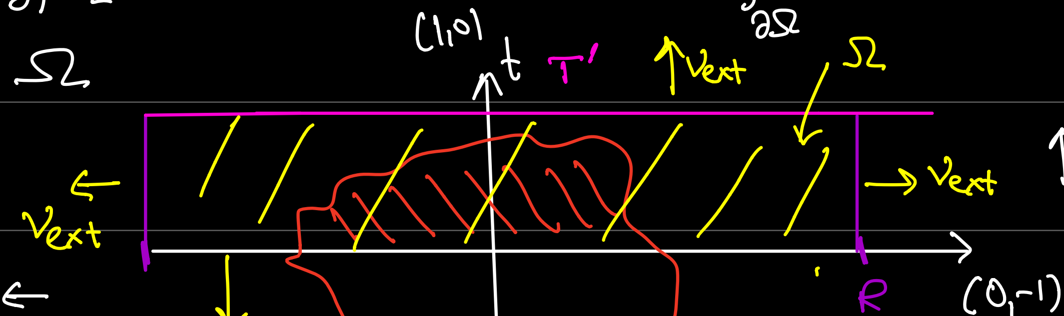
Abbiamo $\quad \mathrm{div}_{(t,x)}\vec{G} = \frac{\partial G_1}{\partial t}+\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + (F(u))_x = 0$

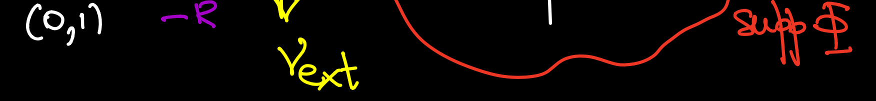
$\vec{G}$ è un campo di classe $C^1([0,T)\times\mathbb{R})$

Sia $\boxed{\Omega = [0,T']\times[-R,R]}$ con $0<T'<T$ in modo che $\mathrm{supp}\,\Phi \subseteq (-\infty,T']\times[-R,R]$

$$0=\iint_\Omega \Phi\,\mathrm{div}(\vec{G})\,\underset{dt\,dx}{dz} \overset{\text{teo div}}{=} -\iint_\Omega \nabla\Phi\cdot\vec{G}\,dt\,dx + \int_{\partial\Omega}\Phi\,\vec{G}\cdot\vec{\nu}_{ext}\,d\sigma$$

$$\Rightarrow \iint_\Omega [\Phi_t u + \Phi_x F(u)]\,dt\,dx = +\int_{\partial\Omega}\Phi\,\vec{G}\cdot\vec{\nu}_{ext}\,d\sigma$$





se $t=0$ $\quad V_{ext}=(-1,0) \quad \vec{G}\cdot\vec{V}_{ext} = -u \quad d\sigma = dx$

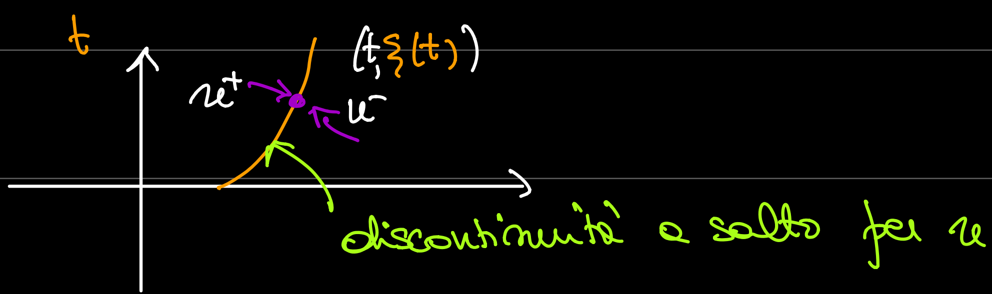
$$\Rightarrow \int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty} u\,\Phi_t + F(u)\,\Phi_x = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\Phi(0,x)\,dx$$

DEFINIZIONE (SOLUZIONE IN SENSO DEBOLE)

Una funzione $u:[0,T)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice soluzione debole di (PC) se $\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$

(1) esiste una (o un numero finito di) curve $\Gamma = \{(t,\xi(t)) : t\in I\}$ di classe C^1 tale che $u\in C^0([0,T)\times\mathbb{R}\setminus\Gamma)$ e, per ogni $t\in I$ esistono finiti

$$u^{\pm}(t,\xi) = \lim_{x\to\xi(t)^{\pm}} u(t,x)$$



(2) $\forall\,\Phi\in C^1_c((-\infty,T)\times\mathbb{R})$ valga la condizione integrale (**).

La curva Γ verrà detta curva di discontinuità a salto per u

TEOREMA (CONDIZIONI DI RANKINE - HUGONIOT)

Consideriamo una soluzione debole che sia anche di classe $C^1([0,T)\times\mathbb{R}\setminus\Gamma)$. Allora

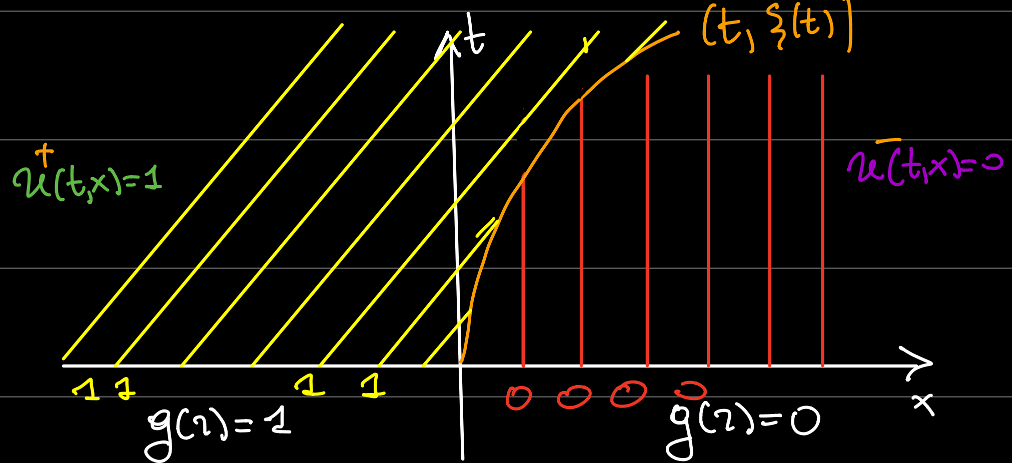
(i) u é anche soluzione classica dell'equazione in $[0,T)\times\mathbb{R}\setminus\Gamma$. Inoltre

(ii) lungo la curva di salto vale la condizione di Rankine - Hugoniot

$$\boxed{[u^+(t,\xi(t)) - u^-(t,\xi(t))]\,\xi'(t) = (F(u^+(t,\xi(t)) - F(u^-(t,\xi(t)))}$$

ESEMPIO: Equazione di Burgers

(I)

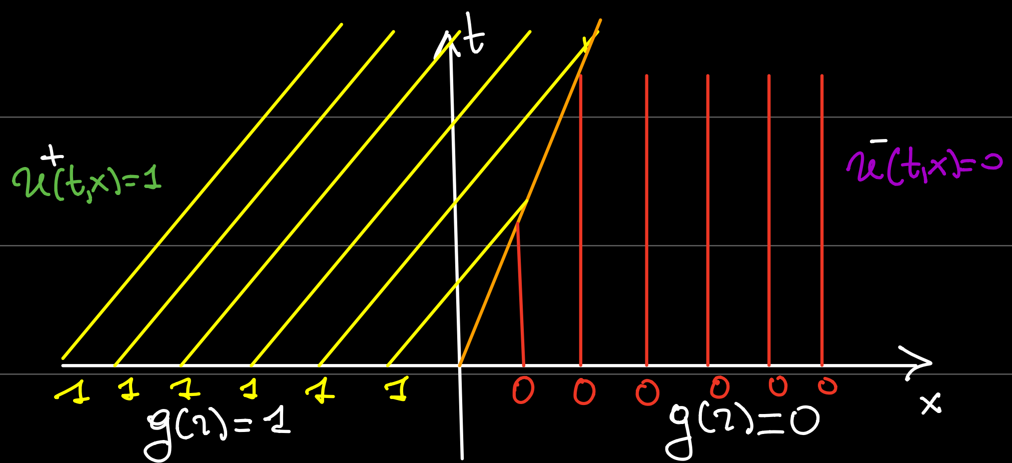


Come faccio a trovare Γ?

$$a(u)=u \Rightarrow F(u)=\frac{1}{2}u^2=\int_0^u a(s)\,ds=\int_0^u s\,ds$$

$$\xi'(t)=\frac{F(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{u^+}})-F(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{u^-}})}{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{u^+}}-\underset{0}{\underset{\shortparallel}{u^-}}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \xi(t)=\frac{1}{2}t$$



Questo è la soluzione in senso debole, perché è l'unica che verifica le condizioni di Rankine-Hugoniot.

Dimostrazione del teorema

(i) Prima parte - Sappiamo che $u\in C^1([0,T)\times\mathbb{R}\setminus\Gamma)$ e supponiamo che $u_t+[F(u)]_x\neq 0$ in un punto $(t_0,x_0)\notin\Gamma$

Per esempio, possiamo pensare che $u_t + [F(u)]_x > 0$ in

siccome $u_t + [F(u)]_x$ è continua escluso Γ

(t_0, x_0) e quindi, in un suo intorno $B_r(t_0, x_0) \subset (0,T) \times \mathbb{R} \setminus \Gamma$

Sia $\Phi \in C^1_0((-\infty, T) \times \mathbb{R})$ tale che $supp(\Phi) \subseteq B_r(t_0, x_0)$,

anch'esso non negativo (ma non $\equiv 0$) in $B_r(t_0, x_0)$.

Avremo allora

$$0 < = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t,x)\left[u_t + [F(u)]_x\right](t,x)\,dx\,dt = \iint_{B_r(t_0,x_0)} \Phi[u_t + F(u)]\,dx\,dt$$

$$= \iint_{B_r(t_0,x_0)} \Phi \operatorname{div}(\vec{G})(t,x)\,dx\,dt = \qquad \Omega = B_r(t_0,x_0)$$

$$= \iint_\Omega \underbrace{\nabla\Phi \cdot \vec{G}}_{= u\Phi_t + F(u)\Phi_x}\,dx\,dt + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Phi\, \vec{G} \cdot \vec{\nu}_{ext}\,d\sigma}_{=0}$$

$= 0$ per (**) assurdo

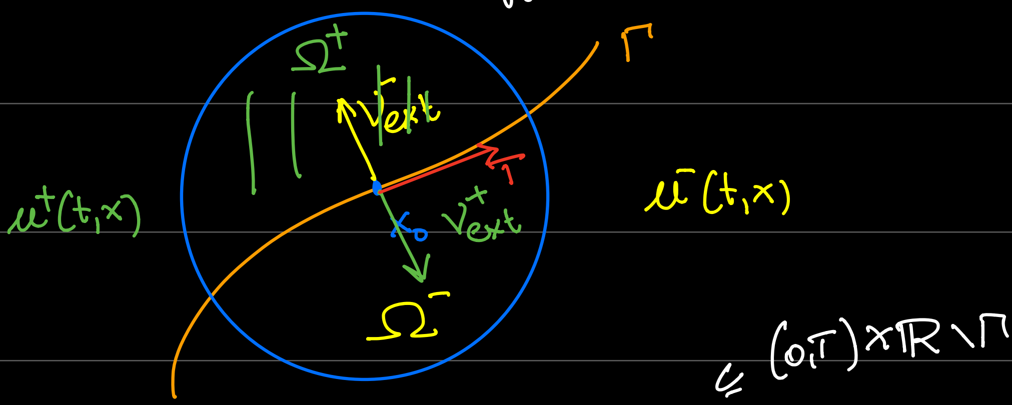
ii) Di nuovo, uno strumento fondamentale è il teorema delle divergenza, nella sua forma

$$\int_\Omega \Phi \operatorname{div}(\vec{G})\,dt\,dx = -\int_\Omega \nabla\Phi \cdot \vec{G}\,dt\,dx + \int_{\partial\Omega} \Phi\, \vec{G} \cdot \vec{\nu}_{ext}\,d\sigma$$

dove $G(t,x) = (u(t,x), F(u(t,x))$ valida in un aperto Ω, con frontiera regolare a pezzi,

in cui $\boxed{\vec{G} \in C^1(\bar{\Omega})}$ - Osserviamo che $\vec{G} \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}\setminus\Gamma)$

Quindi il teorema é applicabile se $\Omega \subseteq (0,T)\times\mathbb{R}\setminus\Gamma$)



$\subseteq (0,T)\times\mathbb{R}\setminus\Gamma$

Consideriamo separatamente Ω^+ e Ω^-, le cui frontiere

sono regolari a pezzi

$$\vec{T} = (1, \xi'(t)) \Big/ \sqrt{1+|\xi'(t)|^2}$$

$$\vec{\nu}^{\,+}_{ext} = (\xi'(t), -1) \Big/ \sqrt{1+|\xi'(t)|^2} = -\nu^-_{ext}$$

Poiché $\operatorname{div}\vec{G} = 0$ sia su Ω^+ che su Ω^-, su cui $\vec{G} \in C^1(\overline{\Omega^+})$

Abbiamo $$\iint_{\Omega^\pm} \left[\Phi_t u + \Phi_x F(u)\right] dt\,dx = \oint_{\partial\Omega^\pm} \Phi \vec{G} \cdot \vec{\nu}^{\,\pm}_{ext}\, d\sigma$$

Se il $\operatorname{supp}(\Phi) \subseteq B_2(x_0)$, $\Phi \equiv 0$ su $\partial B_2(x_0)$ e quindi

$$\iint_{\Omega^\pm} \left[\Phi_t u^\pm + \Phi_x F(u^\pm)\right] dt\,dx = \oint_{\Gamma} \Phi \vec{G}^\pm \cdot \vec{\nu}^{\,\pm}_{ext}\, \underset{ds}{d\sigma} \qquad G^\pm = (u^\pm, F(u^\pm))$$

e sommando otteniamo, $\forall\, \Phi \in C^1_c(B(x_0,r))$

$$\iint_{\Omega^+\cup\Omega^-} \left[\Phi_t u + \Phi_x F(u)\right] dt\,dx = \int_\Gamma \Phi\left[\vec{G}^+\cdot\vec{\nu}^+_{ext} - \vec{G}^-\cdot\underbrace{\nu^+_{ext}}_{-\nu^-_{ext}}\right] d\sigma$$

Ma la condizione integrale (**) ci dice che il primo membro $=0$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \Phi\left[\vec{G}^+\cdot\vec{\nu}^+_{ext} - \vec{G}^-\cdot\nu^+_{ext}\right] d\sigma = 0 \qquad \forall\, \Phi \in C^1_c(B(x_0,r))$$

$$\Rightarrow (\vec{G}^+ - \vec{G}^-)\cdot\nu^+_{ext} = 0 \quad \text{lungo } \Gamma$$

$$\boxed{(u^+ - u^-)\,\xi'(t) - (F(u^+) - F(u^-)) = 0} \quad \text{lungo } \Gamma$$