# TEOREMA DI LIOUVILLE

**Proposizione**: Sia $A(t): [a,b] \to \mathcal{M}(n,n)$ di classe $C^1$, $A=(a_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$ invertibile $\forall t$,

$A'(t) = (a'_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$. Allora

$$\boxed{\frac{d}{dt}\det(A(t))\Big| = \det(A(t))\, tr(A'(t)A^{-1}(t))}$$

**Dimostrazione**. Fissato $t_0$, so per ipotesi che $A(t_0)$ non é singolare.

Allora $\det(A(t)) = \det(\underbrace{A(t)A^{-1}(t_0)}\underbrace{A(t_0)}) = \det(\underbrace{A(t)A^{-1}(t_0)}_{B(t)})\det(\underbrace{A(t_0)})$

Ora supponiamo di avere una matrice $B(t)$, tale che $B(t_0)=\mathbb{1}$

( per noi $B(t) = A(t)A^{-1}(t_0)$, con $B \in C^1$ )

$$\boxed{\det(B(t)) = \sum_{\sigma\in S_n} \text{segno}(\sigma)\, b_{1\sigma_1}(t)\cdots b_{n\sigma_n}}$$

($S_n$ = permutazioni di $(1,\dots,n)$)

deriviamo rispetto a $t$

$$\frac{d}{dt}\det(B(t)) = \sum_{\sigma\in S_n} \text{segno}(\sigma)\left[b'_{1\sigma_1}(t)\, b_{2\sigma_2}(t)\cdots b_{n\sigma_n}(t) + b_{1\sigma_1} b'_{2\sigma_2}\cdots b_{n\sigma_n} + \dots + b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2}\cdots b'_{n\sigma_n}\right]$$

calcolo per $t=t_0$ sapendo che $b_{ij}(t_0)=\delta_{ij}$. L'unico caso in cui non viene tutto zero é quando $\sigma=\mathbb{1}$ e

$$\boxed{\frac{d}{dt}\det(B(t))\Big|_{t=t_0} = tr(B'(t_0))}$$

se $B(t_0)=\mathbb{1}$

Se $A(t)$ é non singolare $\forall t$ $\quad B(t) = A(t)A^{-1}(t_0)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\det(A(t))\right) = \det(A(t))\, tr(A'(t)A^{-1}(t))$$

Prodotto di matrici

**OSSERVAZIONE**: Se sappiamo che $\exists\, \underbrace{M(t)}_{\text{matrice}} : A'(t) = M(t)A(t) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t))\, tr(M(t))}$$

TEOREMA DI LIOUVILLE

## CASO DEI SISTEMI LINEARI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

$$\begin{cases} y' = M(t)y & y \in \mathbb{R}^n \\ y(\tau) = \xi \end{cases}$$

Un sistema fondamentale di soluzioni $(y_1, \dots, y_n)$ é un sistema di $n$ funzioni $y_i : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ che risolve

$$y_i' = M(t) y_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

e in più sono linearmente indipendenti.

$$A(t) = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} y_1(t) & y_2(t) \; \dots & y_n(t) \\ \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \; \dots & \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \end{array} \end{pmatrix}$$

Allora si vede che $\begin{cases} A'(t) = M(t)\overset{\text{prodotto matriciale}}{\downarrow} A(t) \\ A(t_0) = A_0 \end{cases}$ con un certo valore iniziale

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\det(A(t))}_{x(t)} = \det(A(t)) \cdot tr(M(t))$$

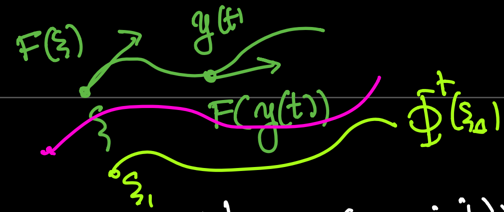
$x(t)$ che risolve l'equazione scalare

$$x'(t) = b(t) x(t) \qquad \text{con } b(t) = tr(M(t))$$

se $M$ é continua vale il teo. di $\exists !$, o $x(t) \neq 0 \;\; \forall t$
o $x(t) \equiv 0 \;\; \forall t$.

## APPLICAZIONE AL FLUSSO ASSOCIATO AD UN CAMPO VETTORIALE

$$(PC)\quad \begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = \xi \end{cases}$$




Sia $\boxed{F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}$ per cui il (PC) abbia esistenza (e unicità) globale.

Denotiamo con $\Phi^t(\xi) = y(t)$ la soluzione di (PC) al tempo $t$.

Abbiamo:

$$\Phi^0(x) = x \qquad \forall x$$

$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s \qquad \text{proprietà di semigruppo}$$

$\Phi^t$ sono omeomorfismi come funzione di $x$ e $\Phi^{-}(\Phi^s(x)) = \mathbb{1}$

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(x) = F(\Phi^t(x))$$

TEOREMA (Differenziabilità rispetto al dato iniziale) _ Se $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

allora $\Phi \in C^1(\underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}^n})$ e risulta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} J_{\Phi^t}(x) = J_F(\Phi^t(x)) J_{\Phi^t}(x) \\ J_{\Phi^0}(x) = \mathbb{1} \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} \text{a } x \text{ fissato, detto} \\ A(t) = Jac_{\Phi^t}(x) \quad \text{con } x \text{ fissato} \\ \frac{d}{dt} A(t) = M(t) A(t) \\ \text{dove } M(t) = J_F(\Phi^t(x)) \end{array}}$$

Dove la Jacobiana di $\Phi^t(x)$ è da intendersi rispetto alla variabile $x$, a $t$ fissato.

ESEMPIO: $y \in \mathbb{R}^2$ $y' = Ay$, con $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. $F\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{bmatrix} = Ax$ è

un campo lineare e $J_F(x) = A$ _

La soluzione di $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \xi \end{cases}$ è $y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}\xi_1 \\ e^{\mu t}\xi_2 \end{bmatrix}$ $\quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi^t(x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} x_1 \\ e^{\lambda_2} x_2 \end{bmatrix}} \qquad A \ t \text{ fissato}, \ J_{\Phi^t}(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} = e^{At}$$

$\xi = x$

Osserviamo che $J_{\Phi^t}(x)$ in questo caso non dipende da $x$ e verifica l'equazione

$$\frac{d}{dt} J_{\Phi^t}(x) = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mu e^{\mu t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}}_{J_{\Phi^t}(x)}$$

$$= J_F(\Phi^t(x)) J_{\Phi^t}(x)$$

OSSERVAZIONE: Formalmente: $\boxed{\Phi^t(x) = x + \int_0^t F(\Phi^s(x))\,ds}$

differenziamo rispetto a $x$:

↓ differenziazione funzioni composte

$$J_{\Phi^t}(x) = \mathbb{1} + \int_0^t J_F(\Phi^s(x)) J_{\Phi^s}(x)\,dx$$

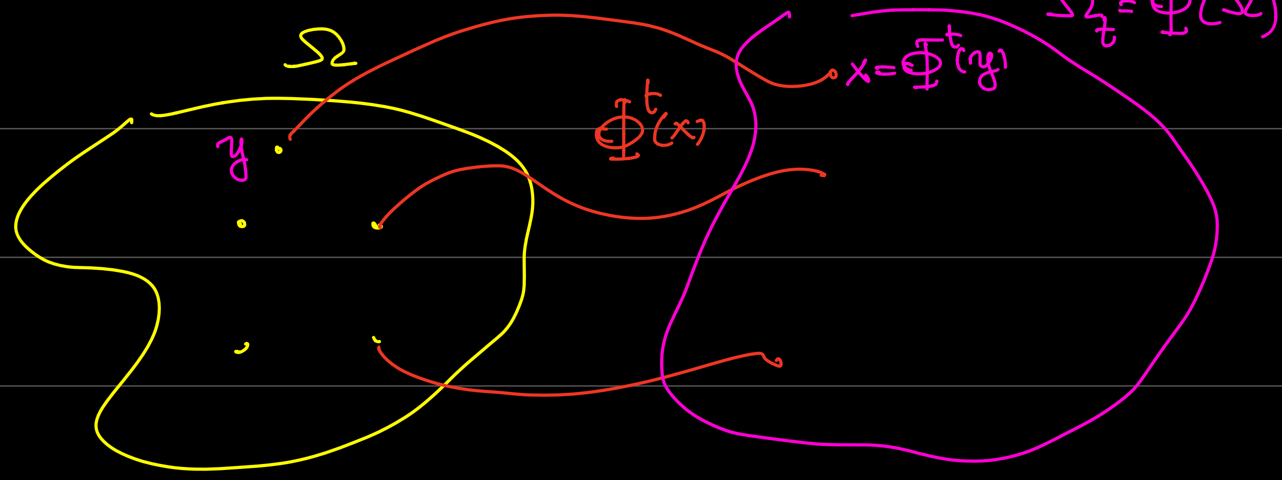
In particolare, se la applichiamo allo $J_{\Phi^t}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} J_{\Phi^t}(x) = J_{F(\Phi^t(x))} J_{\Phi^t}(x) \\ J_{\Phi^0}(x) = \mathbb{1} \end{cases}$$

$$\operatorname{tr}(J_F(\Phi^t(x))) = \operatorname{div} F(\Phi^t(x))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \det(J_{\Phi^t}(x)) = \operatorname{div}(F)(\Phi^t(x)) \det(J_{\Phi^t}(x))$$

$x' = a(t)x \qquad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad x(t) \neq 0 \ \forall t$




Sotto l'azione del flusso $\Phi^t$ associato al campo $F$, il dominio $\Omega$ viene trasformato in $\Omega_t$.
Vogliamo capire come varia la sua area (o il suo volume):

$$|\Omega_t| = \int_{\Omega_t} dx \overset{x=\Phi^t(y)}{=} \int_{\Omega} |\det(J_{\Phi^t}(y))|\,dy \qquad \text{det} > 0$$

deriviamo sotto segno di integrale e troviamo

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div}(F(\Phi^t(y)))\det(J_{\Phi^t}(y))}_{=\frac{d}{dt}\det(J_{\Phi^t}) \,\leftarrow\, \text{teorema di Liouville}}\,dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\Omega_t| &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(F(\Phi^t(y)))\det(J_{\Phi^t}(y))\,dy \\ &\overset{x=\Phi^t(y)}{=} \int_{\Omega_t} \operatorname{div} F(x)\,dx \underset{\text{teo div.}}{=} \int_{\partial\Omega_t} F(x)\cdot \nu_{ext}(x)\,d\sigma \end{aligned}}$$

CONSERVAZIONE DEI VOLUMI

In particolare, se il campo $\vec{F}$ ha divergenza nulla, abbiamo

$$\boxed{\frac{d}{dt}|\Omega_t| = 0}$$

Cioé il flusso $\Phi^t$ preserva i volumi (o le aree)

ESEMPIO: Sistemi Hamiltoniani – In $\mathbb{R}^{2n}$, consideriamo il sistema

$(q,p)\in\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H(p,q) \in \mathbb{R}^n \\ \dot{p} = -\nabla_q H(p,q) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

H é la funzione Hamiltoniana

Per esempio, un sistema Newtoniano conservativi $\boxed{m\ddot{x} = \nabla U(x)}$

é un sistema Hamiltoniano, con Hamiltoniana $\boxed{H(q,p) = \frac{1}{2m}|p|^2 - U(q)}$

$$[\underbrace{x}_{\text{config.}} = q, \quad p = m\underbrace{\dot{x}}_{\text{momento}}]$$

$$\begin{cases} \dot{p} = [m\ddot{x} = \nabla_x U(x)] = -\nabla_q H(p,q) \\ \dot{q} = [\dot{x} = \frac{p}{m}] = \nabla_p H(p,q) \end{cases}$$

Proprietà notevole: H é costante lungo i moti, $\frac{d}{dt}H(q(t),p(t)) = 0$.

Il campo $F: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}: (q,p) \to (\nabla_p H, -\nabla_q H)$

Se $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$, $F \in C^1(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$ e

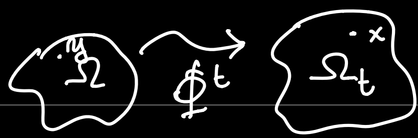
$$\operatorname{div}_{(q,p)} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial q_i} + \frac{\partial F_{i+n}}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0$$

(per il teorema di Schwarz).

## PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Supponiamo che $\rho = \rho(t,x)$ rappresenti la densità (di massa, di carica o di altra grandezza fisica) di una sostanza le cui particelle si muovono lungo il flusso $\Phi^t$ del campo $F$. La massa contenuta in un insieme $\Omega$ è

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} \rho(t,x)\,dx$$



Ora considero $\Omega_t = \Phi^t(\Omega)$ e calcolo

$$m(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \rho(t,x)\,dx \underset{x=\Phi^t(y)}{=} \int_{\Omega} \rho(t,\Phi^t(y))\,\det(J_{\Phi^t}(y))\,dy$$

abbiamo levato il modulo perché è $>0$

Faccio la derivata rispetto a $t$, usando il fatto che (teorema Liouville)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\det(J_{\Phi^t}(x)) = \det(J_{\Phi^t}(x))\,(\operatorname{div} F)(\Phi^t(x))}$$

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(y) = F(\Phi^t(y))$$

ottengo

$$\frac{d}{dt} m(\Omega_t) = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(t,x)\,dx = \int_{\Omega} \Big[\rho_t + \nabla_x \rho(t,\Phi^t(y))\cdot F(\Phi^t(y))$$

$$+ \rho(t,\Phi^t(y))\,\operatorname{div} F(\Phi^t)\Big]\det(J_{\Phi^t}(y))\,dy$$

$$\underset{x=\Phi^t(y)}{=} \int_{\Omega_t} \big[\rho_t(t,x) + \operatorname{div}_x(\rho F)\big]\,dx$$

La massa è conservata $\iff \dfrac{d}{dt} m(\Omega_t) = 0 \quad \forall\, \Omega$

$$\Longleftrightarrow \quad \rho_t + \operatorname{div}_x(\rho F) = 0$$ Equazione di continuità

Cosa succede se $u = u(t,x)$ rappresenta la concentrazione di una certa componente, la cui massa é ugualmente conservata?

Abbiamo due equazioni di continuità [ $u\rho$ é la densità delle componente cons.]

$$\boxed{\rho_t + \operatorname{div}_x(\rho F) = 0} \quad e \quad \boxed{(u\rho)_t + \operatorname{div}_x(\rho u F) = 0}$$

$$u_t \rho + u \rho_t + \rho \nabla u \cdot F + u \nabla \rho \cdot F + u\rho \operatorname{div} F$$

$$= u(\rho_t + \nabla\rho \cdot F + \rho \operatorname{div} F) + \rho(u_t + \nabla_x u \cdot F) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_t + \nabla_x u \cdot F = 0}$$ Equazione di Liouville (trasporto)

$\Rightarrow$ metodo delle caratteristiche

$$u_t + F(x) \cdot \nabla_x u = 0$$

Se il sistema non é chiuso e ci sono fonti di massa

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho F) = f(t,x)$$

ugualmente per la concentrazione

$$u_t + \nabla_x u \cdot F = g(t,x)$$