Nodo: $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

- continua, iniettiva, omeomorfismo con l'immagine

cioè: se $C = f(S^1) \subseteq \mathbb{R}^3$ con la top. di sottospazio

$\longrightarrow$ $f^{-1} : C \longrightarrow S^1$ è continua.

C (o f) si dice non annodato se esiste $F : D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ continua

tale che $F|_{\partial D^2} = f$

Dunque: annodato significa non esiste F

- I intervallo aperto, $a, b \in I$ (2)
  $\rightarrow$ su $[a,b]$ c'è esistenza e unicità

$$I = \bigcup_{a,b \in I} [a,b] \rightarrow \text{si estende la soluzione su tutto } I$$

- Cosa vuol dire C piana e convessa?

C piana: OK, C convessa = ??

Superfici nello spazio $\mathbb{R}^3$

- definendo le superfici in modo "parametrico" si incontrano subito dei problemi

$$\underline{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

U aperto (per poter fare le derivate)

- si usa un approccio diverso:

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ sottoinsieme è una superficie se: . . . .
opportune condizioni

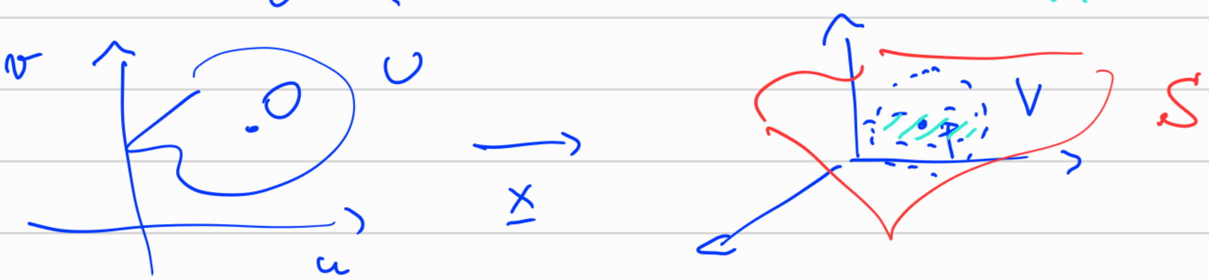
$S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice <u>superficie regolare</u> 3

<u>se</u>: per ogni $p \in S$ esiste un intorno

- V di p in $\mathbb{R}^3$
- una funzione $\underline{x} : U \longrightarrow V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$

dove U = aperto di $\mathbb{R}^2$, $\underline{x}$ suriettiva

tale che:



$\underline{x}(q) = p$ cioè $p \in \underline{x}(U)$

1 $\boxed{\underline{x} \text{ è differenziabile}}$ cioè:

$\underline{x}(u, v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \big)$

le funzioni $x(u,v), \dots,$ sono di classe C^∞

2 $\boxed{\underline{x} \text{ è un omeomorfismo}}$

cioè $\underline{x}$ iniettiva, + $\underline{x}^{-1}$ continua

3 $\forall q \in U \quad d\underline{x}_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

il differenziale di $\underline{x}$ ha <u>rango 2</u>.

Osservazione: se scriviamo qs definizione per le curve, otterremmo:

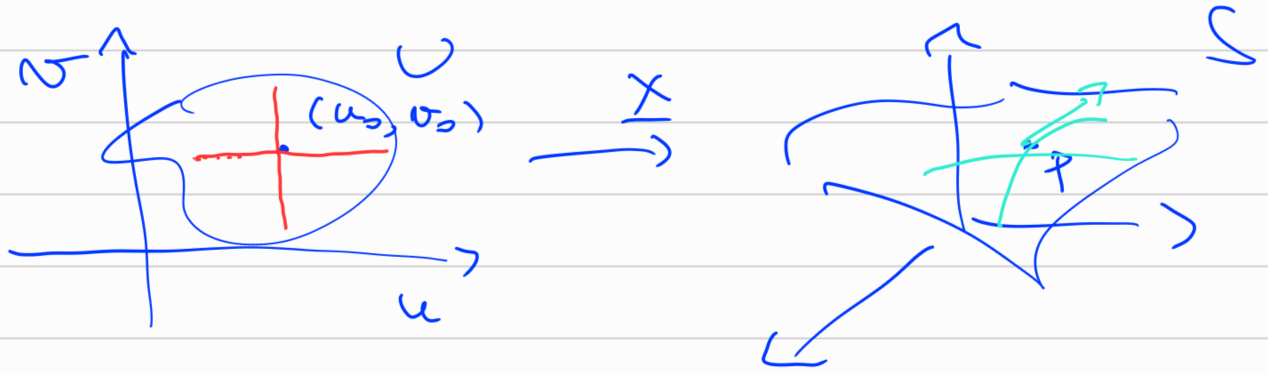
una curva regolare: ogni pto ha intorno diffeomorfo ad un intervallo aperto di $\mathbb{R}$

Teorema ogni curva regolare connessa C è omeomorfa a:

- se C è compatta $\to$ $C \simeq S^1$
- se C non è compatta $\to$ $C \simeq (a,b)$

Per le superfici, la topologia è molto più complicata.

Vediamo la condizione (3):



$$\alpha_{or}(u) = \underline{X}(u, v_0) = \text{curva su } S$$

$$\alpha'_{or}(u_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$ 5

$$\alpha_{ver}(v) = \underline{X}(u_0, v)$$

$\alpha'_{or}(u_0)$, $\alpha'_{ver}(v_0)$ sono le direzioni tangente alle curve immagine

per $q = (u_0, v_0) \in U$

$$d\underline{X}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

rango 2 $\Longrightarrow$ α'_{or}, α'_{ver} sono lin. indipendenti

le colonne di $d\underline{X}_q$: $\underline{X}_u(q)$, $\underline{X}_v(q)$

Cond 3 dice:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \underline{X}_u(q), \underline{X}_v(q) \text{ lin. indipendenti} \\ \cdot\ \underline{X}_u(q) \wedge \underline{X}_v(q) \neq 0 \end{array}\right\} \forall q \in U$$

Vocabolario:

- $\underline{x}$ si dice **parametrizzazione locale**
- $\underline{x}^{-1}$ si dice **carta locale**
- $V \cap S$ si dice **intorno coordinato**
- le componenti di $\underline{x}^{-1}$ si dicono **coordinate locali**

Superficie $\longrightarrow$ famiglia di param. locali $\{U_i, \underline{x}_i\}$ tali che

$$\bigcup_i \underline{x}_i(U_i) = S$$

Una famiglia del genere si dice **atlante**

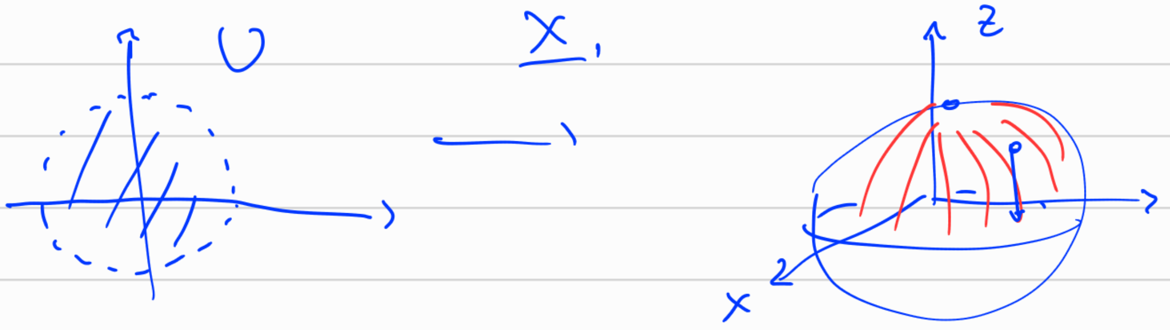
Esempio: Sfera

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\underline{x}_1(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\}$$

Sfera



① $\underline{X}_1$ differenziabile $\longrightarrow$ OK

② $\underline{X}_1$ iniettiva : chiaro per le prime 2 coord

$\underline{X}_1^{-1}$: proiezione sul piano xy

che è continua

③

$$\underline{X}_{1u}(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} , \quad \underline{X}_{1v}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

Sono sempre lin. indipendenti

$\longrightarrow$ ogni punto dell'emisfero nord soddisfa

la definizione di superficie regolare

usando : $\underline{X}_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$

ottengo: OK per emisfero sud

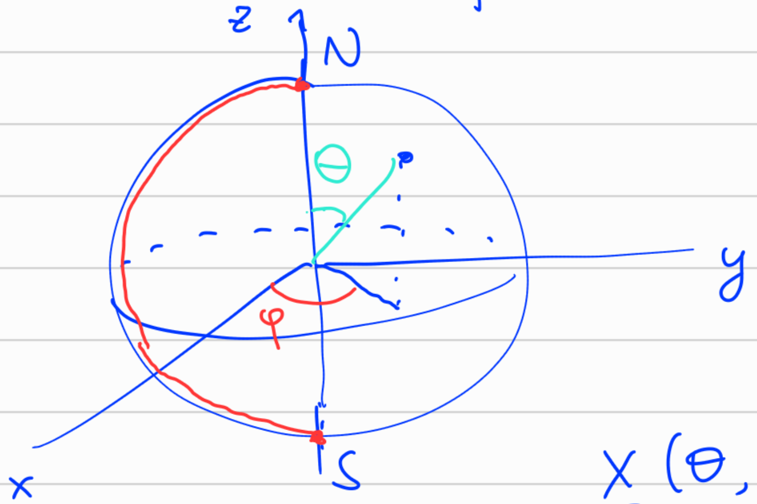
trovo altre $\underline{4}$ param locali per coprire l'intera sfera per esempio: $\underline{x}_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ 8

e così via. I domini sono sempre

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u^2+v^2 < 1\}$$

$\rightarrow$ quindi la sfera è una sup. regolare

Sulla sfera posso mettere le coord polari



$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} 0 < \theta < \pi \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{matrix} \}$$

$$\underline{x}(\theta,\varphi) = \begin{cases} x = \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

In term. geografica: φ = longitudine

θ = co-latitudine

1 $\underline{x}$ differenziabile $\rightarrow$ OK

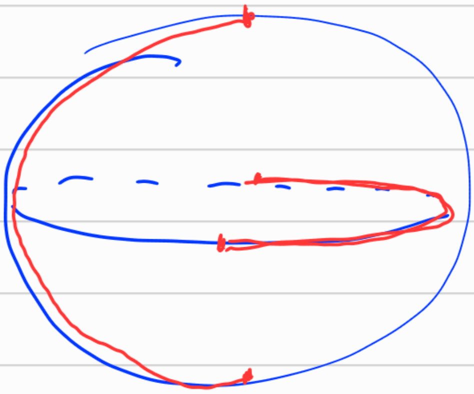
3 $d\underline{x}_q$ rango 2 $\rightarrow$ esercizio

2 iniettiva $\rightarrow$ facile

inversa continua $\rightarrow$ difficile

non lo facciamo, vedremo un teorema generale la prossima lezione

Il meridiano $\varphi = 0$ e i poli
non sono nell'imm. della param.



scambiando θ, φ e ruotando copriamo tutto tranne metà equatore

Altro atlante della sfera con $\underline{\underline{2}}$ carte (minimo possibile per la sfera).

<u>Esercizio</u>: proiezione stereografica

— o —

- caso "parametrico"

sia $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto
f di classe C^∞. Allora il grafico di f

$$S = \Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$$

è una sup. regolare

<u>dim</u>: $\underline{x}(u,v) = (u, v, f(u,v))$

e verificare che è param. regolare

Inoltre l'atlante ha una sola carta

- caso "cartesiano"

$$x^2+y^2-z^2=0 \longrightarrow$$ non è sup regolare

$$x^2+y^2+z^2=1 \longrightarrow$$

OK

<u>Definizioni</u>: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

- $p \in \mathbb{R}^3$ è <u>punto critico</u> se df_p non è suriettivo
- $a \in \mathbb{R}$ è <u>valore critico</u> se $a = f(p)$ con p pto <u>critico</u>
- $a \in \mathbb{R}$ è <u>valore regolare</u> se non è val critico

<u>Teorema</u> sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞, sia $a \in f(\mathbb{R}^3)$ valore regolare

<u>Allora</u>: $S = f^{-1}(\{a\})$ è sup. regolare

Dim. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = a\}$

sia $p \in S$, devo trovare una param. regolare

$f(p) = a \implies p$ non è critico

$\implies df_p$ è suriettivo $df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\implies$ una delle tre derivate parz. è $\neq 0$

supponiamo $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$

$\implies$ (teor. funz. implicita = teorema del Dini)

$\implies \exists\, \varphi : U \to \mathbb{R}$:

$f(x,y,z) = a \iff z = \varphi(x,y)$

φ di classe C^∞

$\implies$ param. locale : $\underline{x}(u,v) = (u, v, \varphi(u,v))$

$\longrightarrow S$ è localmente un grafico

$\longrightarrow S$ è sup. regolare ∎