Oggi martedì 16 (1)

ricevimento: 15 − 16

— o —

Superfici in $\mathbb{R}^3$

$S \subseteq \mathbb{R}^3$: $\forall p \in S$ esiste un intorno di p coperto da

$$\underline{x} : U \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$$

parametrizzazione locale (①, ②, ③)

Prop. 1 un grafico è una sup. regolare

Prop. 2 la controimm di un valore reg è una sup. regolare

Prop 1 = "caso parametrico"

Prop 2 = "caso cartesiano"

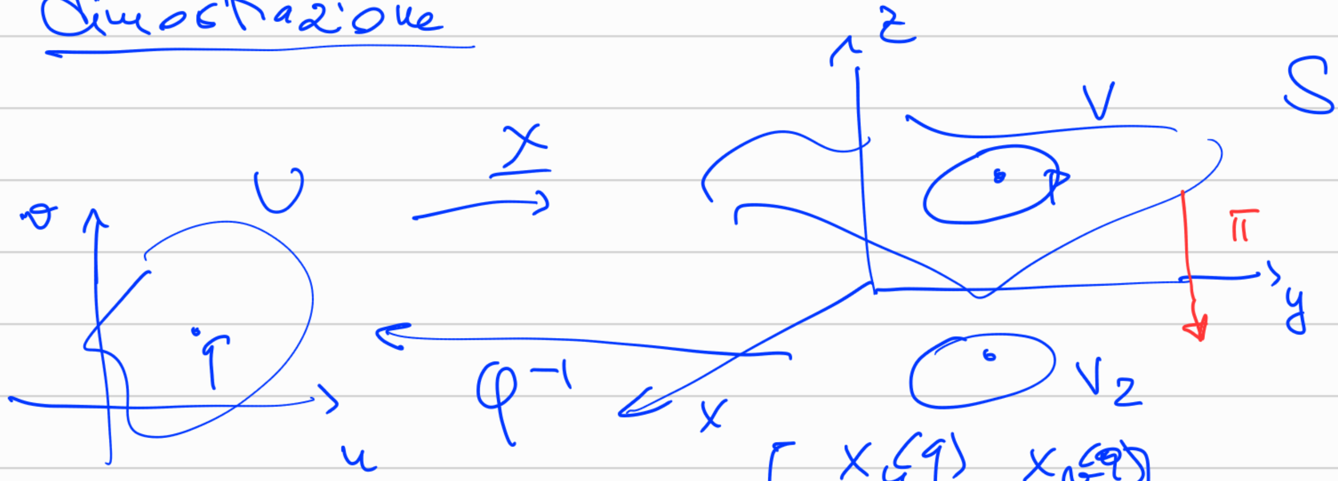
È chiaro che una sup. regolare non è di solito un grafico (esempio: sfera) però è "localmente" un grafico

Prop 3 $\quad S \subseteq \mathbb{R}^3$ sp. regolare (2)

$p \in S$. Allora esiste un intorno $V \subseteq S$ di p tale che $V =$ grafico di una funzione $\mathcal{C}^\infty$ del tipo

$$z = f(x,y) \quad o \quad y = g(x,z) \quad o \quad x = h(y,z)$$

<u>dimostrazione</u>



$\underline{X}$ param reg $\Rightarrow$ rk $\begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = 2$

$\Rightarrow$ c'è un det 2×2 diverso da 0

supponiamo $\quad x_u y_v - x_v y_u \neq 0$

poniamo $\quad \varphi : \pi \circ \underline{X} : U \longrightarrow V_2$

$$\det(d\varphi)_q = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}(q) \neq 0$$

$\Rightarrow \varphi$ è invertibile in un intorno di $\varphi(q)$

basta porre $\quad f(x,y) = z \circ \varphi^{-1} : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

e S è localmente il grafico di $f(x,y)$.

In sostanza: $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

φ invertibile: $\varphi^{-1}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

$\downarrow$ la parametrizzazione

$$z = z(u,v) = z(\underbrace{u(x,y), v(x,y)}_{f(x,y)})$$

e cioè $\boxed{z = f(x,y)}$

■

Attenzione:

$$\varphi = \pi \circ \underline{X} : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

$d\varphi_q$ = differenziale di φ nel punto q

Prop 3 una superficie regolare è localmente un grafico

Prop 1.9 $\quad S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup regolare (4)

$p \in S$. Sia $\underline{x} : U \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$

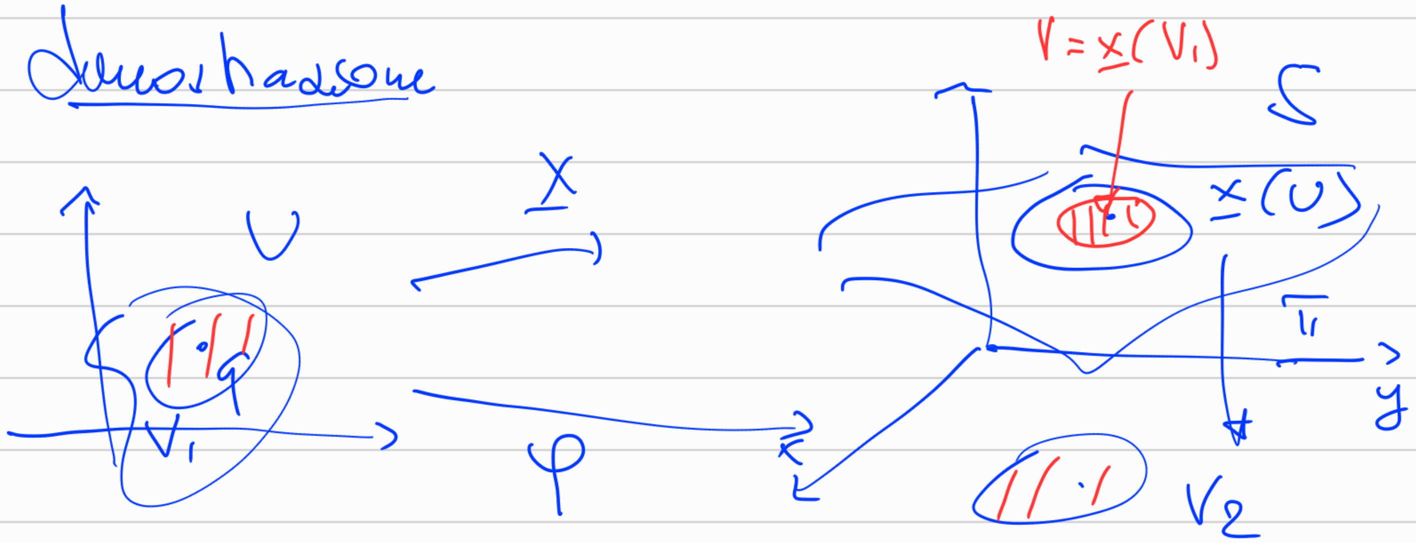
tale che $\underline{x}$ soddisfa (1), (3) della def di param reg.

Supponiamo: $p \in \underline{x}(U)$, $\underline{x}$ iniettiva

Allora: $\underline{x}^{-1}$ continua

U aperto in $\mathbb{R}^2$, $\underline{x}(U) \subseteq S$

Dimostrazione



Che $d\underline{x}_q = 2 \longrightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$

$$\det \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{bmatrix}$$

Scegliamo allora $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2_{x,y}$

$(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$

Come prima $\varphi = \pi \circ \underline{x}$

Come prima $\mathrm{rk}(d\varphi_q) = 2$

esiste $\varphi^{-1} : V_2 \longrightarrow V_1$

dove V_2 = intorno di $\varphi(q) = \pi(p)$ in $\mathbb{R}^2$

V_1 = intorno di q in $\mathbb{R}^2$

φ^{-1} è differenziabile $\Rightarrow$ continua

cioè: $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ è omeomorfismo

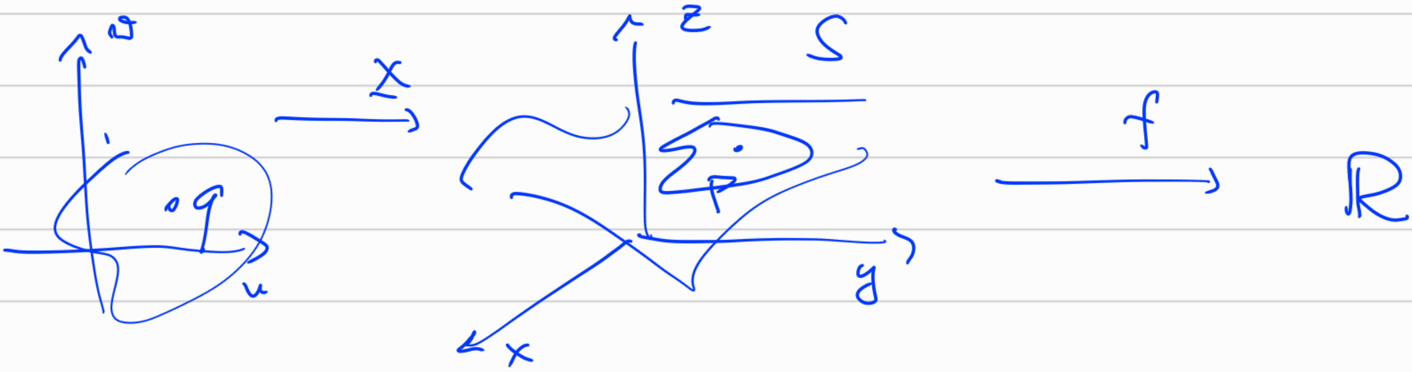
$\underline{x}$ continua, poniamo $V = \underline{x}(V_1)$

$\underline{x}^{-1} : V \longrightarrow V_1$ (dominio V)

$$\underline{x}^{-1} = \varphi^{-1} \circ \pi = \underbrace{(\pi \circ \underline{x})^{-1}}_{\text{continua}} \circ \underbrace{\pi}_{\text{continua}}$$

$\Rightarrow \underline{x}^{-1}$ continua

Studiare le funzioni differenziabili



f differenziabile in p ?

S sup reg $\Rightarrow$ intorno a p c'è una param regolare

possiamo dire: $\boxed{f \text{ differenziabile in } p \text{ se } f\circ \underline{X} \text{ differenziabile in } q}$

<u>Oss</u>: $f\circ \underline{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ so cosa vuol dire differenziabile

<u>Attenzione</u>: potrebbe capitare:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\underline{X}_1"] & S \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ U_2 \arrow[ur, "\underline{X}_2"'] & & \end{tikzcd}$$

$p \in \underline{X}_1(U_1) \cap \underline{X}_2(U_2)$

$f \circ \underline{x}_1$ differenziabile, $f \circ \underline{x}_2$ non diff. (7)

In effetti, questo non capita.

<u>Definizione</u> sia S sup. regolare, $p \in S$

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

f si dice <u>differenziabile in p</u> se <u>esiste</u>

una param. reg. $\underline{x} : U \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$

tale che
- $\underline{x}(q) = p$
- $f \circ \underline{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in q

Proposizione (2.2 - cambiamento di coordinate)

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ sp. regolare, $p \in S$. Siano

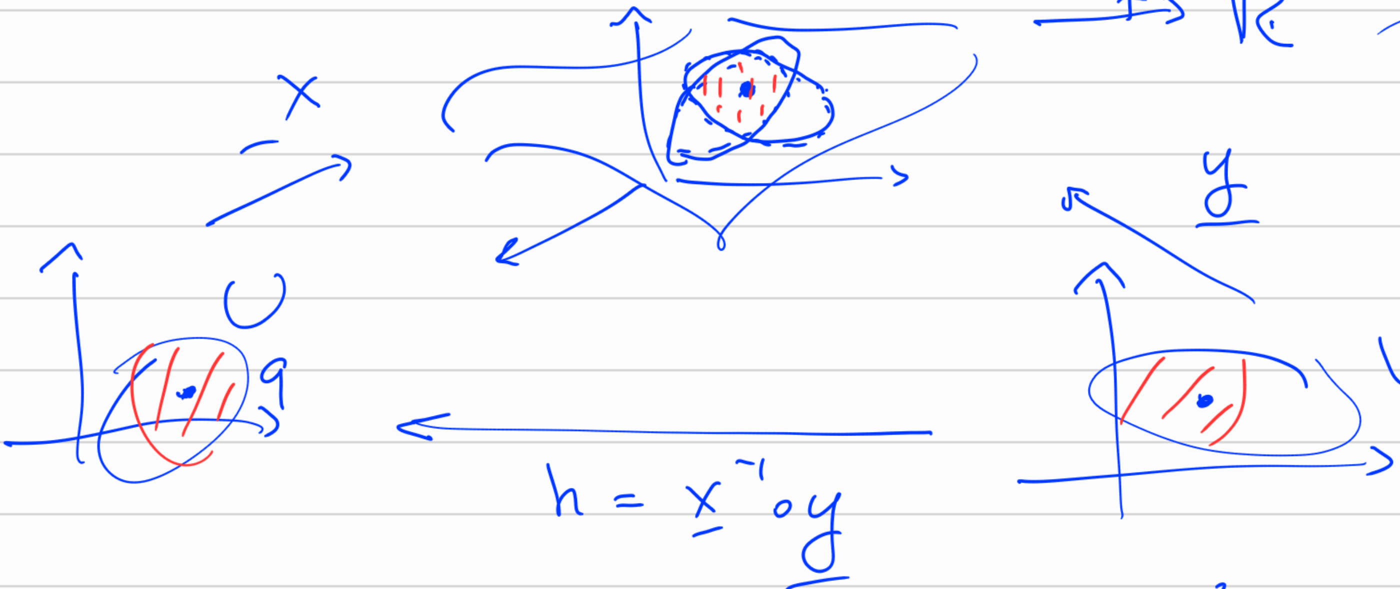
$$\underline{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \underline{y} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

due param locali tali che $p \in \underbrace{\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)}_{= W}$

<u>Allora</u>:

$$h = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : \underline{y}^{-1}(W) \longrightarrow \underline{x}^{-1}(W)$$

è un <u>diffeomorfismo</u>.



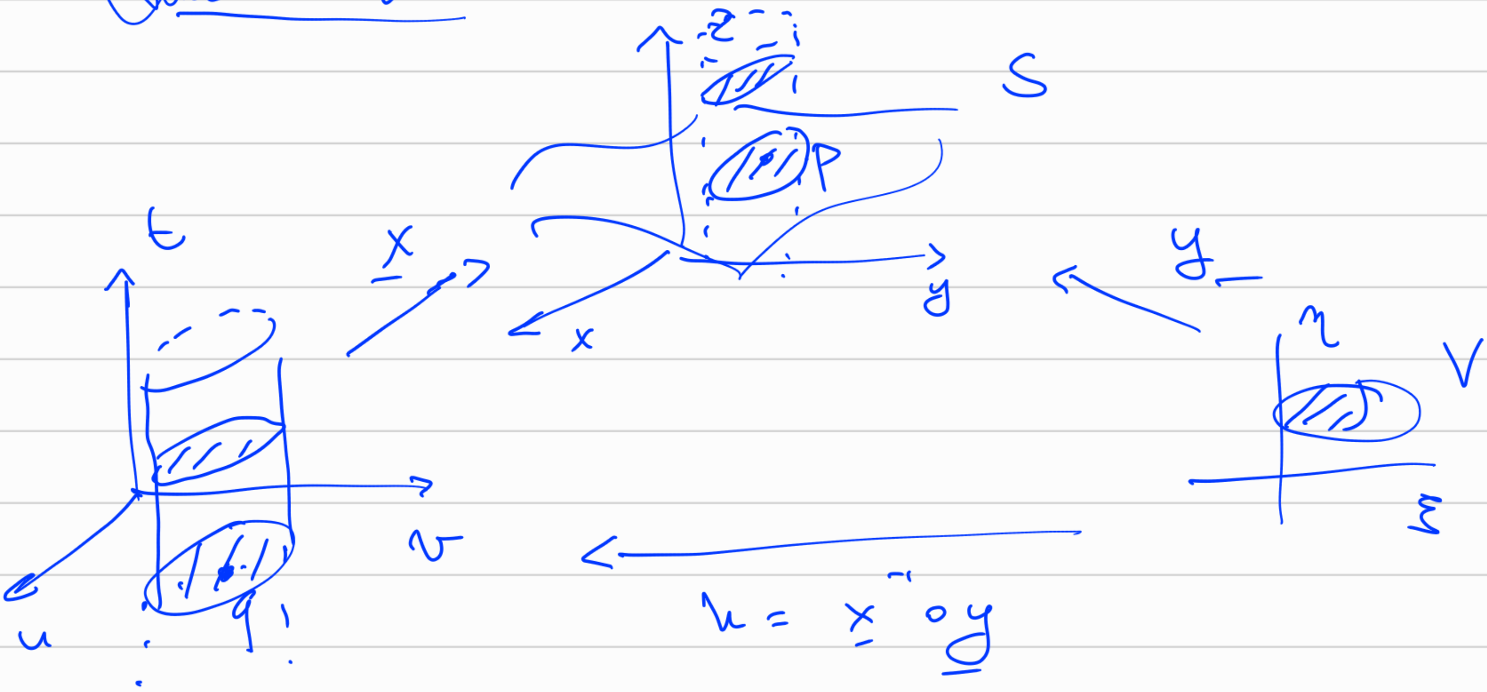
h è una funzione tra aperti di $\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ so cosa vuol dire diffeomorfismo

$$f \circ y = f \circ (x \circ h) = (f \circ x) \circ h$$

h diff $\Longrightarrow$ $f \circ y$ differenziabile se $f \circ x$ lo è

Dimostrazione



- h omeomorfismo $\longrightarrow$ chiaro perché x, y param $\Longrightarrow$ $x^{-1}, y^{-1}, \dots$ continue

- h <u>differenziabile</u> (h^{-1} stessa dim. scambiando $\underline{x}$, $\underline{y}$)

$\underline{X}^{-1}$ non è definita su un aperto di $\mathbb{R}^3$

$\longrightarrow$ voglio estenderla ad una funz. diff.

S sup. regolare in P, $\underline{X}$ param locale

$\longrightarrow$ rk $dX_q = 2 \longrightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$

$$F(u,v,t) = \big(x(u,v),\; y(u,v),\; z(u,v) + t \big)$$

<u>oss.</u> • $F(u,v,0) = \underline{X}(u,v)$

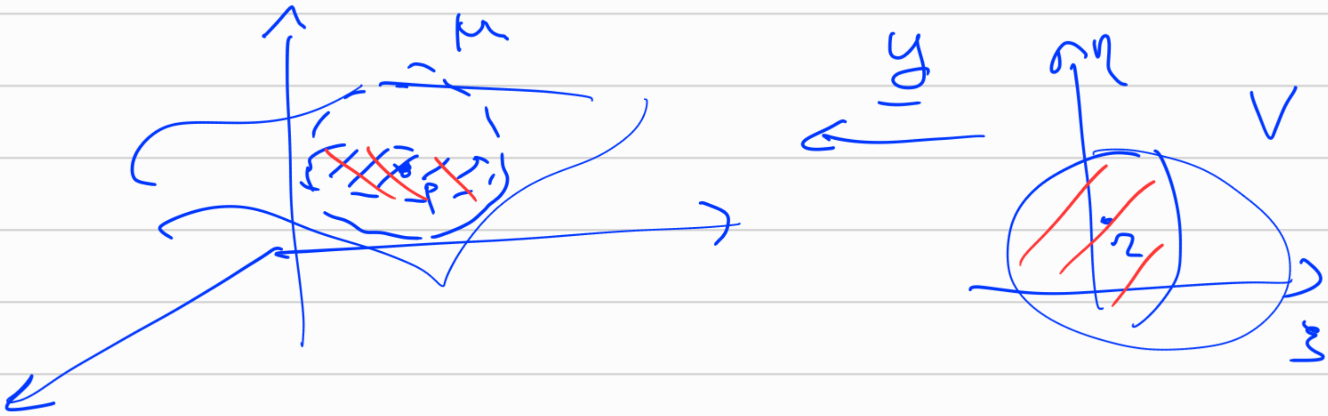
- F differenziabile

$$dF_{(q,0)} = \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) & 0 \\ y_u(q) & y_v(q) & 0 \\ z_u(q) & z_v(q) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(dF_{(q,0)}\right) \neq 0$$

F è loc. invertibile in un intorno M (10)

al punto $P = F(q,0) = \underline{x}(q)$



$F^{-1} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è differenziabile

$\underline{y}$ continua $\Rightarrow \exists$ intorno N di q

$: \underline{y}(N) \subseteq M$

Quindi: $h|_N = (\underline{x}^{-1} \circ \underline{y})|_N = (F^{-1} \circ \underline{y})|_N$

è differenziabile ∎