Categoria di Lusternik-Schnirelmann: TEOREMA

$\operatorname{cat}_{E^b} E^b \geq k$, $\inf E > -\infty$, (P-S) ad ogni livello, allora E ha almeno k punti critici in E^b

---

$$c_k = \inf_{\Gamma_k} \max_{A \in \Gamma_k} E$$

$$\Gamma_k = \{ A \text{ compatti}, \operatorname{cat}_{E^b} A \geq k \}$$

c_k sono livelli critici

$$c_k = c_{k+1} \cdots = c_{k+h} \Rightarrow \operatorname{cat}_{E^b}(K_c) \geq h+1$$

PROPOSIZIONE: Un insieme finito di k punti ha al più categoria k

OSSERVAZIONE: A è contraibile in X, se $\exists\, \eta: X \times [0,1] \to X$ (continua) tale che $\eta(\cdot,0) = \mathbb{1}_X$ e $\eta(A,1) = \{x_0\}$.

Un punto è sempre contraibile.

Si può modificare la definizione chiedendo che $\exists\, \eta: A \times [0,1] \to X$

$$\eta(\cdot,0) = \mathbb{1}_A \quad e \quad \eta(A,1) = \{x_0\}$$

APPLICAZIONI ALLE EQUAZIONI ELLITTICHE SEMILINEARE

(caso superlineare - Ambrosetti-Rabinowitz)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $|\Omega| < +\infty$, $a \in L^s(\Omega)$: $s > 1$ $N=2$, $s = \frac{N}{2}$ $N \geq 3$,

$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$$

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{a(x)}{2}u^2 - F(x,u)$$

Ipotesi: f soddisfa le condizioni di Carathéodory (CC)

- $f(x,0) = 0$ p.p. x

(f_1) $\lim_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0$ unif. in x

(f_2) $\exists C > 0$: $|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^p)$, con

$p > 1$, $N=2$, $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ se $N \geq 3$.

OSSERVAZIONE: Le ipotesi (f_1) (f_2) e (CC) assicurano che $E \in C^1(H_0^1; \mathbb{R})$ (prime lezioni - operatori di

Nemitskii).

(f_3) (Ambrosetti – Rabinowitz) $\exists\ \beta > 2 \quad \exists C > 0$ tale che

$$f(x,s)s \geq \beta F(x,s) - C \quad \text{per q.o. } x \text{ e ogni } s$$

OSSERVAZIONE: L'ipotesi è sicuramente verificata quando, per esempio, $f(x,s) = a(x)|s|^{p-1}s$, $a(x) \geq 0$.

$$F(x,s) = \frac{1}{p+1} a(x)|s|^{p+1}$$

e $p > 1$ $\qquad \beta = p+1 > 2$

in tale caso $f(x,s)\cdot s - (p+1)F(x,s) = 0 \geq -C$

$\beta = (p+1)$.

(F_1) $\lim_{|s|\to+\infty} F(x,s) = +\infty$ unif. in x – (a meno di insieme di misura nulla)

e.g. $a(x) \geq \underline{a} > 0$, $a \in L^\infty(\Omega)$

OSSERVAZIONE sulla (f_3), detta condizione di Ambrosetti e Rabinowitz

$$\frac{d}{ds}\left[s^{-\beta}F(x,s) + \frac{s^{-\beta}}{\beta}C\right] = s^{-\beta}\frac{\partial F}{\partial s} - \beta s^{-\beta-1}F - s^{-\beta-1}C$$

$$= s^{-\beta-1}\left[f(x,s)s - \beta F(x,s) - C\right] \geq 0 \qquad \forall x, s$$

Quindi la funzione $\bar{s}^{\beta}[F(x,s)+C]$ è una funzione non decrescente, e in virtù di (F_1) assume dei valori positivi per $s \geq \bar{s}$ $(\lim_{|s|\to+\infty} F(x,s) = +\infty)$

$\Rightarrow \exists\, d>0$ t.c. $\bar{s}^{\beta}[F(x,s)+C] \geq d \quad \forall s \geq \bar{s}$

e q.o. x

$$F(x,s) \geq d s^{\beta} - C \qquad \forall s \geq \bar{s}$$

$$F(x,s) \geq d s^{\beta} - C' \qquad \forall x, \forall s \geq 0$$

Possiamo ragionare in modo analogo con $s<0$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,s) \geq d|s|^{\beta} - C} \qquad \beta > 2$$

proprietà di superquadraticità per F

che si riflette in una proprietà di superlinearità all'infinito su f:

$$f(x,s)s \geq d|s|^{\beta} - C$$

OSSERVAZIONE (perturbazione con termini quadratici) - Supponiamo che siano verificate (da f e F) (f_3) e (F_4) (per un certo β) - Prendiamo $\bar{t} > 0$ e definiamo $\bar{F}(x,s) = F(x,s) + \frac{\bar{t}}{2}s^2$

e analogamente $\bar{f}(x,s) = f(x,s) + \bar{t}s$.

In generale il termine $\frac{\bar{t}}{2}s^2$ non verifica (f_3, F_3). $\beta = 2 \not> 2$

Però $\bar{F}$ verifica ancora (F_1) se $\bar{t} \geq 0$. Inoltre verifico (f_3) con $\forall\ \bar{\beta} \in (2, \beta)$.

(Esercizio di analisi 2 da fare per conto vostro).

VALIDITÀ DELLA CONDIZIONE DI PALAIS-SMALE

al livello c generico.

Supponiamo di avere una successione di $(PS)_c$

$(u_n)_n \subseteq H_0^1(\Omega)$ t.c.

$$E(u_n) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \frac{a(x)}{2}u_n^2 - F(x,u_n) = c_n \to c$$

$$\| d_{u_n} E \|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$$

$$h_n =: d_{u_n} E \in H^{-1}$$

Abbiamo quindi l'eq. in senso debole

$$\begin{cases} -\Delta u_n + a(x)u_n = f(x, u_n(x)) + h_n \\ u_n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

e $h_n \to 0$ in H^{-1} _

$\forall\, v \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v + a(x) u_n \cdot v = \int_\Omega f(x, u_n) v + h_n[v]$$

$$|h_n[v]| \le \|h_n\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1_0(\Omega)}$$

Come prima cosa, possiamo ricondurci ad avere a primo membro una forma quadratica definita positiva su $H^1_0(\Omega)$ _ Basta aggiungere ad a una $\bar{t} > 0$

$$\| (a + \bar{t})^- \|_{L^{N/2}} < S$$

dove $S = \inf_{\substack{u \in H^1_0 \\ u \not\equiv 0}} \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} \right)^{2/2^*}} > 0$

(L^s con $s > 1$, nel caso $N = 2$)

In questo modo, modifichiamo l'equazione

$$(*) \qquad -\Delta u_n + (a + \bar{t}) u_n = \underbrace{\bar{t} u_n + f(x, u_n)}_{} + h_n$$

$$R_{(a+\bar{t})}\, u_n = \bar{f}(x, u_n) + h_n$$

↑ operatore di Riesz associato al prodotto scalare

$$(u,v)_{\bar a} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \bar a\, uv \qquad \bar a = a + \bar t$$

In questo modo ci riconduciamo ad avere la forma quadratica che definisce una norma equivalente.

PROPOSIZIONE 1: Le successioni di (P-S) sono limitate in $H^1_0(\Omega)$ (grazie alla condizione (f_3)).

Dimostrazione: Testiamo (*) con $v = u_n$

$$(u_n,u_n)_{\bar a} = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \bar a u_n^2 = \int_\Omega \bar f(x,u_n)u_n + h_n[u_n]$$

$$\geq \int_\Omega \bar\beta\, \bar F(x,u_n) + h_n[u_n]$$

ma $$c_n = \frac{1}{2}(u_n,u_n)_{\bar a} - \int_\Omega \bar F(x,u_n)$$

$$(u_n,u_n)_{\bar a} \geq \frac{\bar\beta}{2}(u_n,u_n)_{\bar a} - c_n + h_n[u_n]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\bar\beta}{2}-1\right)(u_n,u_n)_{\bar a} \leq c_n + h_n[u_n] \leq c_n + \|h_n\|_{H^{-1}} \|u_n\|_{H^1_0}$$

($\uparrow$ norma equivalente in $H^1_0(\Omega)$)

$$\Rightarrow \quad \|u_n\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq c'_n + o\left(\|u_n\|_{H^1_0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} \text{ è limitata.} \qquad \blacksquare$$

PROPOSIZIONE 2. Le successioni di (P-S) limitate sono precompatte in $H^1_0(\Omega)$.

Dimostrazione: $(u_n)_n$ successione di (P-S) $_c$ limitata

Possiamo estrarre una sottosuccessione convergente debolmente di $H^1_0(\Omega)$

- $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u} \in H^1_0(\Omega)$

Vogliamo passare dalla convergenza debole a quella forte. [(f_2) $|f(x,s)| \leq c(1+|s|^p)$ con $\boxed{p < \frac{N+2}{N-2}}$ se $N \geq 3$]

Possiamo estrarre una (ulteriore) sottosuccessione t.c.

$$\boxed{u_{n_k} \to \bar{u} \quad \text{in} \quad L^{p+1}(\Omega)}$$

perché $p+1 < \frac{2N}{N-2}$, e vale il teorema di immersione compatta di Rellich-Kondrachov ($|\Omega| < +\infty$)

Grazie all'ipotesi (f_2) $(f(x,u_{n_k}))_k \subseteq L^{\frac{p+1}{p}}$ per le ipotesi di crescita su f

$$|f(x,u_{n_k})| \leq a\left(1+|u_{n_k}|^p\right) \in L^{\frac{p+1}{p}}$$

e non solo, ma converge fortemente a $f(x,\bar{u})$ in tale spazio. Questo si può vedere, per esempio utilizzando il "reciproco" del teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

$$-\Delta u_{n_k} + \bar{a}\, u_{n_k} = \underbrace{\bar{t}\, u_{n_k} + f(x,u_{n_k}) + h_{n_k}}$$

$$R_{\bar{a}}(u_{n_k}) = \bar{h}_{n_k} \longrightarrow \text{convergente in } H^{-1}$$

$$\longrightarrow \bar{t}\,\bar{u} + f(x,\bar{u})$$

$$\Rightarrow u_{n_k} = R_{\bar{a}}^{-1}(\bar{h}_{n_k}) \text{ converge in } H_0^1(\Omega). \quad \square$$