$g_{**} : L^q(\Omega) \to L^r(\Omega)$

$d_{u_0} g_{**} : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$ è lineare

$u_0 \longmapsto d_{u_0} g_{**}$ $\quad dg_{**} : L^q(\Omega) \to \mathcal{L}(L^q(\Omega), L^r(\Omega))$

↑ norma operatoriale

non è lineare!

ESERCIZIO: dimostrare la continuità di dg_{**}

$(g_{**} \in C^1)$

Conclusione dell'ultimo lezione

$$\mathcal{G}(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx$$

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\, dt$$

$f(x,0)$ limitata

$\exists \frac{\partial f}{\partial s}(x,\cdot)$ continua per q. ogni x,

$\frac{\partial f}{\partial s}(\cdot, s)$ misurabile $\forall s$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)\right| \le C(1 + |s|^{p-1}) \qquad \forall s \text{ q.o. } x$$

$\Rightarrow \quad |f(x,s)| \le C(1+|s|^p)$

$|F(x,s)| \le C(1+|s|^{p+1})$

$$\mathcal{J}(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\,dx$$

$$\mathcal{J} : L^{p+1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_{u_0}\mathcal{J} = f(x,u_0(x)) = \left(f\right)_{\#}(u_0)$$

$$d^2_{u_0}\mathcal{J} = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#}(u_0)$$

Ma si può identificare con la forma quadratica

$$\boxed{d^2_{u_0}\mathcal{J}[h,k] = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial s}(x,u_0(x))\,h(x)k(x)\,dx}$$

$\forall\, h,k \in L^{p+1}(\Omega)$

Hölder $\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#}(u_0) \quad h \quad k$

$$\frac{p-1}{p+1} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1$$

FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE PER $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J}(u_0+h) = \mathcal{J}(u_0) + d_{u_0}\mathcal{J}[h] + \frac{1}{2}d^2_{u_0}\mathcal{J}[h,h] + o\left(\|h\|^2_{L^{p+1}}\right)$$

$\forall\, u_0, h \in L^{p+1}(\Omega)$

$\mathcal{J}$ è di classe $C^2(L^{p+1}(\Omega))$.

Dimostrazione: per esercizio $\varphi(t) = \mathcal{J}(u_0 + th)$ $t \in [0,1]$.

Proposizione: Se u_0 è pto di minimo (locale)

per $\mathcal{J} \in C^2 \Rightarrow d_{u_0}\mathcal{J} = 0$ e $d^2_{u_0}\mathcal{J} \geq 0$

(nel senso delle forme quadratiche)

Dimostrazione per esercizio.

$$\mathcal{J}(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x, u(x))$$

con $u \in H^1_0(\Omega)$.

in cui

$$|F(x,s)| \leq C\left(1 + |s|^\alpha\right)$$

dove $\alpha \geq 2$ se $N = 2$

$$2 \leq \alpha \leq \frac{2N}{N-2} \quad \text{se} \quad N \geq 3$$

$$|f(t,s)| \leq C\left(1 + |s|^{\alpha-1}\right)$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right| \leq C\left(1 + |s|^{\alpha-2}\right)$$

$$p+1 = \alpha = \begin{cases} \alpha \geq 2 & \text{se } N=2 \\ \dfrac{2N}{N-2} & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

Sotto queste ipotesi,

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$ $\qquad F_{\#}(u_0) \in L^1(\Omega)$

Ω misura finita $\qquad f_{\#}(u_0) \in L^s$. $\qquad s>1 \quad N=2$

$s = \dfrac{2}{\alpha-1}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#}(u_0) \in ?$$

IMMERSIONE DI SOBOLEV: $\quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) & \forall\, s \geq 1 \quad N=2 \\ L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) & N \geq 3 \end{cases}$

$|\Omega| < +\infty$

Se $N \geq 3$ prendiamo

$$p+1 = \frac{2N}{N-2} \qquad p = \frac{N+2}{N-2} \qquad p-1 = \frac{4}{N-2}$$

$$(f_{\#})(u_0) \in L^{(p+1)'}(\Omega) = L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \qquad \left[\frac{N-2}{2N} + \frac{N+2}{2N} = 1\right]$$

se $N=2$

$$p+1 = s > 2$$

$$(f_{\#})(u_0) \in L^{(p+1)'}(\Omega) = L^{s'}(\Omega)$$

$N \geq 3$

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#}(u_0) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)}$$

Controlliamo $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_0(x))\, h(x)\, k(x)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \in L^{p+1} \qquad \in L^{p+1} \qquad \in L^{p+1}$

$$p+1 = \frac{2N}{N-2} \qquad p-1 = \frac{2N-2N+4}{N-2} \qquad \frac{p+1}{p-1} = \frac{2}{N}$$

Se $N=2$ $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\#}(u_0) \in L^\beta$ con $\beta > 1$ -

ESERCIZIO: Differenziale secondo

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x, u(x))\,dx$$

Con le ipotesi di crescita scritte sopra -

PROPOSIZIONE: $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$ e

$$\boxed{d_u^2 J[h,k] = \int_\Omega \left[\nabla h \cdot \nabla k - \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_0(x))\, h(x) k(x)\right] dx}$$

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \mathcal{F}(u)$$

$$J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \;,\; u \mapsto \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2$$

$d_{u_0} J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineare

$d_{u_0} J[h] =$

$$J(u_0+h) - J(u_0) - d_{u_0}J[h] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla(u_0+h)|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2$$

$$-d_{u_0}J[h] = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla h + \frac{1}{2}|\nabla h|^2 - d_{u_0}J[h]$$

$$\Rightarrow \boxed{d_{u_0}J[h] = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla h}$$

e $\quad J(u_0+h) - J(u_0) - d_{u_0}J[h] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla h|^2 = o(\|h\|_{H^1_0(\Omega)})$

$$\boxed{J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2} \Rightarrow d_{u_0}J = R(u_0)$$

R

$dJ : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ = isomorfismo di Riesz

$$R(u_0)[h] = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla h$$

$\boxed{dJ : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)}$ è proprio l'isomorfismo di Riesz.

$$\Rightarrow \boxed{d^2_{u_0}J = R \quad \forall u_0}$$

$$d^2_{u_0}J[h][k] = R(h)[k] = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla k$$

$h \in H^{-1}_0(\Omega)$

Mettiamo insieme i due pezzi $\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \mathcal{Y}(u) = J$

$$d_{u_0} J[h] = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla h - f(x, u_0(x)) h$$

$$d^2_{u_0} J[h,k] = \int_\Omega \left[\nabla h \cdot \nabla k - \frac{\partial f}{\partial s}(x, u_0(x)) h(x) k(x) \right] dx$$

DEFINIZIONE: Diciamo che u è soluzione in senso debole del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)) & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $\forall h \in H^1_0(\Omega)$

$$\boxed{\int_\Omega \left[\nabla u \cdot \nabla h - f(x, u(x)) \cdot h(x) \right] dx = 0}$$

cioè se $\boxed{d_{u_0} J = 0}$, dove $J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u(x))$.

DEFINIZIONE 1. Diciamo che u_0 è una soluzione stabile se è soluzione debole e $d^2_{u_0} J > 0$ su $H^1_0(\Omega)$.

2. Diciamo che u_0 è una soluzione semistabile, se è una soluzione debole e $d^2_{u_0} J \geq 0$ su $H^1_0(\Omega)$

Eq. evolutiva: $u_t - \Delta u = f(x, u(x))$

DEFINIZIONE: Sia u_0 una soluzione debole. L'indice di Morse di u_0 è la massima dimensione di un sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ in cui $d^2_{u_0} J$ sia definita negativa. L'indice di Morse largo o aumentato di u_0 è la dimensione del più grande sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ in cui $d^2_{u_0} J$ sia semidefinita negativa.

PROPOSIZIONE: Se u_0 è minimo locale per J $\Rightarrow$ è una soluzione semistabile ($\Leftrightarrow$ l'indice di Morse di u_0 è nullo).

Dimostrazione: se ci fosse un sottospazio in cui $d^2_{u_0} J < 0$, prenderemmo h in questo sottospazio

$$J(u_0+h) = J(u_0) + \underbrace{d_{u_0} J[h]}_{=0} + \frac{1}{2} d^2_{u_0} J[h,h] + o(\|h\|^2)$$

$$\leq -\varepsilon \|h\|^2$$

$$< J(u_0)$$ per h sufficientemente piccolo (assurdo).

FORME QUADRATICHE IN $H_0^1(\Omega)$ e PROBLEMI SPETTRALI ASSOCIATI (problemi ellittici lineari)

Studiare la forma quadratica su $H_0^1(\Omega)$

$$d^2_{u_0} J[h,h] = \int_\Omega \left[|\nabla h|^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)(u_0) h^2(x) \right] dx$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)(u_0) \neq -a(x)$$

$$a(x) \in \begin{cases} L^s(\Omega) & \text{con } s>1 \text{ se } N=2 \\ L^{N/2}(\Omega) & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

Operatore ellittico associato

$$\begin{cases} -\Delta h + a(x) h \\ h \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad |\Omega| < +\infty$$

→ Risolubilità dei problemi

$$\begin{cases} -\Delta h + a(x) h = \lambda h + f \\ h \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Spettro dell'operatore $\mathcal{L} = -\Delta + a$ nel senso dei $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathcal{L} - \lambda \mathbb{1}$ sia invertibile (su L^2).

Problema: come gestire la presenza di $a \notin L^\infty(\Omega)$

coefficiente in principio solo in opportune classi di integrabilità.

PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

TEOREMA: Supponiamo che $|\Omega| < +\infty$. Il problema agli autovalori

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

ammette una successione crescente di autovalori λ_n t.c. $\lambda_n \to +\infty$ corrispondente ad una successione $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ che costituisce una base Hilbertiana di $L^2(\Omega)$ (e di $H_0^1(\Omega)$).

OSSERVAZIONE: $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad -\frac{d^2}{dx^2}u = \lambda u \quad u \in L^2(\mathbb{R})$ non ha soluzione. $L^\infty(\Omega) \Rightarrow$ tutti i $\lambda > 0$ vanno ben. L'ipotesi $|\Omega| < +\infty$ è essenziale

Dimostrazione $a \equiv 0$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad (-\Delta)^{-1}\mathbb{R} : H_0^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$$

$$-\Delta u = \lambda u \iff \frac{1}{\lambda} u = (-\Delta)^{-1} u$$
$$u \in H^1_0(\Omega)$$

compatto per il teo. Rellich-Kondrachov. immersione di Sobolev

$$\begin{tikzcd} L^2(\Omega) \arrow[r, hook, "i^*"'] \arrow[rrr, bend right, "T"'] & H^{-1}(\Omega) \arrow[r, "(-\Delta)^{-1} = R^{-1}"] & H^1_0(\Omega) \arrow[r, "i"'] & L^2(\Omega) \end{tikzcd}$$

$$T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

é compatto, ed é autoaggiunto.

Per il teorema Hilbert-Schmidt sappiamo che $\exists$ un insieme al più numerabile $\{\mu_n\}_n$ di autovalori corrispondenti ad autofunzioni $\{\varphi_n\}_n$ tali che

(i) $\mu_n \downarrow 0$ se sono infiniti

(ii) $\operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}} = L^2(\Omega)$

Nel nostro caso $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Necessariamente gli autovalori sono infiniti e $\mu_n \downarrow 0$

$$T\varphi_n = \mu_n \varphi \iff \underbrace{(-\Delta)^{-1}\varphi_n}_{\in H^1_0(\Omega)} = \mu_n \varphi_n \iff \begin{cases} \varphi_n \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta \varphi_n = \frac{1}{\mu_n}\varphi_n \end{cases}$$