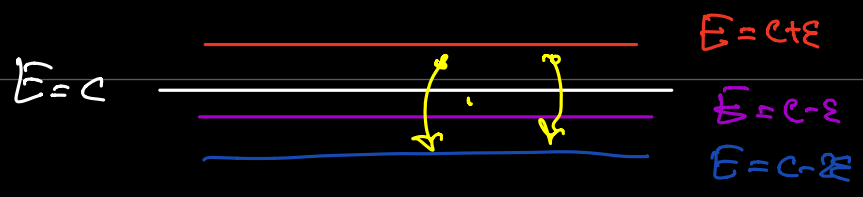
OSSERVAZIONE



$\eta(u) = u$

Come vedremo c'è dietro una omotopia

$$\eta : [0,T] \times X \longrightarrow X \quad \text{t.c.}$$

$$\eta(0,\cdot) = id$$

$$\eta(1,\cdot) = : \eta(x)$$

Dimostrazione del lemma di deformazione:

Se non è un livello critico asintotico $\iff$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in \{ c-\varepsilon_0 < E < c+\varepsilon_0 \}$$

$$\| d_u E \|_{X'} \geq \delta$$

Caso particolare: X è uno spazio di Hilbert e $E \in C^2(X)$. Allora X e X' sono isomorfi:

$\nabla E(u) \in X$ il gradiente di E è

$$\nabla E(u) = R^{-1}(d_u E)$$

definisce un'applicazione di classe C^1 su E.

$$(\nabla E(u), v)_X = d_u E[v] \qquad \forall v \in X.$$

Prendo una funzione $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 che vale

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & c-\varepsilon_0 < s < c+\varepsilon_0 \\ \in [0,1] & \\ 0 & s \le c - 2\varepsilon_0 \end{cases}$$

Definiamo

$$F(u) = \begin{cases} \psi(E(u)) \dfrac{\nabla E(u)}{\|\nabla E(u)\|^2} & \text{se} \quad c-2\varepsilon_0 < E(u) < c+\varepsilon_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e consideriamo i problemi di Cauchy per l'equazione ordinaria

$$(PC) \quad \begin{cases} \Phi' = -F(\Phi) \\ \Phi(0) = u \end{cases}$$

$\|F\| \le \frac{1}{\delta}$ in $E(u) < c+\varepsilon_0$

$E(u) < c+\varepsilon_0$

$F \in C^1 \Rightarrow F$ localmente Lipschitziano.

Le soluzioni esistono, uniche globalmente nel tempo e dipendono con continuità dal dato iniziale

x . Chiamiamo $\Phi^t(x)$ la soluzione di PC1 al tempo t (flusso associato al campo F)

$$\frac{d}{dt} E(\Phi^t(x)) = \nabla E(\Phi^t(x)) \cdot \frac{d}{dt}\Phi^t(x) =$$

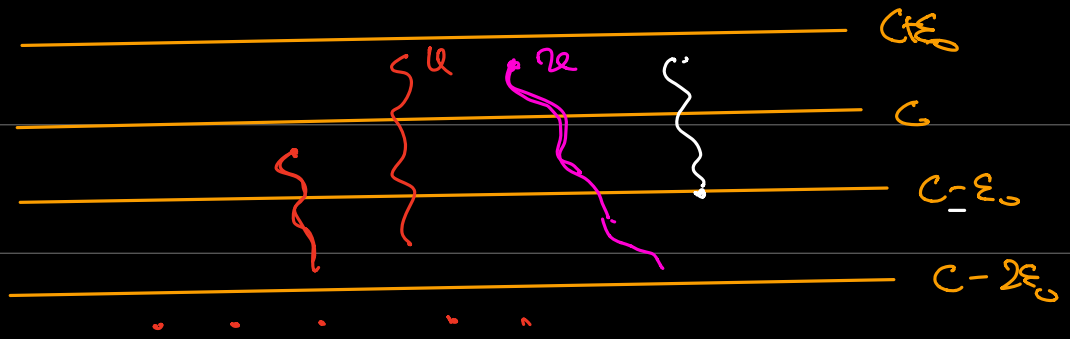
$$= - \nabla E(\Phi^t(x)) \cdot F(\Phi^t(x)) =$$

$$= - \nabla E(\Phi^t(x)) \cdot \psi(E(\Phi^t(x)) \frac{\nabla E(\Phi^t(x))}{\|\nabla E(\Phi^t(x))\|^2}$$

$$= - \psi(E(\Phi^t(x))$$

Quindi $\boxed{E \text{ decresce lungo } \Phi^t}$. In particolare, finchè $E(\Phi^t(x)) > c - \varepsilon_0$

$$\boxed{\frac{d}{dt} E(\Phi^t(x)) = -1}$$



Se $E(x) < c + \varepsilon_0 \Rightarrow E\left(\Phi^{2\varepsilon_0}(x)\right) < c - \varepsilon_0$

$\eta(u) = \Phi^{2\varepsilon_0}(u)$ ha le proprietà che ci interessano

OSSERVAZIONE: Se X non è di Hilbert e/o $E \in C^1$ (ma non C^2) - Vogliamo costruire un campo $W: X \to X$ con queste proprietà

$$0 < \delta_1 < d_u E[W(u)] < \delta_2$$

con $\delta_2 > \delta_1 > 0$ $\forall u: \ c - 2\varepsilon_0 < E(u) < c + \varepsilon_0$.

e $\|W(u)\| \leq C$

e poi definiamo $F(u) = \psi(E(u))\, W(u)$

e risolviamo

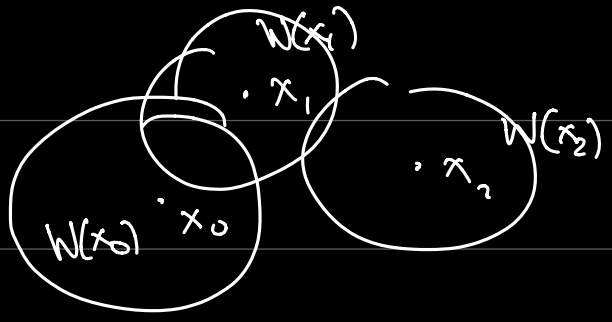
$$\begin{cases} \Phi' = -F(\Phi) \\ \Phi(0) = u \end{cases}$$

e voglio $W \in C^1$ - Fissato $u_0: c - 2\varepsilon_0 < E(u_0) < c + 2\varepsilon_0$

se $d_{u_0} E \neq 0 \Rightarrow \exists\, W(x_0) \in X$ con le proprietà di sopra. Per continuità so che

$$0 < \delta_1 < d_u F[W(x_0)] < \delta_2$$ anche in un intorno di x_0

Estraggo un ricoprimento fc. finito e una partizione dell'unità

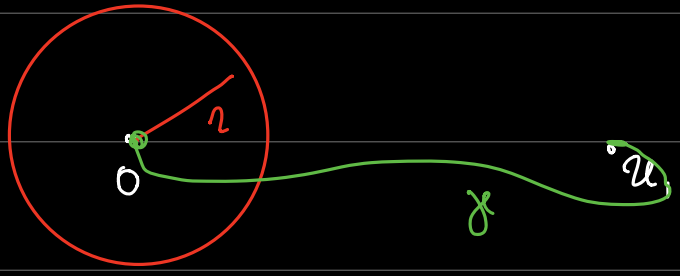


Dimostrazione del teorema del passo montano

Per assurdo supponiamo che c non sia un livello critico asintotico. Allora possiamo applicare il lemma di deformazione con $\varepsilon_0 > 0$.

Abbiamo η che manda $E(u) < c+\varepsilon$ nel sottolivello $c-\varepsilon_0$, lasciando fisso $c-2\varepsilon_0$.

Osservo che ogni cammino $\gamma \in \Gamma$ attraversa la sfera $\|x\| = \rho$

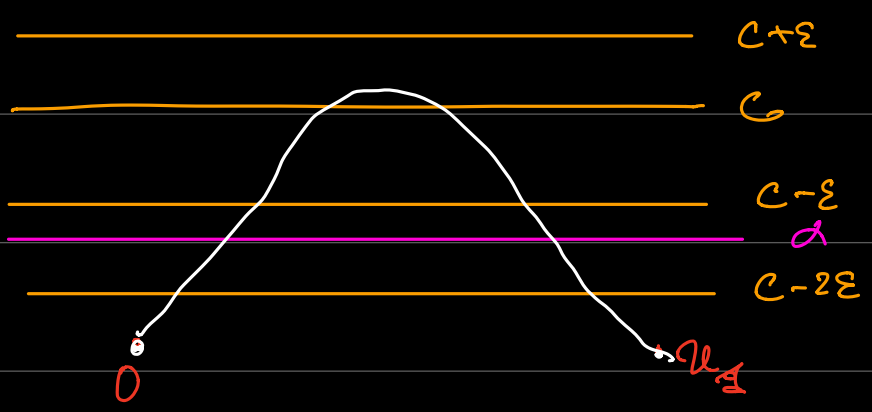


$$\max_{t\in[0,1]} E(\gamma(t)) \geq \inf_{\|u\|=\rho} E(u) \geq a$$

$$\Rightarrow \quad c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t)) \geq \alpha > E(0) \geq E(u_1)$$

Prendo $\alpha \varepsilon < \varepsilon_0$ sufficientemente piccolo perché $E(0) < c - 2\varepsilon$

(è possibile perché $\varepsilon < \frac{\alpha - E(0)}{2}$)



$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t)) \qquad \exists\, \gamma_\varepsilon : \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t)) < c + \varepsilon$$

Consideriamo $\eta \circ \gamma_\varepsilon$, η dato dal lemma di deformazione

$$\eta \circ \gamma_\varepsilon \in C([0,1])$$

① $\eta(0) = 0 \Rightarrow \eta(\gamma_\varepsilon(0)) = 0$

$\eta(u_1) = u_1 \Rightarrow \eta(\gamma_\varepsilon(1)) = u_1$

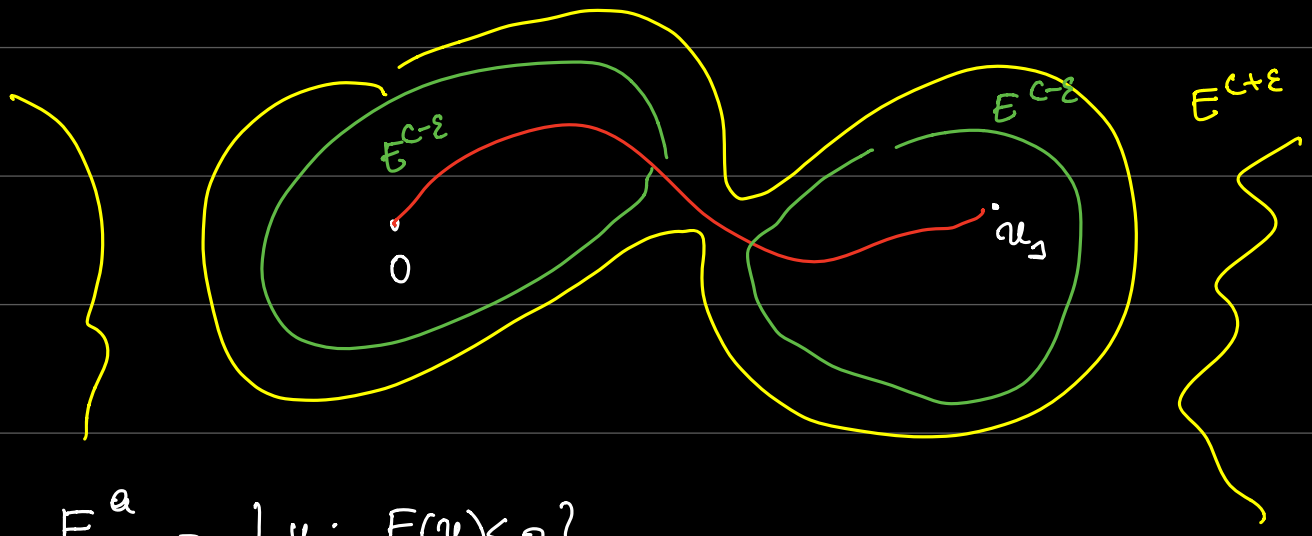
② $$\max_{t \in [0,1]} E(\eta \circ \gamma_\varepsilon(t)) < c - \varepsilon$$

assurdo.

Quindi c è un livello critico asintotico e, se vale $(PS)_c$ è un livello critico -

∎

Pb: posso dire che $\exists\, y \in \Gamma$: $c = \max_{t\in[0,1]} E(y(t)) = E(y(t_{max}))$ con $y(t_{max})$ p.to critico per E?



$E^a = \{u : E(u) < a\}$

Riconosciamo la presenza di un p.to critico da un cambiamento nella topologia dei sottolivelli.

TEOREMA DEL LINKING (Variante multidimensionale del passo montano).

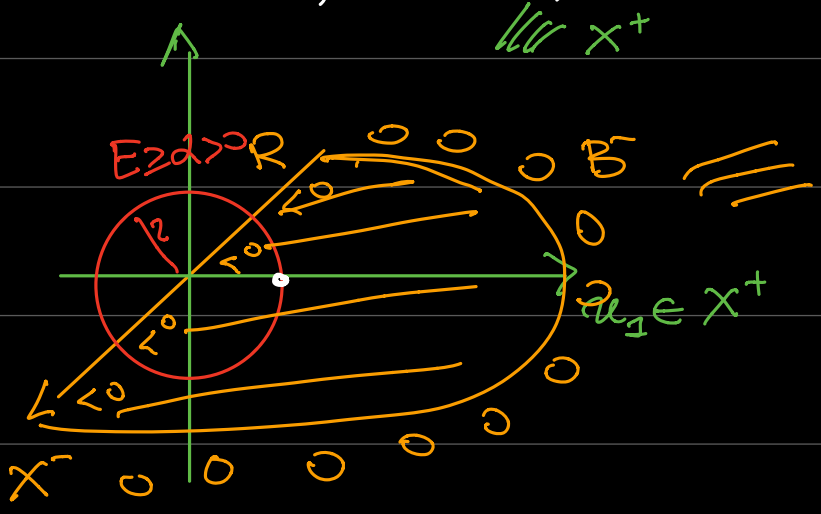
$E \in C^1(X;\mathbb{R})$, X spazio di Banach. $X = X^- \oplus X^+$ con le proprietà seguenti, $\dim(X^-) < +\infty$

i) $E(u) \le 0 \quad \forall u \in X^-$

ii) $\exists \eta > 0 \quad \exists \alpha > 0$: $E(u) \ge \alpha \quad \forall u \in X^+, \|u\| = \eta$

iii) $\exists u_1 \in X^+$ t.c. $E(u) \le 0 \quad \forall u \in X^- \oplus \mathbb{R}u_1$

$u = u^- + t u_1$, $t \geq 0$, e $\|u\| = R$, $R > \rho$



Consideriamo $B^- = \{ u \in X^- \oplus \mathbb{R} u_1 : u = u^- + t u_1$, $t \geq 0$, $\|u\| \leq R \}$

e consideriamo

$$\Gamma = \{ \gamma : B^- \to X \text{ continua} : \gamma|_{\partial B^-} = id \}.$$

Allora, detto

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in B^-} E(\gamma(t)),$$

c è un livello asintoticamente critico. Se vale la condizione di $(PS)_c$ allora è un livello critico.

Dimostrazione: Di nuovo, cerchiamo di usare il lemma di deformazione, più una proprietà topologica.

LEMMA

Dico che $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma(B^-) \cap \{u \in X^+ : \|u\| = r\} \neq \emptyset$.

Dimostrazione di questo fatto. Su X consideriamo la norma equivalente $\sqrt{\|\pi_-(u)\|^2 + \|\pi_+(u)\|^2}$, dove π_- e π_+ sono le proiezioni su X^- e X^+ rispettivamente. Definiamo la funzione

$$g : X \to X^- \oplus \mathbb{R} e_1 : u \mapsto \pi_1(u) + \sqrt{\|u\|^2 - \|\pi_1(u)\|^2}\, e_1$$

Osserviamo che $g|_{B^+}$ è l'identità su B^-.

Per $\gamma \in \Gamma$ $\quad g \circ \gamma : B^- \to B^-$ è continua ed è l'identità su ∂B^-. Per un corollario del teorema di Brouwer, $g \circ \gamma(B^-) \supseteq B^-$. Quindi esiste un $t \in B^-$: $g \circ \gamma(t) = r e_1 \in B^-$. Questo vuol dire che $\pi_-(\gamma(t)) = 0$ e $\|\gamma(t)\| = r$.

Concludiamo la dimostrazione del teo. del linking. Sappiamo che $c \geq \alpha > 0 \geq \inf_{\partial B^-} E$. Applichiamo il lemma di deformazione con $\varepsilon_0 < \frac{\alpha}{2}$. In questo modo

sono sicuro che $c - 2\varepsilon_0 > 0$ - Dato $\varepsilon < \varepsilon_0$

$\exists\, \gamma_\varepsilon \in \Gamma$ t.c. $\max_{t \in B^-} E(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon$

prendo $\eta \circ \gamma_\varepsilon$ e osservo che

- è continua e vale $= id$ su $\partial B^- \subseteq E^{c-2\varepsilon}$

  su cui $\eta = \mathbb{1}$.

$\Longrightarrow$ $\eta \circ \gamma_\varepsilon \in \Gamma$ - D'altra parte,

$\max_{t \in B^-} E(\eta \circ \gamma_\varepsilon(t)) < c - \varepsilon$ - In contraddizione con l'estremalità di c $(= \inf \max)$.

Assurdo. c è un livello asintoticamente critico e, se vale $(PS)_c$, è anche critico. ∎

TEOREMA DI BROUWER

1) $B_R \subseteq \mathbb{R}^n$ palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^n$.

Sia $g : B_R \to \mathbb{R}^n$ continua, $g|_{\partial B_R} = id$ - Allora $0 \in g(B_R)$ - In realtà $B_R \subseteq g(B_R)$.

COROLLARIO: Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un chiuso omeomorfo a B_R, con $H : C \to B_R$, con $H(\partial C) = \partial B_R$ - Allora C ha

le stesse proprietà : $\forall\ g: C \to \mathbb{R}^n$ continua, con

$g|_{\partial C} = id \Rightarrow \quad C \subseteq g(C)$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & C \\ {\scriptstyle H^{-1}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ B_R & \longrightarrow & B_R \end{array}$$

$$(H \circ g \circ H^{-1})(B_R) \supset B_R$$