Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup regolare, (1)
sia $p \in S$

$$C_p S = \{ (p, \underline{v}) \mid \underline{v} \text{ è tang. a } S \text{ in } p \}$$

$$C_p S \subseteq T_p \mathbb{R}^3_a = \mathbb{R}^3_v$$

sia $\underline{x} : U \longrightarrow S$ una param. locale tale che $p \in \underline{x}(U)$, sia $q \in U : \underline{x}(q) = p$

$$\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2_a \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3_a$$

in $q \in U$ c'è il differenziale $d\underline{x}_q$

$$d\underline{x}_q : \mathbb{R}^2 (= T_q U) \longrightarrow \mathbb{R}^3 (= T_p \mathbb{R}^3_a)$$

funz. lineare : $\begin{cases} d\underline{x}_q (1,0) = \underline{x}_u \\ d\underline{x}_q (0,1) = \underline{x}_v \end{cases}$

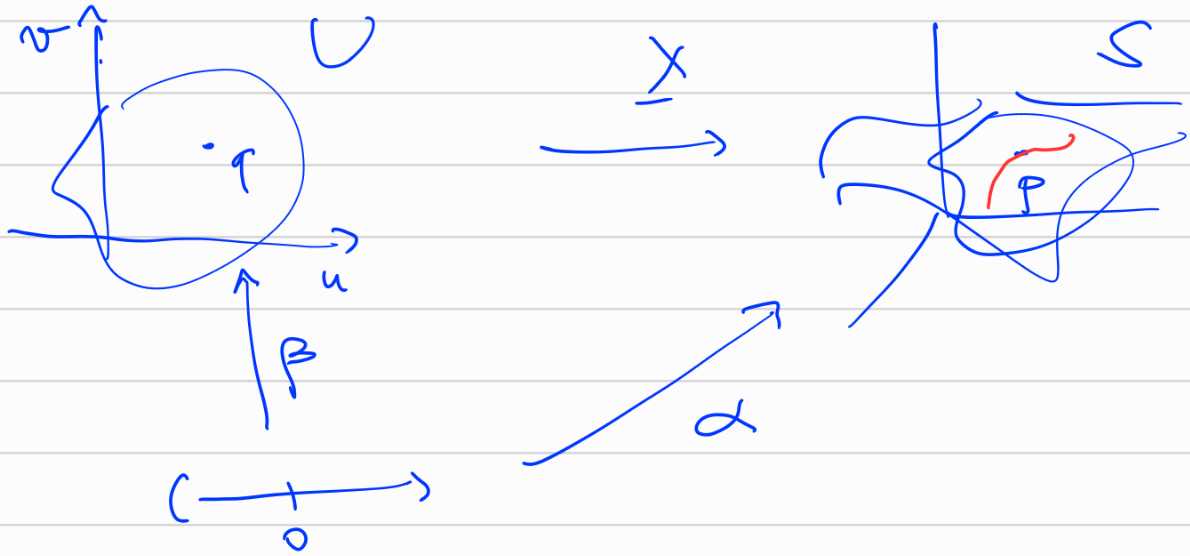
Proposizione: nella situazione detta:

$$C_p S = d\underline{x}_q (\mathbb{R}^2)$$

Dimostrazione

$\subseteq$: sia $\underline{w}_p \in C_p S$ cioè:

$\exists$ curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$
$\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{w}$



$$\beta = \underline{X}^{-1} \circ \alpha \ : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$$

ricordiamo: $\underline{X}^{-1} : \underline{X}(U) \longrightarrow U$ è differenziabile

$\longrightarrow$ β è differenziabile

possiamo scrivere $\alpha = \underline{X} \circ \beta$

$$\underline{w} = \alpha'(0) = \frac{d}{dt}\left(\underline{X} \circ \beta\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= u'(0) \cdot \underline{X}_u + v'(0) \cdot \underline{X}_v$$

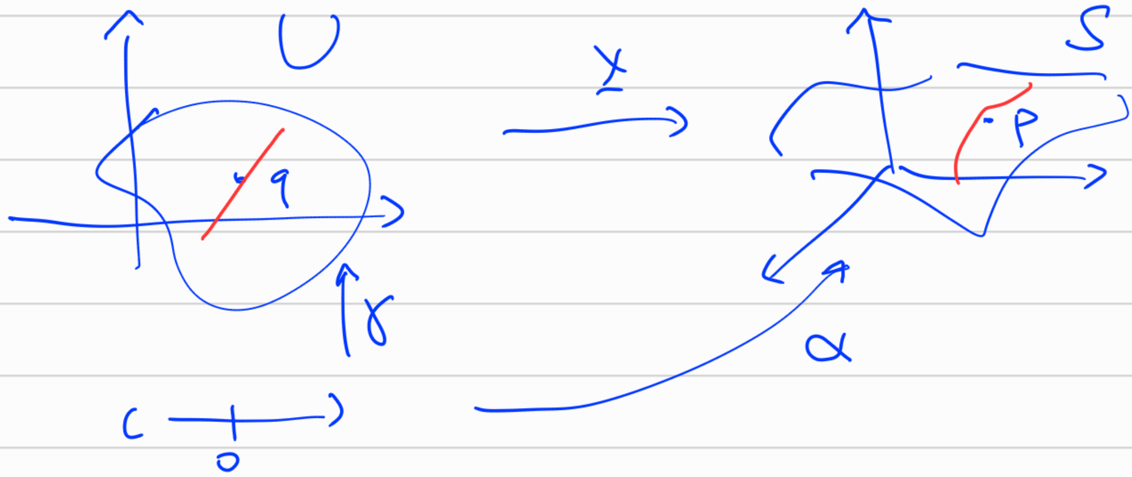
dove $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$

$\qquad\qquad t \longrightarrow (u(t), v(t))$

$\Longrightarrow$ $\underline{w}$ è comb. lineare di $\underline{X}_u, \underline{X}_v$

$\Longrightarrow$ $\underline{w} \in d\underline{X}_q(\mathbb{R}^2)$.

$\supseteq$ Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ e $\underline{w} = d\underline{x}_q(\underline{v})$ 3



sia $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ la curva

$$\gamma(t) = q + t\underline{v} \qquad \underline{v} = (v_1, v_2)$$

sia $\alpha = \underline{X} \circ \gamma$ è differenziabile

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$$

α è una curva $\subseteq S$, $\alpha(0) = \underline{X}(\gamma(0))$

$$= \underline{X}(q) = p$$

$\Rightarrow \alpha'(0) \in C_p S$

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(\underline{X} \circ \gamma)\Big|_{t=0} =$$

$$= u'(0)\,\underline{X}_u + v'(0) \cdot \underline{X}_v =$$

$$= v_1 \cdot \underline{X}_u + v_2 \cdot \underline{X}_v = d\underline{X}_q(\underline{v})$$

$$= \underline{w}$$

$\blacksquare$

Conseguenze

$C_pS = d\underline{x}_q(\mathbb{R}^2)$

1. C_pS è uno spazio vettoriale, sottospazio di $T_p\mathbb{R}^3_a$

2. l'immagine $d\underline{x}_q(\mathbb{R}^2)$ a priori dipende da $\underline{x}$. Invece l'immagine del differenziale di ogni parametrizz. è sempre la stessa, $= C_pS$

3. $\underline{x}$ param. locale $\Rightarrow$ rk $d\underline{x}_q = 2$

$$\Rightarrow d\underline{x}_q(\mathbb{R}^2) = C_pS \text{ ha dimensione } 2$$

in particolare $\{\underline{x}_u(q), \underline{x}_v(q)\}$ base di

T_pS

4. $\underline{w} = \alpha'(0)$ in qs base abbiamo

$$\underline{w} = u'(0)\,\underline{x}_u + v'(0)\,\underline{x}_v$$

$\underline{w}$ non dipende da α scelta, ma solo dalle derivate prime in 0

5. $p \in S$ S sup. regolare, d'ora in poi scriviamo $T_pS = C_pS$

$T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^3_a$ è un sottosp. vettoriale piano tangente a S in p = (5)

sottospazio affine traslato di T_pS in p

$$H: \; p + T_pS = p + \lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$$

(6) $$TS = \bigcup_{p \in S} T_pS$$ = fibrato tangente a S

- $TS \subseteq T\mathbb{R}^3_a$

TS è un oggetto di dimensione 4

dentro un oggetto di dimensione 6

è vero che $T\mathbb{R}^3_a = \mathbb{R}^3_a \times \mathbb{R}^3_v$

ma in generale $\underline{TS \neq S} \times \mathbb{R}^2_v$

Campo normale

sia $p \in S$,

$$N(p) = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \|} \in T_p\mathbb{R}^3_a$$

i vettori $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, N\}$ formano una base

di $\mathbb{R}^3_v$

qual è il piano (affine) tangente? (6)

perpendicolare a N, passante per p:

$$(\underline{x} - p) \cdot \underline{N} = 0$$

$\underline{x} = (x, y, z)$ = coordinate affini

—o—

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

C_pS è un cono
ma non uno sp. vettoriale

—o—

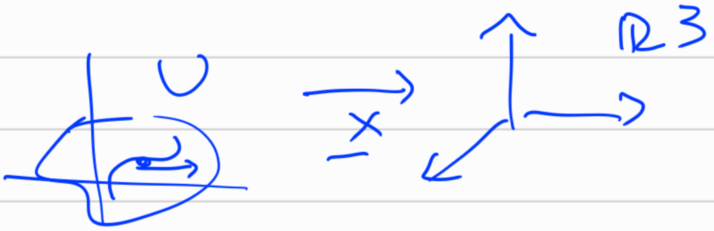
Vogliamo definire il differenziale di una funzione fra superfici

$$\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$$

$p \in S_1$: $\boxed{d\varphi_p : T_pS_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}S_2}$

Osservazione: $\underline{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diffeomorf.

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$: $\alpha(0) = q$, $\alpha'(0) = \underline{w}$



$\underline{x} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Il calcolo precedente dice che:

$$dx_q(\underline{w}) = (\underline{x} \circ \alpha)'(0)$$

A parole si può:

l'immagine tramite il differenziale di $\underline{x}$ di un vettore tangente ad α

è:

[il vettore tangente all'immagine di α tramite $\underline{x}$

Quindi: sia $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ differenziabile

sia $p \in S_1$.

Sia $w \in T_p S_1$, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$:

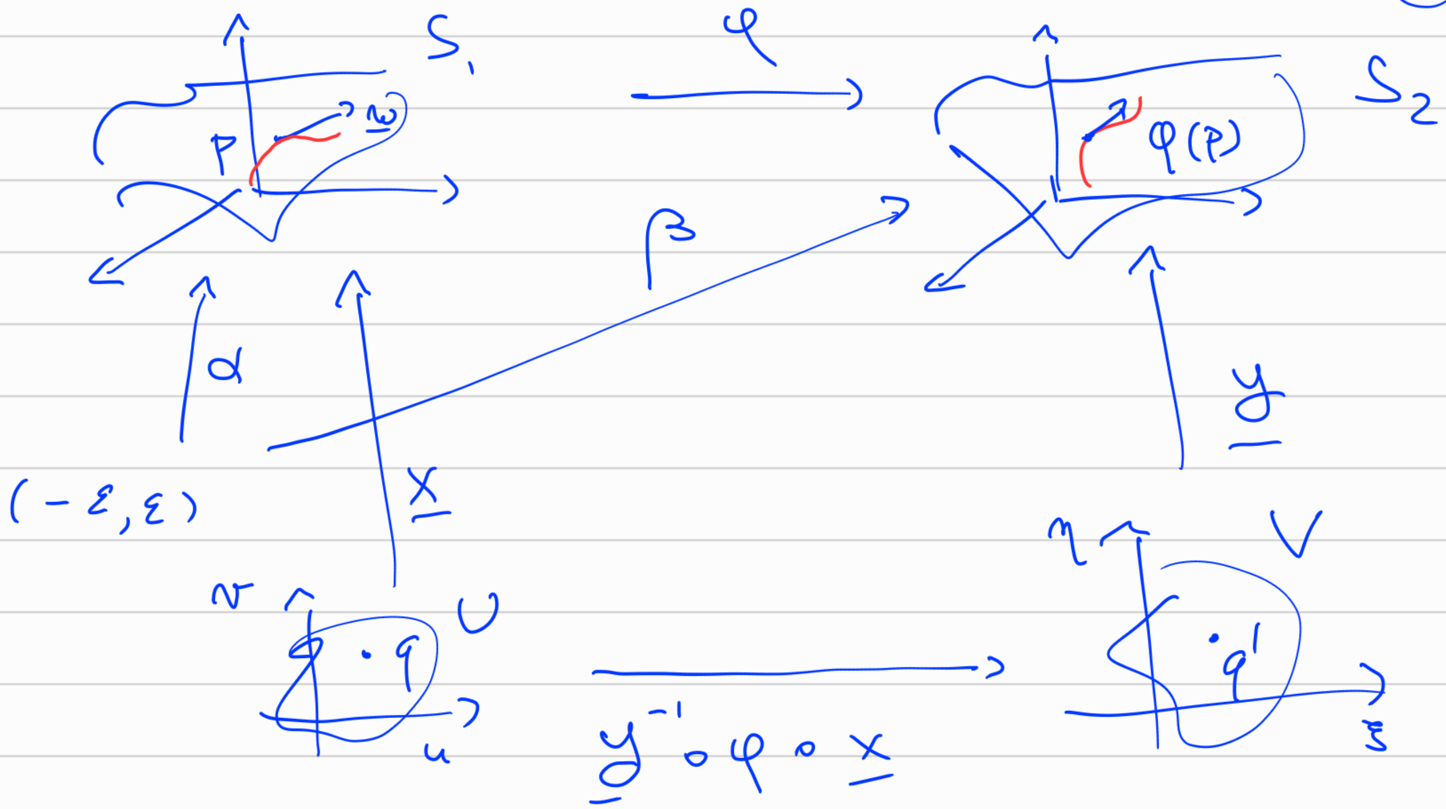
$\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{w}$

Definiamo: $d\varphi_p(\underline{w}) = (\varphi \circ \alpha)'(0) \in T_{\varphi(p)} S_2$

da dimostrare

- La def. non dipende da α ma solo da $\underline{w}$
- $d\varphi_p$ è una funzione lineare

Dimostrazione



$\{\underline{x}_u(q), \underline{x}_v(q)\}$ base di $T_p S_1$

$\{\underline{y}_\xi(q'), \underline{y}_\eta(q')\}$ base di $T_{\varphi(p)} S_2$

In coord locali:

$\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (u(t), v(t))$ curva α

$\underline{y}^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x} = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ funz. φ

stiamo cercando di calcolare $\boxed{\beta'(0)}$

$$\beta'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

Si ha:

$$(\underline{y}^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x}) \circ (\underline{x}^{-1} \circ \alpha) = \underline{y}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha = \underline{y}^{-1} \circ \beta$$

$$\underline{y}^{-1} \circ \beta = \left(\varphi_1(u(t), v(t)), \ \varphi_2(u(t), v(t)) \right)$$ 9

$\beta'(0)$ nella base $\{\underline{y}_\xi, \underline{y}_\eta\}$ si trova

derivando l'espressione locale (come nella dimostrazione precedente)

$$(\underline{y}^{-1} \circ \beta)'(0) = \left[\underline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(q) \cdot v'(0)}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(q) \cdot \underline{u'(0)} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(q) \cdot \underline{v'(0)} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$$

dove abbiamo scritto le comp. di $\beta'(0)$ nella base $\{\underline{y}_\xi, \underline{y}_\eta\}$

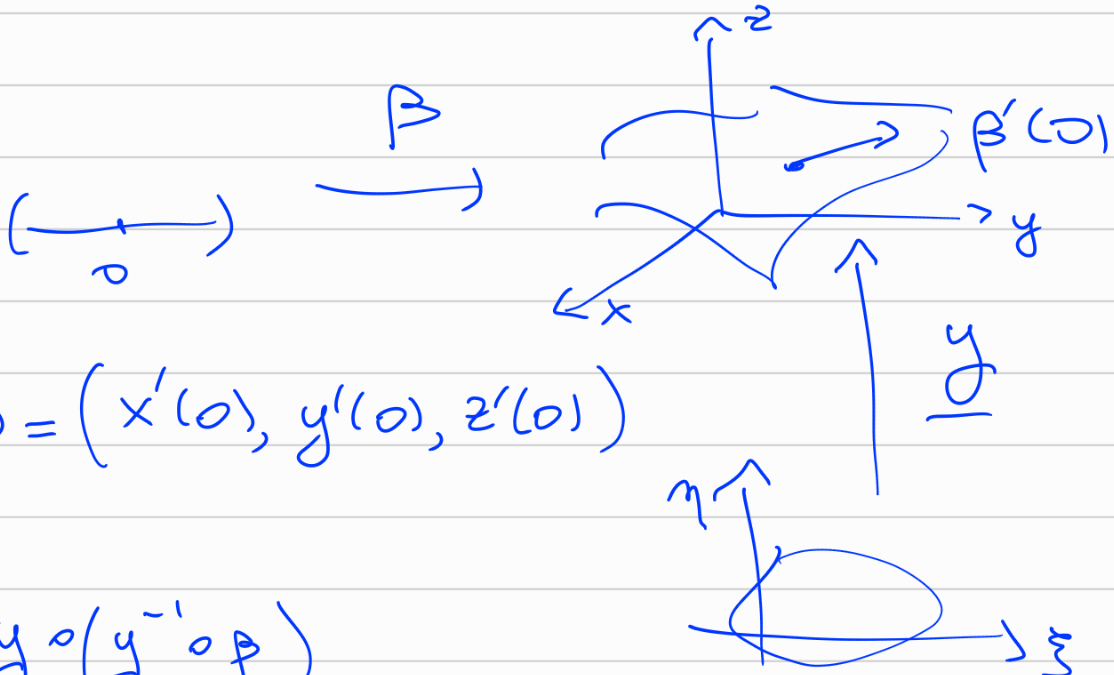
<u>Conclusione</u>:

1. $d\varphi_p(\underline{w})$ dipende solo dalle derivate di φ e dalle coord. di $\underline{w}$ ma non dalla curva α $\Longrightarrow$ è ben definita

② $d\varphi_p : T_p S_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ è lineare

perché, nelle coord relative alle basi $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ e $\{\underline{y}_\xi, \underline{y}_\eta\}$ è data dalla moltiplicazione per una matrice

Inoltre, in qs. basi, la matrice di $d\varphi_p$ è la matrice Jacobiana di $\underline{y}^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x}$, cioè dell'espressione di φ in coord. locali. ■



$\beta'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))$

$\beta = \underline{y} \circ (\underline{y}^{-1} \circ \beta)$

$$y^{-1} \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow (\xi(t), \eta(t))$$

$$\beta'(0) = \left(\underline{y} \circ (\underline{y}^{-1} \circ \beta)\right)' =$$

$$= \underline{y}_\xi \cdot \xi'(0) + \underline{y}_\eta \cdot \eta'(0)$$

Cioè: $\left(\xi'(0), \eta'(0)\right)$ = coord. di $\beta'(0)$

nella base $\underline{y}_\xi, \underline{y}_\eta$

= derivata di $\underline{y}^{-1} \circ \beta$ in $t = 0$.