Cerchiamo ora di dimostrare il teorema nel caso $a \not\equiv 0$, $a \in L^s$, con $\begin{pmatrix} s>1 & N=2 \\ s=\frac{N}{2} & N\geq 3 \end{pmatrix}$ -

Ricordiamo l'immersione di Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$

(caso $N\geq 3$) $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e chiediamo

$$S =: \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega u^{2^*}\right)^{2/2^*}} = S(\Omega) > 0$$

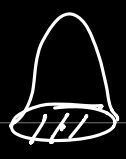
$\| \quad$

$S(\mathbb{R}^N) \quad \forall \Omega$

In realtà si dimostra che non dipende da Ω -

[Perché non dipende da Ω? In generale, poiché $H_0^1(\Omega) \subseteq H_0^1(\mathbb{R}^N)$ $\left(\int |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ $S(\Omega) \geq S(\mathbb{R}^N)$ - Basta prendere una $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$: $\frac{\int |\nabla u_\varepsilon|^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} \leq S+\varepsilon$

e osservare che $u(x) \to u(\lambda x)$ è quoziente rimane invariato





]

OSSERVAZIONE:

Supponiamo che $\| a^- \|_{L^{N/2}(\Omega)} < S$ - Allora la forma quadratica

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + a(x)u^2$$

è definita positiva e definisce una norma equivalente

in $H_0^1(\Omega)$. Infatti

1) $$\int_\Omega |\nabla u|^2 + a(x)u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \|a\|_{L^{N/2}(\Omega)} \left(\int_\Omega u^{2N/N-2} \right)^{2/2^*}$$

($u \in L^{N/2}$, $u \in L^{N/N-2}$)

$$\leq \left(1 + \frac{\|a\|_{N/2}}{S}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

2) $$\int_\Omega |\nabla u|^2 + au^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 - a^- u^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 - \|a^-\|_{N/2} \|u\|^2_{L^{2^*}}$$

$$\geq \left(1 - \frac{\|a^-\|_{N/2}}{S}\right) \|\nabla u\|^2 \geq \varepsilon \|\nabla u\|^2$$

($\varepsilon > 0$)

Le due norme sono equivalenti. Possiamo dotare $H_0^1(\Omega)$ di un nuovo prodotto scalare

$$\boxed{(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + a(x)uv}$$

che è equivalente al prodotto scalare usuale. Denotiamo con R_a l'isomorfismo di Riesz associato al nuovo prodotto scalare:

$$L^2 \xrightarrow{i^*} H^{-1} \xrightarrow{R_a^{-1}} H_0^1(\Omega) \xrightarrow{i} L^2(\Omega)$$

$$R_a : H_0^1 \to H^{-1}(\Omega) : u \mapsto R_a(u) \in H^{-1}$$

$$R_a(u)[v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + a(x)uv$$

avrò un nuovo operatore (compatto, autoaggiunto)

$K_a = i^* \circ R_a^{-1} \circ i : L^2 \to L^2$, a cui applico il teorema di ortogonalizzazione di Hilbert-Schmidt.

OSSERVAZIONE: posso pensare di estendere questo ragionamento a forme quadratiche del tipo

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla u) + a(x)uv$$

dove $A \in L^\infty(\Omega)$, $\exists \lambda, \Lambda > 0$ t.c. $\lambda |\xi|^2 \leq (A(x)\xi, \xi) \leq \Lambda |\xi|^2$

$\forall x \in \Omega$ e $\|a^-\|_{L^{N/2}(\Omega)} < S\lambda$.

Osservazione: lo stesso procedimento si può estendere ad altre forme quadratiche che danno luogo ad operatori in forma di divergenza del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + a(x)u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

nel senso delle soluzioni deboli $\iff \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla v) + a(x)uv = \lambda \int_\Omega uv$$

Ultimo passo della dimostrazione: togliere l'ipotesi $\|a\|_{N/2} < S$

$$-\Delta u + a(x)u = \lambda u$$

Tuttavia: $t>0$ $\quad -\Delta u + (a(x)+t)u = (\lambda+t)u$

È elementare dimostrare che, se $a \in L^{N/2}(\Omega)$.

$$\lim_{t\to+\infty} \| (a+t)^- \|_{L^{N/2}} = 0$$

Infatti, usiamo il teorema di convergenza dominata

i) $\lim_{t\to+\infty} (a(x)+t)^- = 0$ per q.o. x.

ii) $0 \le (a(x)+t)^- \le |a(x)| \in L^{N/2}$

$\Rightarrow$ la tesi.

In conclusione posso applicare il caso con parte negativa piccola.

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$\exists$ successione $\lambda_n \to +\infty$ di autovalori corrispondenti ad una base Hilbertiana (ortonormale) di autofunzioni $(\varphi_n)_n$ in L^2. In realtà le $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ e sono ortogonali rispetto alla forma bilineare Q_a

$$\int \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_m + a(x)\varphi_n\varphi_m = 0 \quad \text{se } n \neq m$$

$= \lambda_n$ se $n = m$. ☒

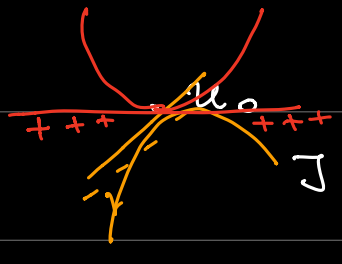
OSSERVAZIONE: Se la forma quadratica è associata alla derivata seconda di un funzionale J come quelli che abbiamo visto nelle lezioni precedenti, allora

- il numero di autovalori negativi (contati con molteplicità) ci dà l'indice di Morse della soluzione.
- il numero degli autovalori ≤ 0 ci dà l'indice di Morse largo.

Una soluzione è stabile se $\lambda_n > 0 \ \forall n$, è semistabile se $\lambda_n \geq 0 \ \forall n$.

Gli autovalori sono quelli del problema linearizzato

$$\begin{cases} -\Delta w - \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)(u_0) w = \lambda w \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$



$H_0^1(\Omega)$

$E^- = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ t.c. $\lambda_1, \dots, \lambda_k < 0$

sottospazio negativo, su cui J è concavo

$E^+ = (E^-)^\perp = \overline{\text{span}\{\varphi_{k+1}, \dots\}}$ su cui $d^2_{u_0} J$ è convesso.

TEOREMA DELL'ALTERNATIVA DI FREDHOLM :

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ di misura finita, consideriamo il problema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x) u = \lambda u + f \\ u \in H^1_0(\Omega) \end{cases} \qquad a \in L^s(\Omega),\ s > 1,\ N = 2,\ \gamma = \frac{N}{2} \text{ se } N \geq 3.$$

(i) se λ non è autovalore, allora l'eq. ha soluzione unica $\forall f \in L^2(\Omega)$.

ii) se λ è autovalore, allora il pb. ha soluzione se e solo se $\int_\Omega f\varphi = 0$ $\forall \varphi$ autofunzione del problema $-\Delta\varphi + a\varphi = \lambda\varphi$. Se u è soluzione, anche $u + \varphi$ è soluz. $\forall \varphi \in$ autospazio di λ.

Dimostrazione : cerchiamo una dimostrazione "variazionale"

Riconnettiamoci al principio di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

posso cercare il $\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu = \min \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)$

$$F(x,s) = f(x)s$$

Metodo diretto del calcolo delle variazioni.

Proviamo a usare questa strategia per il problema

$$(PD) \quad \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u + f(x) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}a(x)u^2 - \frac{\lambda}{2}u^2 - f(x)u$$

1. OSSERVAZIONE: I punti critici di J su $H_0^1(\Omega)$ ($d_{u_0} J = 0$) sono le soluzioni deboli del problema (PD). (dim per esercizio)

2. Ci chiediamo quando la forma quadratica

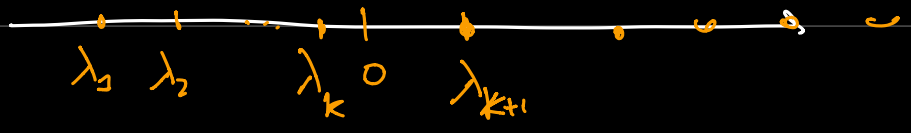
$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}a(x)u^2 - \frac{\lambda}{2}u^2 = Q_{a,\lambda}(u)$$

è definita positiva su $H_0^1(\Omega)$ [e definisce quindi

una norma equivalente]. Consideriamo la successione degli autovalori $\{\lambda_n\}_n$ associata al problema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n + a(x)\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \\ \varphi_n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \cdots$$



1 passo - La forma quadratica $Q_{a,\lambda}$ è definita positiva se $\lambda < \lambda_1$. In questo caso, il funzionale ammette minimo (unico) su $H_0^1(\Omega)$ e abbiamo risolto il problema.

2. Supponiamo che $\boxed{\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}}$ e consideriamo

$$E_k^- = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \qquad E_k^+ = \overline{\text{span}\{\varphi_{k+1}, \dots\}}$$

Cosa succede? $f = f_- + f_+ \in E^- \oplus E^+$

Posso risolvere separatamente i problemi non omogenei con f_- e f_+.

Cosa succede su E_k^- della nostra forma quadratica

$$Q_{a,\lambda} - \quad u \in E_k^- \,, \quad u = \sum_{n=1}^{k} u_n \varphi_n$$

$$Q_{a,\lambda}(u) = \sum_{n=1}^{k} (\lambda_n u_n^2 - \lambda u_n^2) = \sum_{n=1}^{k} \underbrace{(\lambda_n - \lambda)}_{<0} u_n^2$$

le autofunzioni φ_n sono ortogonali rispetto alla forma bilineare $Q_{a,0}$

La forma quadratica $Q_{a,\lambda}$ è definita negativa.

Posso risolvere il problema

$$-\Delta u + a u = \lambda u + f_-$$

dentro E_k^-, è la soluzione corrispondente al

$$\max_{u \in E_k^-} \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2} a u^2 - \frac{\lambda}{2} u^2 - f_- u$$

Come faccio a risolvere il pb? $u = \sum_{n=1}^{k} u_n \varphi_n$

scrivo $f_- = \sum_{n=1}^{k} f_{-,n} \varphi_n$

$$-\Delta u + a u - \lambda u = \sum_{n=1}^{k} (\lambda_n - \lambda) u_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{k} f_{-,n} \varphi_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{f_{-,n}}{\lambda_n - \lambda} \qquad n = 1, \dots, k.$$

$$u \in E_k^- \Rightarrow J(u) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2}(\lambda_n - \lambda) u_n^2 - f_{-,n} u_n$$

e la condizione di massimalità equivale alla criticità.

Ora risolviamo il problema su E_k^+,

$$\begin{cases} -\Delta u + a u = \lambda u + f_+ \\ u \in E_k^+ \end{cases}$$

dove f_+ è la proiezione di f su E_k^+. Utilizziamo il principio di Dirichlet e proviamo a

$$\min_{u \in E_k^+} \int_\Omega \underbrace{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{a(x)}{2}u^2 - \frac{\lambda}{2}u^2}_{\text{è definita positiva su } E_k^+} - f_+ u$$

Il minimo è raggiunto. Qual è la condizione di estremalità? Stiamo facendo una minimizzazione vincolata $\int_\Omega u\varphi_n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, k$ abbiamo k vincoli lineari!!! Moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u + f_+ + \sum_{n=1}^{k} \mu_n \varphi_n \\ u \in E_k^+ \end{cases}$$

In realtà tutti i $\mu_n = 0$ (basta usare come funzioni test φ_m, $m = 1, \dots, k$)

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi_m + a(x) u \cdot \varphi = \int \lambda u \varphi_m + f_+ \varphi_m + \mu_m$$

$\nabla u \cdot \nabla \varphi_m + a(x) u \cdot \varphi = 0$ perché $u \in E_k^+$; $\int \lambda u \varphi_m = 0$; $f_+ \varphi_m = 0$

$$\Rightarrow \mu_m = 0 \quad \forall m = 1, \dots k.$$