TEOREMA DEL MINMAX : $E \in C^1(X;\mathbb{R})$. Supponiamo che sia data una classe di sottoinsiemi

$$\Gamma = \{ A \subseteq X, \text{ compatti}, A \supseteq A_0 \}$$

$A_0 \subseteq X$ è un compatto $\subseteq X$ ("bordo").

Supponiamo inoltre che

- $\max_{A_0} E \leq \alpha$
- $c = \inf_{A \in \Gamma} \max_{u \in A} E(u) > \alpha$
- Invarianza: se $A \in \Gamma$ e η è un'omotopia che lascia fisso il bordo A_0, allora $\eta(A,1) \in \Gamma$.

Allora c è un livello asintoticamente critico per E.

Dim: Seguire le traccie della dimostrazione del teorema del linking.

OSSERVAZIONE: (1) Abbiamo $c = \inf \max > \sup_{A_0} E$ $\left(= -\infty \text{ se } A_0 = \emptyset \right)$

(2) Non è necessario che $A \in \Gamma$ siano compatti. In principio basta che siano chiusi, $\overline{\eta(A,1)} \in \Gamma$.

E la proprietà di invarianza omotopica può essere

ristretta a cui un sottoinsieme delle possibili omotopie a cui appartenga il flusso Φ^t associato all'equazione differenziale ostacolo

$$\underline{\dot{\Phi}} = -F(\underline{\Phi}).$$

Definizione: η è un'omotopia (dell'identità) in X se

$\eta : X \times [0,1] \to X$ continua e t.c. $\eta(\cdot, 0) = \mathbb{1}_X$.

$\mathcal{H}(X) =:$ omotopie in X

$$\mathcal{H}(X; A_0) = \{ \eta \in \mathcal{H} : \eta(t,\cdot)|_{A_0} = \mathbb{1}_{A_0} \}$$

A noi interessano in particolare le omotopie lungo le quali E sia monotono (non crescente), cioè

$$0 \le t_1 \le t_2 \le 1 \implies E(\eta(u, t_1)) \ge E(\eta(u, t_2)).$$

NOTAZIONI:

$K_c = \{ u \in X : E(u) = c, d_u E = 0 \}$; $N_\varepsilon(K_c) = \{ u \in X : \text{dist}(u, K_c) < \varepsilon \}$

$E^b = \{ u : E(u) < b \}$, $E_a = \{ u : E(u) > a \}$, $E_a^b = \{ u : a < E(u) < b \}$

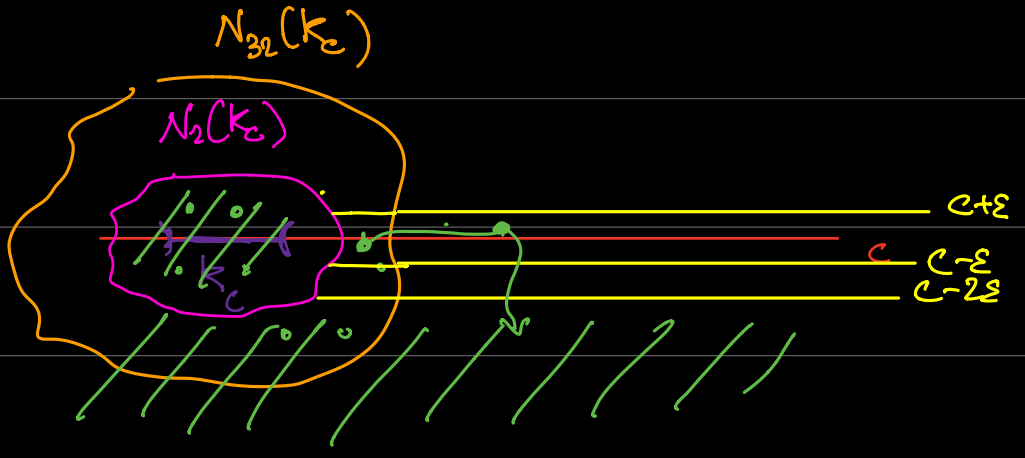
LEMMA DI DEFORMAZIONE 2.

Supponiamo che $E \in C^1(X; \mathbb{R})$, e valga la condizione di (P-S)$_c$. Dato $\varepsilon > 0$, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$: $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, esiste

$\eta \in \mathcal{H}\left(E^{c+\varepsilon}; E^{c-2\varepsilon} \cup N_2(K_c)\right)$ tale che

$$\eta\left(E^{c+\varepsilon}, 1\right) \subseteq E^{c-\varepsilon} \cup N_{32}(K_c).$$

OSSERVAZIONE



Dimostrazione:

1°) Usiamo la condizione di Palais-Smale per dimostrare.

Dato $\tau > 0$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$\|d_u E\| \geq \delta \qquad \forall\, u \in E^{c+\varepsilon_0}_{c-2\varepsilon_0} \setminus N_2(K_c)$$

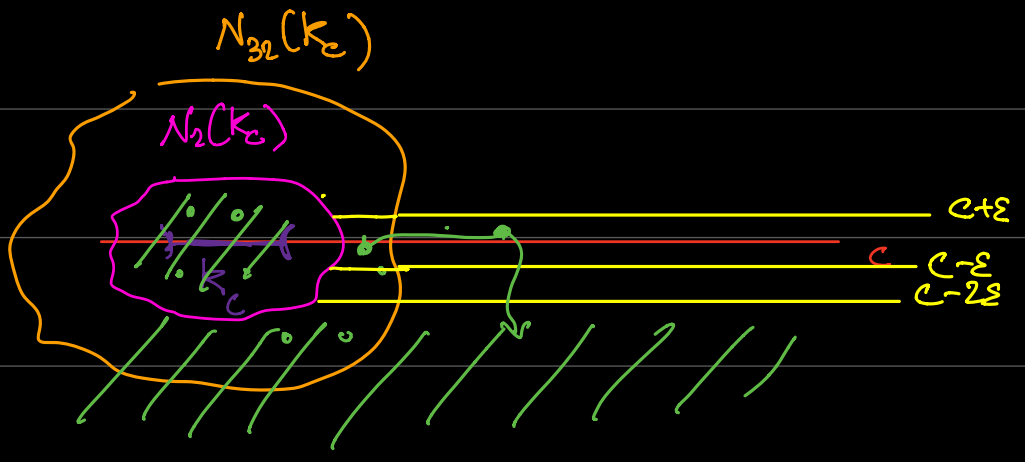
Per assurdo, $\exists \bar{\tau} > 0$ t.c. $\forall \varepsilon_n \to 0$ $\exists \delta_n \to 0$

$$\exists\, u_n \in E^{c+\varepsilon_n}_{c-\varepsilon_n} \setminus N_{\bar{\tau}}(K_c) \text{ con } \|d_{u_n} E\| < \delta_n$$

$(u_n)_n$ è allora una successione di $(PS)_c$, ammette un pto limite $\bar{u}$: $E(\bar{u}) = c$ e $d_{\bar{u}} E = 0$

$\Rightarrow$ $\bar{u} \in K_c$ mentre $\operatorname{dist}(\bar{u}, K_c) = \lim_n d(u_n, K_c) \geq \bar{\tau} > 0$.

assumo



Riprendiamo il filo della dimostrazione del lemma di Deformazione 1. Consideriamo la funzione cut-off.

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & c-\varepsilon < s < c+\varepsilon \\ \in [0,1] & \\ 0 & s < c-2\varepsilon \end{cases}$$

Introduciamo una seconda funzione cut-off ψ_1

$$\psi_1(u) = \begin{cases} 0 & u \in N_\delta(K_c) \\ \in [0,1] & \\ 1 & u \notin N_{2\delta}(K_c) \end{cases}$$

ψ, ψ_1 siano di classe C^1

$$F(u) = \psi(E(u))\,\psi_1(u)\,\frac{DE(u)}{\|DE(u)\|^2}$$

$$\begin{cases} \Phi' = -F(\Phi) \\ \Phi(0) = u \end{cases}$$

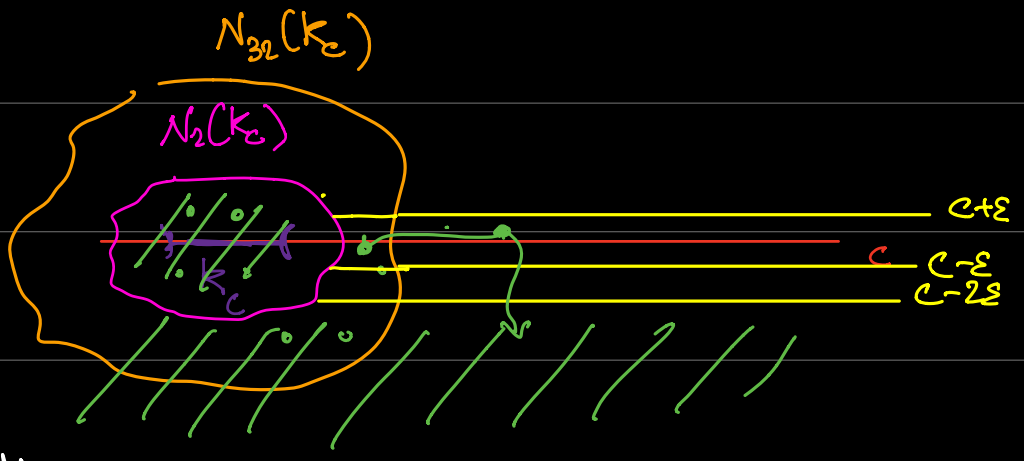
$\Phi(\cdot) = u$

Proprietà salienti:

- $F(u) \cdot \nabla E(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in E^{c+\varepsilon}_{c-\varepsilon} \setminus N_{2r}(K_c) \\ \in [0,1] & \text{altrove} \end{cases}$

- $\|F(u)\| \leq \frac{1}{\delta}$

Il flusso è globalmente definito, e integro per un tempo $T = 2\varepsilon$



Alternativa

- o $u \in E^{c+\varepsilon}$ e $dist(\Phi^t(u), K_c) \geq 2r \quad \forall\, t \in [0, 2\varepsilon]$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E(\Phi^t(u)) = -1 \qquad \forall\, t \in [0, 2\varepsilon]$$

$$\Rightarrow \Phi^{2\varepsilon}(u) < c - 2\varepsilon$$

- oppure $\exists\, \bar{t} \in [0, 2\varepsilon]$ t.c. $dist(\Phi^{\bar{t}}(u), K_c) \leq 2r$

me allora $\|F\| \leq \frac{1}{\delta}$, che implica

$$\text{dist}\left(\Phi^{2\varepsilon}(u), \Phi^{\bar{t}}(u)\right) \leq \frac{(2\varepsilon - \bar{t})}{\delta} < 2$$

se abbiamo scelto $\boxed{\varepsilon < \frac{\delta\eta}{2}}$ [oltre a $\varepsilon < \varepsilon_0$ come all'inizio]

$$\text{dist}\left(\Phi^{2\varepsilon}(u), K_c\right) \leq \text{dist}\left(\Phi^{2\varepsilon}(u), \Phi^{\bar{t}}(u)\right) +$$

$$\text{dist}\left(\Phi^{\bar{t}}(u), K_c\right) \leq \eta + 2\eta = 3\eta. \qquad \blacksquare$$

X = Hilbert, $E \in C^2(X; \mathbb{R})$.

CATEGORIA DI LUSTERNIK-SCHNIRELMAN

Si tratta di un invariante omotopico. Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$.

Diciamo che A è contrattile in X (o nullomotopico) se $\exists\, \eta \in \mathcal{H}(X)$: $\eta(A, 1) = \{x_0\}$.

Attenzione! A può essere contrattile in X_1 e non esserlo in $X_2 \subseteq X_1$ sottospazio topologico. Esempio: la sfera $S_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ è contrattile in $\mathbb{R}^n$, ma non è contrattile in sé.

(categoria di Lusternik-Schnirelman)

Definizione: dico che $\text{cat}_X(A) = k$ (A è chiuso)

se k è il più piccolo numero di aperti A_i contrattili con cui posso ricoprire A. Se A non ammette ricoprimenti finiti di aperti contrattili diremo che la sua categoria è infinita. $\operatorname{cat}_X(\phi) = 0$.

OSSERVAZIONE: Se A è contrattile $\Rightarrow \operatorname{cat}_X(A) = 1$.

Se A non è contrattile $\Rightarrow \operatorname{cat}_X(A) \geq 2$.

PROPRIETÀ delle categorie (da dimostrare per esercizio)

(i) $\operatorname{cat}_X(A) = 0 \iff A = \phi$

(ii) monotonia: $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{cat}_X(A) \leq \operatorname{cat}_X(B)$

(iii) sub-additività $\operatorname{cat}_X(A \cup B) \leq \operatorname{cat}_X(A) + \operatorname{cat}_X(B)$

(iv) supervarianza: A è chiuso, $\eta \in \mathcal{U}(X) \Rightarrow$

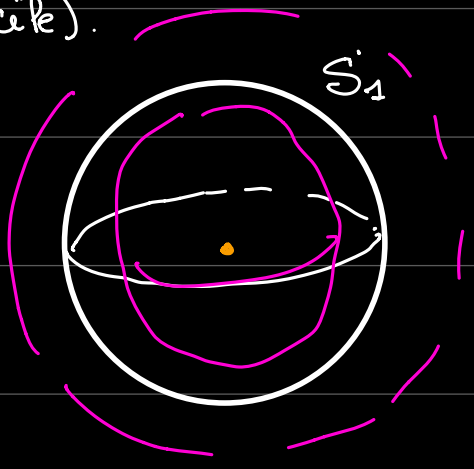
$$\operatorname{cat}_X(A) \leq \operatorname{cat}_X\left(\overline{\eta(A,1)}\right)$$

(v) continuità: se ogni punto di X ammette un intorno contrattile, allora. Se A è compatto in X

$\exists\, N$ intorno di A, $\operatorname{cat}_X(\overline{N}) = \operatorname{cat}_X(A)$.

ESEMPIO: $\operatorname{cat}_{\mathbb{R}^n}(S_1) = 1$ $\operatorname{cat}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}(S_1) = 2$

È una conseguenza del teorema di Brouwer (esercizio relativamente facile).



Per esempio $\{x \in \mathbb{R}^n : 1-\varepsilon < \|x\| < 1+\varepsilon\}$ sono intorni che hanno categoria 2 in $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

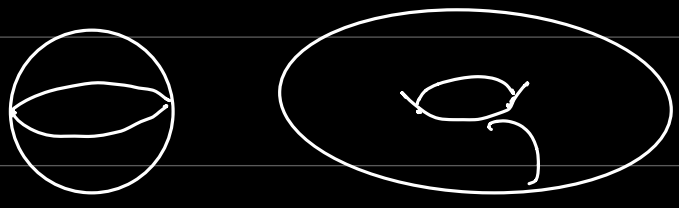
Attenzione a chi è X, per non banalizzare tutto: Per noi, X sarà un sottoinsieme del funzionale E.

TEOREMA: Supponiamo $E \in C^1(X;\mathbb{R})$, e supponiamo che $\exists\, b \in \mathbb{R}$: $\operatorname{cat}_{E^b} E^b \geq k$. Supponiamo che $(PS)_c$ $\forall\, c \leq b$. Allora E ha almeno k punti critici a livelli $\leq b$, se $\inf E > -\infty$.

OSSERVAZIONE: Il teorema si estende facilmente alle varietà, M. Se $\operatorname{cat}_M M \geq k \Rightarrow$ allora ogni funzione

$C^1(M;\mathbb{R})$ ha almeno k pti critici (volendo $(PS)_c$ ad ogni livello). Se M è una varietà compatta $\Rightarrow$ $(PS)_c$ vale ad ogni livello.

COROLLARIO: Se M è una varietà compatta, allora ogni $E \in C^1(M;\mathbb{R})$ ha almeno $\operatorname{cat}_M M$ pti critici.



$\operatorname{cat}_{S^1} S^1 = 2$ $\qquad$ $\operatorname{cat}_{\mathbb{T}^n} \mathbb{T}^n = n+1$

Dimostrazione del teorema (usando un argomento di minmax).

$$\Gamma_i = \{ A \subseteq E^b,\ A \text{ compatto} : \operatorname{cat}_{E^b} A \geq i \}$$

$$\Gamma_1 = \{ A \subseteq E^b \text{ compatto non vuoto} \}$$

$$\Gamma_2 = \{ A \subseteq E^b, \text{ compatti}, \text{ non contraibili in } E^b \ \operatorname{cat}_{E^b}(A) \geq 2 \}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_k = \{ A \subseteq E^b, \text{ compatti}, \ \operatorname{cat}_{E^b}(A) \geq k \}$$

$$\Gamma_k \subseteq \Gamma_{k-1} \subseteq \dots \subseteq \Gamma_1$$

$$c_i = \inf_{A \in \Gamma_i} \max_{u \in A} E(u) > -\infty \quad \left(\text{se } \inf_X E > -\infty\right)$$

$$\Rightarrow c_1 \leq c_2 \leq c_3 \dots \leq c_k < b$$

Passo successivo: dimostriamo che i c_i sono livelli critici per E. Possiamo usare il primo lemma di deformazione: se $K_{c_i} = \phi$ e vale $(PS)_{c_i} \Rightarrow$ non c_i è un livello asintoticamente critico, $\exists$ omotopia

$$\eta : E^b \times [0,1] \to E^b$$

tale che $\eta(E^{c_i+\varepsilon}, 1) \subseteq E^{c_i-\varepsilon}$ per ε sufficientemente piccolo (Lemma di deformazione 1)

Dato questo $\varepsilon > 0$ $\exists$ $A_\varepsilon \in \Gamma_i$ t.c. $\max_{u \in A_\varepsilon} E(u) < c_i + \varepsilon$

(perché $c_i = \inf_{\Gamma_i} \max_A$)

$$\eta(A_\varepsilon, 1) = B_\varepsilon \quad (\text{è compatto a sua volta})$$

Ho che $B_\varepsilon \in \Gamma_i$ (perché $\operatorname{cat}_{E^b}(\eta(A,1)) \geq \operatorname{cat}_{E^b}(A) \geq i$ proprietà di sopravvivenza della categoria).

$B_\varepsilon \subseteq E^{c_i-\varepsilon} \Rightarrow \max_{u \in B_\varepsilon} E(u) \leq c_i - \varepsilon$ in contraddizione con l'estremalità di c_i.

Abbiamo trovato k livelli critici $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k$

Se $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ ho finito. Se no devo esaminare il caso $c_{i-1} < c_i = c_{i+1} = \dots = c_{i+h}$.

2 passo. Supponiamo che $\exists\, h \geq 1$, $\exists\, i \in \{1, \dots, k\}$ t.c.

$$c_{i-1} < c_i = c_{i+1} = \dots = c_{i+h}.$$

Allora dimostro che $\operatorname{cat}_{E^b}(K_{c_i}) \geq h+1$

(In particolare questo implica che K_{c_i} è un insieme infinito, se ogni punto ammette un intorno contraibile)

Usiamo il lemma di deformazione 2, supponendo per assurdo $\operatorname{cat}_{E^b}(K_{c_i}) \leq h$. Allora possiamo scegliere ε sufficientemente piccolo perché $\operatorname{cat}_{E^b}(N_{3\varepsilon}(K_c)) \leq h$.

Sicuramente, esiste $A \in \Gamma_{i+h}$ t.c. $\max_{u \in A} E(u) \leq c_{i+h} + \varepsilon = c_i + \varepsilon$.

Prendo A_ε e lo deformo secondo il lemma di

deformazione in $B_\varepsilon \subseteq E^{c_i-\varepsilon} \cup N_{3\Omega}(K_c)$

$B_\varepsilon = B_1 \cup B_2$ con B_1 e B_2 compatti e

$B_1 \subseteq E^{c_i-\varepsilon}$ e $B_2 \subseteq N_{3\Omega}(K_c)$

$\operatorname{cat}_{E^b}(B_1) \leq i-1$ (perché $B_1 \subseteq E^{c_i-\varepsilon} \Rightarrow \max_{B_1} E < c_i$)

$\operatorname{cat}_{E^b}(B_2) \leq \operatorname{cat}_{E^b}(N_{3\Omega}(K_c)) \leq h$

$\Rightarrow \operatorname{cat}_{E^b}(B_\varepsilon) \leq i+h-1$ assunto perché

↑ subadditività

$\operatorname{cat}_{E^b}(B_\varepsilon) \geq \operatorname{cat}_{E^b}(A_\varepsilon) \geq i+h$. ☐

↑ superadditività

Perché $\operatorname{cat}_X(A) \geq 2 \Rightarrow A$ non è finito

(se X è connesso) $\Rightarrow$ ogni insieme finito è contraibile

