Esercizio 1 :

$$\begin{cases} u_t + (1-2u)u_x = 0 \\ u(0,x) = \arctan(x) \end{cases}$$

Usiamo il metodo delle caratteristiche:

$$\begin{cases} \dot{v} = (1-2w) & v(0,r) = r \\ \dot{w} = 0 & w(0,r) = \operatorname{arctg} r \end{cases}$$

$w(t,r) = \operatorname{arctg} r \qquad v(t) = (1-2\operatorname{arctg} r)t + r = x$

Per invertire la relazione $x = (1-2\operatorname{arctg} r)t + r$ è necessario che la funzione $r \longmapsto (1-2\operatorname{arctg} r)t + r$ sia crescente

$-\frac{2}{1+r^2} t + 1 > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad t < t^* = \frac{1}{2} \Longrightarrow t^* = \frac{1}{2}$ tempo di shock

se $0 < t < \frac{1}{2} \Longrightarrow \exists R = R(x,t)$ t.c. $x = (1-2\operatorname{arctg} r)t + r \Leftrightarrow r = R(x,t)$

e $u(x,t) = \arctan(R(x,t))$. è la soluzione.

Esercizio 2 - Studiare il problema

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

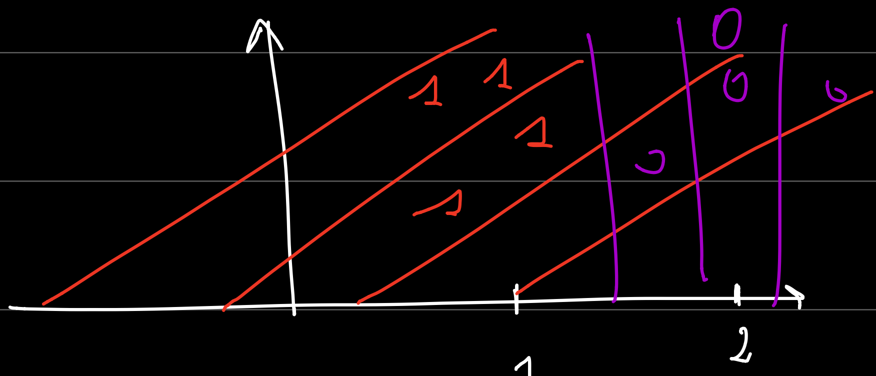
Per semplicità studiamo per prima cosa il problema

con $g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

Le semirette caratteristiche sono

$x = t + r$ se $r \leq 1$

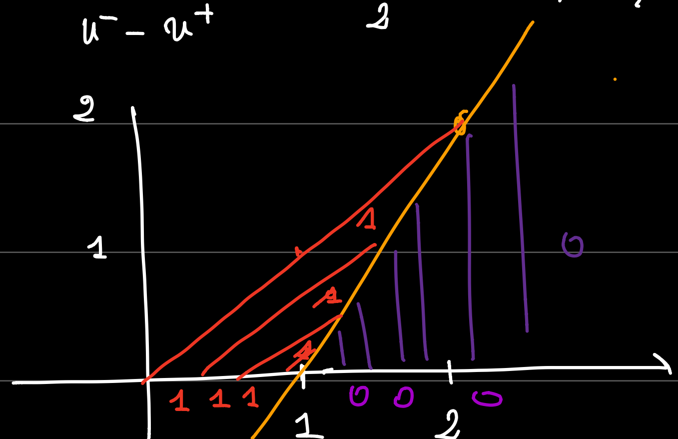
$x = r$ se $r > 1$



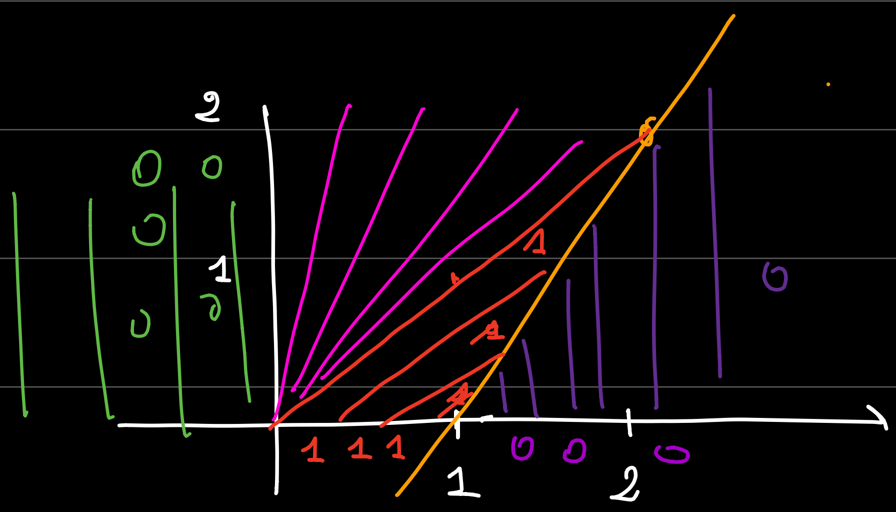
Il salto di u è $u^- - u^+ = 1$ - Il salto di $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ è

$F(u^-) - F(u^+) = \frac{1}{2}$ - L'equazione per la curva di shock è

$$\xi'(t) = \frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} = \frac{1}{2} \Rightarrow \xi(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$



Ora cerchiamo di completare con il tratto $x<0$ -



Le semirette caratteristiche sono verticali per $r<0$

$x = r$ se $r<0$ [zona verde] e $u(x,t) = 0$

$x = rt$ se $0 \le r \le 1$ [zona rosa]. e $u(x,t) = \dfrac{x}{t}$

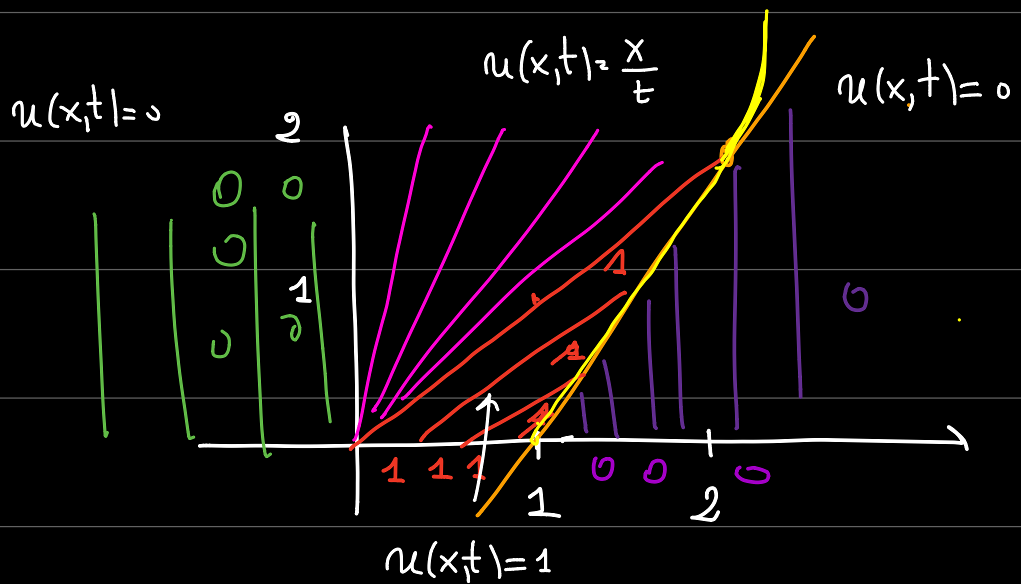
Quando le semirette caratteristiche rosa e viola si incontrano troviamo una linea di salto che ha equazione:

$$\xi'(t) = \frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi}{t}\right)^2 - 0\right]}{\frac{\xi}{t} - 0} = \frac{1}{2}\frac{\xi}{t}$$

$\xi(2) = 2$

separando le variabili: $\xi(t) = c\sqrt{t}$ $\quad \xi(2) = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$.

Incollando i due tratti otteniamo la curva gialla:



Esercizio 3

$$\begin{cases} u_t + (1-2u)u_x = 0 \\ u(0,x) = x \end{cases}$$

Usiamo il metodo delle caratteristiche:

$$\begin{cases} \dot{v} = (1-2w) & v(0,r) = r \\ \dot{w} = 0 & w(0,r) = r \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad w = r \quad$ e $\quad v(t,r) = (1-2r)t + r$

Cerchiamo di invertire ponendo $x = (1-2r)t + r \iff$

$$x - t = r(1-2t) \iff r = \frac{x-t}{1-2t}$$

$$u(x,t) = r(x,t) = \frac{x-t}{1-2t}$$ vedi esercizio 1

$$u_x = \frac{1}{1-2t} \qquad u_t = \frac{-(1-2t)-(x-t)(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{-1+2t+2x-2t}{(1-2t)^2} = \frac{2x-1}{(1-2t)^2}$$

$$1-2u = \frac{1-2t-2(x-t)}{1-2t} = \frac{1-2x}{1-2t}$$

$$u_t + (1-2u)u_x = \frac{2x-1}{(1-2t)^2} + \frac{1-2x}{(1-2t)^2} = 0$$

Quindi u é soluzione. Tuttavia $t^* = \frac{1}{2}$ é tempo di shock: e $u_x \to +\infty$ — Non é possibile estendere u su tutto il semipiano