$f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ S sup reg. (1)

f differenziabile in $p \in S$ se:

$\exists$ $\underline{x}: U \longrightarrow S$ param locale:

- $p \in \underline{x}(U)$, $p = \underline{x}(q)$
- $f \circ \underline{x}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in q

<u>Teorema</u> (cambio di coordinate)

S sup. regolare, $p \in S$

$\underline{x}: U \to S \subseteq \mathbb{R}^3$, $\underline{y}: V \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$

$p \in \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V) = W$

$h: \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}: \underline{y}^{-1}(W) \longrightarrow \underline{x}^{-1}(W)$

è <u>diffeomorfismo</u>

<u>Quindi</u>: se esiste $\underline{x}$: $f \circ \underline{x}$ differenz.

allora $\forall$ $\underline{y}$ param locale $f \circ \underline{y}$ è diff.

Infatti $f \circ \underline{y} = f(\underline{x} \circ \underline{x}^{-1}) \circ \underline{y} = (f \circ \underline{x}) \circ h$

è composizione di funz. differenziabili

Esempio di funz. differenziabili

• sia S sup reg., sia $p \in S$,

$\underline{x} : U \to S$ param. locale

sia $\underline{x}^{-1} : \underline{x}(U) \subseteq S \longrightarrow \mathbb{R}^2$

le coord. locali sono differenziabili

infatti: $\underline{x}^{-1} \circ \underline{x} = id_U : U \to U$

è certamente differenziabile

•• Osservazione: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup reg

sia $S \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$ V aperto di $\mathbb{R}^3$

$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ funz differenziabile

Allora: $f_{|S} : S \to \mathbb{R}$ è differenziabile

infatti, sia $\underline{x} : U \to S$ una param. qualunque

allora $f_{|S} \circ \underline{x} = f \circ \underline{x}$ comp. di funz. differ.

esempi: $P_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$

$f(P) = d(P, P_0)$ $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$

f è definita su $V = \mathbb{R}^3 - \{P_0\} \supseteq S$

$$f(p) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

differenziabile su V

Se $P_0 \in S$, f non è differenz. in P_0

— o —

$f : S_1 \longrightarrow S_2$ differenziabile

sia $p \in S_1$ f differenziabile in p se:

$$\begin{tikzcd}
p \in S_1 \arrow[r, "f"] & S_2 \ni f(p) \\
U_1 \arrow[u, "\underline{X}_1"] \arrow[r, dashed] & U_2 \arrow[u, "\underline{X}_2"']
\end{tikzcd}$$

$p \in \underline{X}_1(U_1)$, $f(p) \in \underline{X}_2(U_2)$

$\underline{X}_2^{-1} \circ f \circ \underline{X}_1$ è definita su un opportuno intorno di p

Definizione: f differenziabile se

$\underline{X}_2^{-1} \circ f \circ \underline{X}_1$ è differenziabile

$\underline{X}_2^{-1} \circ f \circ \underline{X}_1$ = funzione f scritta in coordinate locali

Sia $f : S_1 \longrightarrow S_2$ differenziabile

Cosa è il <u>differenziale di f</u> ?

In Analisi $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

U aperto $\quad p \in U \quad df_p = ??$

df_p = appl. lineare $\longrightarrow T_p U$

$df_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

In Geometria $f : S \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

S sup regolare, $p \in S$

$df_p : \underset{\text{sp. vett}}{V} \longrightarrow \underset{\text{sp. vett}}{W}$

probabilmente : $W = \mathbb{R}$

$V = ?? = T_p S$

Per dare correttamente la definizione di "spazio tangente" occorre un pò di lavoro.

$\mathbb{R}^n_v$ = sp. vett. di dimensione n

$\mathbb{R}^n_a$ = sp. aff. corrispondente

Sia $p \in \mathbb{R}^n_a$. Un vettore tangente a $\mathbb{R}^n_a$ in p

è una coppia $\underline{v}_p = (p, \underline{v})$ dove $\underline{v} \in \mathbb{R}^n_v$

L'insieme di tutti i vettori tangenti a $\mathbb{R}^n_a$

si dice fibrato tangente di $\mathbb{R}^n_a$

$$T\mathbb{R}^n_a = \{ \underline{v}_p = (p, \underline{v}) \mid p \in \mathbb{R}^n_a, \ \underline{v} \in \mathbb{R}^n_v \}$$

c'è una funzione

$$\pi : T\mathbb{R}^n_a \longrightarrow \mathbb{R}^n_a$$

$$\underline{v}_p = (p, \underline{v}) \longrightarrow p$$

"punto di applicazione"

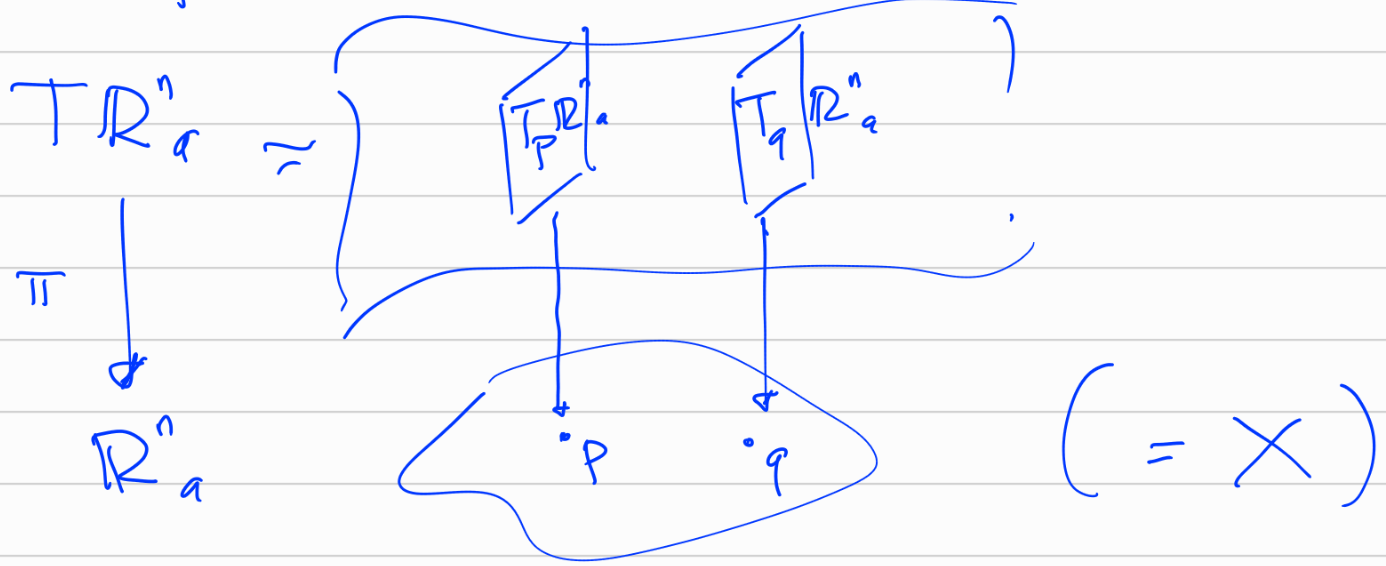
Cosa è $\pi^{-1}(p) = ??$ = tutti i vettori tangenti in p

$\pi^{-1}(p) = T_p \mathbb{R}^n_a$ = sp. tangente a $\mathbb{R}^n_a$ in p

c'è una corrispondenza biunivoca "naturale" $T_p\mathbb{R}^n_a \longleftrightarrow \mathbb{R}^n_v$

quindi: $T_p\mathbb{R}^n_a$ è uno sp. vettoriale

- $\underline{v}_p + \underline{w}_p = (p, \underline{v}) + (p, \underline{w}) = (p, \underline{v}+\underline{w})$
- $\lambda \underline{v}_p = \lambda(p, \underline{v}) = (p, \lambda \underline{v})$



Intendendo con "dimensione" il numero dei parametri liberi necessari per descrivere i punti di un insieme

$$\dim \mathbb{R}^n_a = n$$

$$\dim T_p\mathbb{R}^n_a = n \quad (= \dim \mathbb{R}^n_a)$$

$$\dim T\mathbb{R}^n_a = 2n$$

Morale: $\quad T_p\mathbb{R}^n_a \neq \mathbb{R}^n_a$ (7)

sp. vett. $\qquad$ sp. affine

Passiamo adesso a $S \subseteq \mathbb{R}^3_a$

sia $p \in S$ $\quad$ abbiamo $T_p\mathbb{R}^3_a$

chi è T_pS??

E' sensato pensare $T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^3_a$

sia α una curva tracciata su S, che passa per p

sia • $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$

• $\alpha(0) = p$

$\longrightarrow \quad \alpha'(0) =$ vettore tangente a α in p

poiché $\alpha \subseteq S$ è sensato pensare che

$\alpha'(0)$ sia tangente ad S

Sia S sup. regolare, $p \in S$

$\underline{v} \in \mathbb{R}^3_v$ vettore $\quad (\underline{v}_p = (p, \underline{v}) \in T_p\mathbb{R}^3_a)$

$\underline{v}$ è tangente a S in p se esiste α

- $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ $\quad$ α differenziabile
- $\alpha(0) = p$
- $\alpha'(0) = \underline{v}$

Definizione: S sup. regolare, $p \in S$

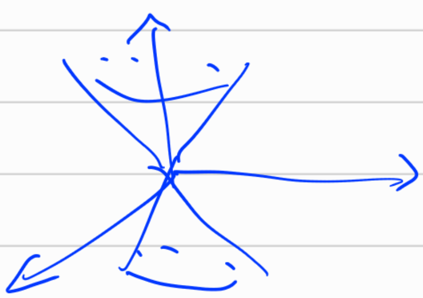
$$C_pS = \left\{ \underline{v}_p = (p, \underline{v}) \in T_p\mathbb{R}^3_a \;\middle|\; \begin{array}{c} \underline{v} \text{ è tg} \\ \text{a } S \text{ in } p \end{array} \right\}$$

$=$ cono tangente a S in p

per definizione, $C_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^3_a$

cono^C $\subseteq$ sp. vettoriale significa

$\underline{v} \in C \Longrightarrow \lambda\underline{v} \in C \quad \forall \lambda$ scalare



cono che non è un sottosp. vettoriale

Fatto: C_pS è un cono (9)

dimost. sia $\underline{v}_p = (p, \underline{v}) \in C_pS$

cioè: $\exists\ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$
$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \underline{v}$

sia $\beta(t) = \alpha(\lambda t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

immagine di β = immagine di α

cioè: $\beta : (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda) \longrightarrow S$

$\beta(0) = p$

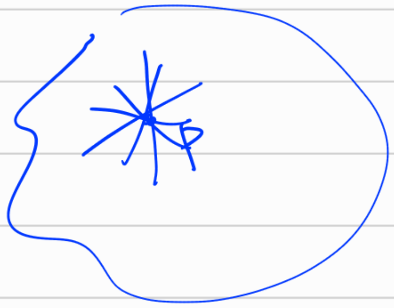
$\beta'(0) = \lambda\alpha'(0) = \lambda\underline{v}$

$\Longrightarrow \quad \lambda\underline{v}_p = (p, \lambda\underline{v}) \in C_pS \quad \blacksquare$

In partic. per $\lambda = 0 \longrightarrow (p, \underline{0}) \in C_pS$

Osservazione: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $p \in U$

cosa è $C_pU = ??$



$\underline{v}$ vettore è tangente alla curva
$\gamma(t) = p + t\underline{v}$

$\Longrightarrow \quad C_pU = T_p\mathbb{R}^n_a = \mathbb{R}^n_v$ 10

cioè: i vettori tangenti ad un aperto sono tutti i vettori dello sp. vettoriale.

Teorema S sup regolare, $p \in S$ sia $\underline{x} : U \to S$ param regolare, $\underline{x}(q) = p$

allora:

$$C_pS = d\underline{x}_q(T_q\mathbb{R}^2_a) = d\underline{x}_q(\mathbb{R}^2)$$

$\Longrightarrow$ in part. C_pS = sottospazio vettoriale.