AUTOVALORI DI OPERATORI ELLITTICI

(PA) $\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$ $\qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \ |\Omega| < +\infty$

$a \in L^{N/2}(\Omega) \quad N \geq 3$ (faremo sempre questo caso per semplicità)

$a \in L^s(\Omega) \quad s > 1, \ N = 2$

$a = a^+ - a^-$

$$Q_a(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + a^+ u^2 - a^- u^2$$

Proposizione: $\|a^-\|_{L^{N/2}} < S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int u^{2^*}\right)^{2/2^*}}$

$\Rightarrow Q_a$ definisce una norma equivalente su $H_0^1(\Omega)$

$$Q_a(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \underset{N/2}{a(x)} \underset{2^*/2}{u^2} \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \|a\|_{N/2} \left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{2/2^*} \leq$$

$$\leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \|a\|_{N/2} / S \, \|\nabla u\|_\Omega^2 = \left(1 + \frac{\|a\|_{N/2}}{S}\right) \|\nabla u\|^2$$

$$Q_a(u) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 + a^+ u^2 - a^- u^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 - a^- u^2$$

$$\geq \left(1 - \frac{\|a^-\|_{N/2}}{S}\right) \|\nabla u\|^2$$

OSSERVAZIONE: $-\Delta u + a u = \lambda u \iff -\Delta u + (a+t)u = (\lambda+t)u$

con $t>0$ — Se $a \in L^{N/2} \Rightarrow \exists\, \bar{t}>0 : \forall t > \bar{t}$

$$\|(a+t)^-\|_{L^{N/2}} < S.$$

Possiamo sempre ricondurci al caso $\|a^-\|_{L^{N/2}} < S$.

NUOVA FORMULAZIONE VARIAZIONALE DEGLI AUTOVALORI

(MINIMAX).

Definizione: $$Rey(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + a u^2}{\int_\Omega u^2}$$ (quoziente di Rayleigh)

$a \in L^{N/2}$, $\|a^-\|_{L^{N/2}} < S$.

OSSERVAZIONE: In $H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$, i punti critici di Rey sono le autofunzioni (in senso debole) del problema (PA) e i livelli critici $Rey(u)$ sono gli autovalori corrispondenti.

Dimostrazione per esercizio

TEOREMA: $\exists$ succ. $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \longrightarrow +\infty$ di autovalori corrispondenti ad autofunzioni $(\varphi_1, \varphi_2 \dots)_{n\in\mathbb{N}}$ che

una base Hilbertiana di L^2. Ogni autospazio corrispondente ad un autovalore ha dimensione finita.

Dimostrazione alternativa:

1° passo

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} R(u) = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + a u^2}{\int_\Omega u^2}$$

Perché il minimo è raggiunto? Teorema di Rellich-Kondrachov.

Sia successione minimizzante $(u_n)_n$ $R(u_n) \to \inf \geq 0$

possiamo normalizzarle in L^2

$$\|u_n\|_{L^2} = 1 \quad \forall n$$

$$Q_a(u_n) \to \lambda_1 = \inf < +\infty$$

Successione limitata: estraggo una sottosuccessione $(u_n)_n$ t.c.

- $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ (perché $H_0^1(\Omega)$ è riflessivo)
- $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ (grazie all'immersione compatta in $L^2 \leftarrow$ R-K)

$u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ $\forall \; 1 < p < \begin{cases} +\infty & N = 2 \\ \frac{2N}{N-2} & N \geq 3 \end{cases}$

$$Q_a(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} Q_a(u_n) = \lambda_1 \Big\} \to R_a(u) \leq \lambda_1 = \inf$$

$\forall n$

$$\int_\Omega u_n^2 = 1 \implies \int_\Omega u^2 = 1 \quad - \Big\}$$

Inf é raggiunto, O.K. $\exists\, \varphi_1 : \mathrm{Rey}(\varphi_1) = \lambda_1 = \inf$

$\Rightarrow$ condizioni di estremalità ... (φ_1, λ_1) risolve (PA).

- $\lambda_2 = \min \left\{ \mathrm{Rey}(u) : u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\},\ \int_\Omega u \varphi_1 = 0 \right\}$
  - il minimo é raggiunto e (φ_2, λ_2)

$\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\int \varphi_2 \varphi_1$.

La presenza di un vincolo $\Longrightarrow$ possibile presenza di un moltiplicatore di Lagrange

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_2 + a(x)\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2 + \mu_1 \varphi_1 \\ \varphi_2 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Ma si dimostra che $\mu_1 = 0$ – Basta moltiplicare l'eq. per φ_1

$$\int \underbrace{\nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_1 + a(x)\varphi_2 \cdot \varphi_1}_{\varphi_1 \text{ é autofunzione}} = \lambda_2 \overbrace{\int_\Omega \varphi_2 \cdot \varphi_1}^{=0} + \mu_1 \overbrace{\int_\Omega \varphi_1^2}^{=1}$$

$$\lambda_1 \int \varphi_1 \varphi_2 = 0$$

Morale: $\mu_1 = 0$. Iteriamo il procedimento e, dati

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ definisco

$$\lambda_{n+1} = \min \left\{ \mathrm{Rey}(u) : u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}, \int_\Omega u \varphi_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: In questo modo trovo tutti gli autovalori e tutte le autofunzioni. La base $(\varphi_n)_n$ è completa in L^2. Si vede subito che

* $(\varphi_n)_n$ sono ortogonali in $H^1_0(\Omega)$ munito del prodotto scalare associato a Q_2.

* Il sistema $(\varphi_n)_n$ è completo anche in $H^1_0(\Omega)$.

$$\overline{\mathrm{span}\{\varphi_1 \dots, \varphi_n, \dots\}} \neq H^1_0(\Omega) \Rightarrow \exists\, w \in H^1_0(\Omega)$$

ortogonale a tutte le $(\varphi_n)_n$ .... (w è ortogonale in L^2 a tutte le φ_n).

FORMULAZIONE COME MINMAX

PROPOSIZIONE: $\forall n$

$$\lambda_n = \min_{\substack{\dim(F) = n \\ F \subseteq H^1_0(\Omega) \\ F \text{ sottosp. vettoriale}}} \ \max_{F \setminus \{0\}} \mathrm{Rey}(u) \ (=: \mu_n)$$

Dimostrazione: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$

Sia $E_n = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. $u \in E_n$ $u = \sum_i u^i \varphi_i$

$$\text{Rey}(u) = \frac{\sum_i \lambda_i u_i^2}{\sum_i u_i^2} \leq \lambda_n$$

Questo dimostra che $\mu_n \leq \lambda_n \quad \forall n = 1, \dots$

Vogliamo dimostrare la disuguaglianza opposta. Prendiamo un qualunque sottospazio $F_n \subseteq H_0^1(\Omega)$ di dim n.

$\Phi : F_n \to \mathbb{R}^{n-1} : u \mapsto \left(\int_\Omega u\varphi_1, \dots, \int_\Omega u\varphi_{n-1} \right)$, Φ è lineare $\Rightarrow$ $\ker \Phi \neq \{0\}$ $\exists\, \bar{u} \in F_n$, $\bar{u} \neq 0$ t.c.

$$\int_\Omega \bar{u}\varphi_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \text{Rey}(\bar{u}) \geq \min\left\{R(u) : u \neq 0, \int_\Omega u\varphi_i = 0, i = 1, \dots, n-1\right\} = \lambda_n$$

$\forall F_n$, $\max_{F_n \setminus \{0\}} \text{Rey}(\bar{u}) \geq \lambda_n \Rightarrow \mu_n \geq \lambda_n$.

TEOREMA DEL PASSO MONTANO

Definizione: Sia $E \in C^1(X; \mathbb{R})$, con X spazio di Banach. Diciamo che

* c è **livello critico** di E se $\exists\, u \in X$ t.c.

$E(u) = c$ e $d_u E = 0$

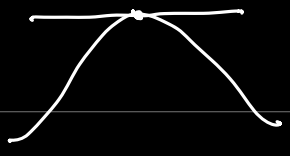
* c é un livello critico asintotico se $\exists$ una successione

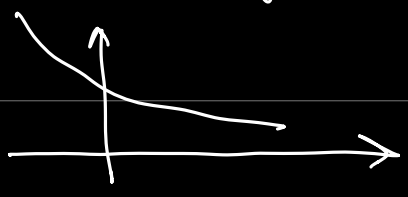
$(u_n)_n \subseteq X$ t.c. $E(u_n) \to c \in \mathbb{R}$, $\|d_{u_n} E\|_{E'} \to 0$

Una tale successione viene detta successione di Palais-Smale

Definizione: Diciamo che E soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c se ogni successione di Palais-Smale ammette una sottosuccessione convergente.

OSSERVAZIONI:

(a)  i minimi (locali) sono punti critici corrispondenti al livello critico $c = \min$.

(b) 

0 é livello critico asintotico ma non é livello critico

(c) Se vale la condizione di Palais-Smale al livello $c \in \mathbb{R}$ ($(PS)_c$) allora
- → o non ci sono successioni di $(PS)_c$
- → oppure l'insieme dei pti critici al livello c é compatto non vuoto.

OSSERVAZIONE

Non solo, ma nel primo caso $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ t.c.

$$\inf\{\| d_u E \| : c - \bar{\varepsilon} \le E(u) \le c + \bar{\varepsilon}\} := \gamma > 0$$

Infatti, se no, $\exists\ \varepsilon_n \to 0$, $\exists\ u_n : c - \varepsilon_n \le E(u_n) \le c + \varepsilon_n$ t.c.

$\| d_{u_n} E \|_{X'} \to 0$. Questa è una successione di $(PS)_c$

assurdo.

Notazione: $K_c = \{ u \in X : E(u) = c,\ d_u E = 0 \}$

TEOREMA

Sia $E \in C^1(X; \mathbb{R})$, X sp. di Banach. Supponiamo che

(i) $\exists\ \alpha > 0$ t.c. $E(u) \ge \alpha > E(0)$ $\forall u \in X$, $\|u\|_X = \alpha$

(ii) $\exists\ u_1 \in X$, $\|u_1\| > \alpha$ t.c. $E(u_1) \le E(0)$

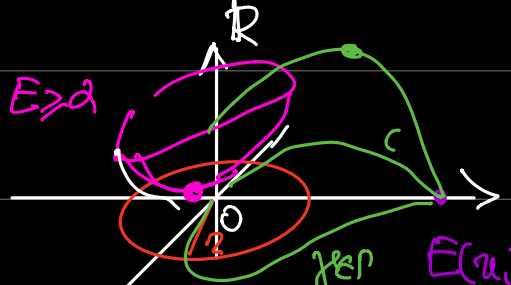
Consideriamo

$$\Gamma : \{ \gamma \in C([0,1]; X);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_1 \}$$

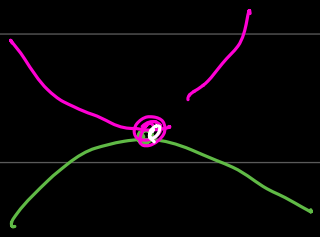
$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t)).$$

Allora c è un livello critico associato per E.

Se vale $(PS)_c$ allora è anche un livello critico per E.



$$E(0) < \alpha \leq \inf_{\|u\|=2} E(u)$$



Siamo alla ricerca del colle che mi fa passare dal villaggio (0) a quello e_1 dall'altra parte della catena di montagne.

OSSERVAZIONE: Si tratta di un teorema di due punti critici uno è un minimo (dentro la conca) e l'altro è un punto di colle. (con le frecce)

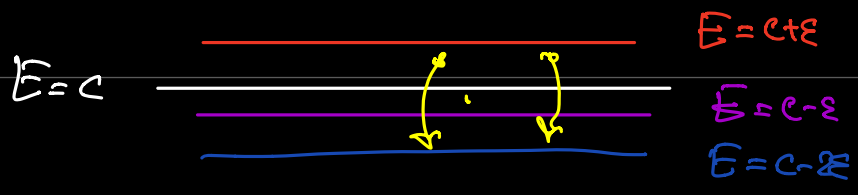
Per dimostrare il teorema utilizziamo il

LEMMA DI DEFORMAZIONE

Sia X uno spazio di Banach, $E \in C^1(X)$. Supponiamo che $c \in \mathbb{R}$ non sia un livello critico asintotico. Allora $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ $\exists \eta : X \to X$ tale che

- $E(\eta(u)) < c - \varepsilon$ se $E(u) < c + \varepsilon$
- $\eta(u) = u$ se $E(u) < c - 2\varepsilon$

OSSERVAZIONE



$\eta(x) := x$

Come vedremo c'è dietro una omotopia

$$\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X \quad \text{t.c.}$$

$$\eta(0,\cdot) = id$$

$$\eta(1,\cdot) = :\eta(x)$$