LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA (u densità)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}_x(u\vec{F}) = 0 \quad \text{(sistema chiuso)}}$$

$\vec{F}$ campo di velocità

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(u\vec{F}) = f(t,x)}$$

(in presenza di una sorgente) di cui f rappresenta una densità

$$\frac{d}{dt} m(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx$$

EQUAZIONE DEL CALORE (dentro un corpo rigido)

$e(x,t)$ = energia interna per unità di massa

$\rho(x,t)$ = densità del corpo (costante in spazio e tempo) $\equiv 1$

$\theta(x,t)$ = temperatura, proporzionale all'energia:

$e = c\theta$ $\quad$ c = calore specifico

LEGGE DI FOURIER: il flusso termico è proporzionale al gradiente della temperatura:

$$\boxed{\vec{q} = -k\nabla\theta}$$

k = coefficiente di conduttività termica

Variazione dell'energia totale nel volume Ω

derivata sotto $\int$ $\quad$ flusso termico $\quad$ teorema della divergenza

$$\frac{d}{dt}\int_D e(t,x)\underbrace{\rho(t,x)}_{\overset{1}{\parallel}}\,dx = \int_D \frac{\partial e}{\partial t}\rho\,dx = -\int_{\partial D} \vec{q}\cdot\vec{\nu}_{ext}\,d\sigma = -\int_D \mathrm{div}(\vec{q})$$

In assenza di sorgenti di calore, se la densità ρ è costante

$$\frac{\partial e}{\partial t}\rho = -\mathrm{div}\,\vec{q}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}\rho = -\operatorname{div}\vec{q} + f(t,x) \leftarrow$$ sorgente di calore (distribuzione spaziale della)

Laplaciano

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \frac{k}{c\rho}\operatorname{div}(\nabla\theta) = \frac{k}{c\rho}\Delta\theta = \frac{k}{c\rho}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}$$ equazione del calore

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial t} = d\,\Delta\theta} \qquad d>0$$

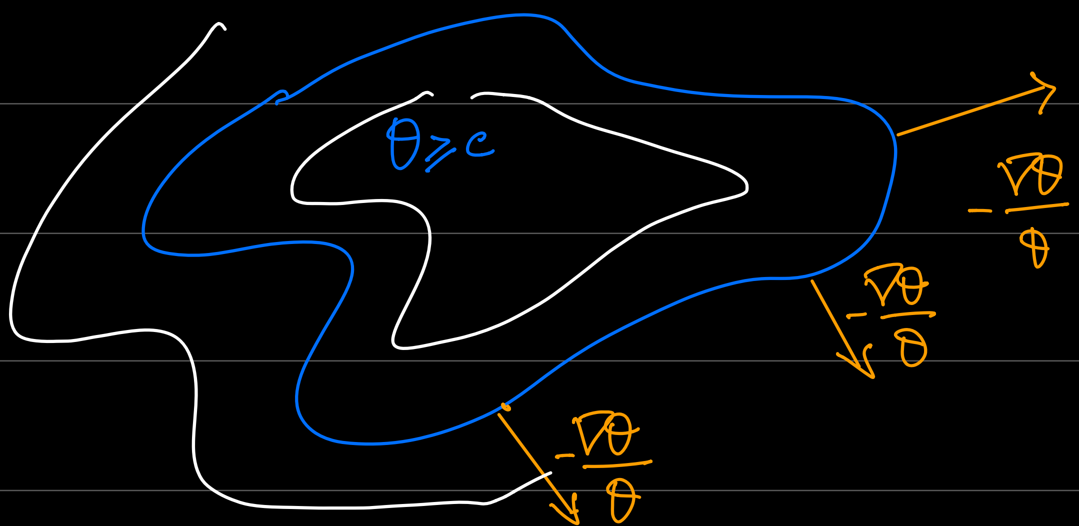
In presenza di una fonte di calore esterna

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\Delta\theta + \frac{1}{c}f} \leftarrow$$ immissione di calore

OSSERVAZIONE: possiamo interpretare l'equazione della diffusione come una legge di conservazione lineare

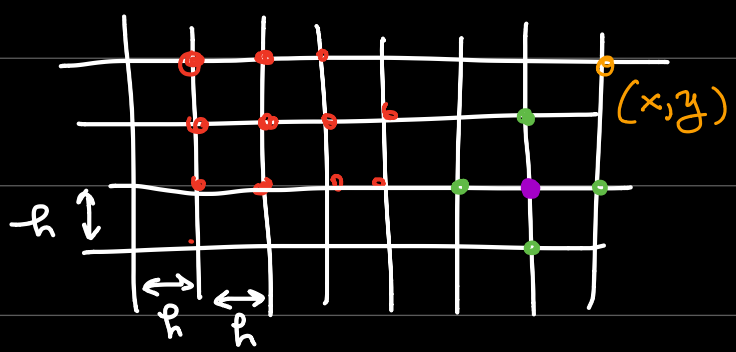
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\theta\vec{F}) = 0$$

dove il campo di velocità $\vec{F} = -d\frac{\nabla\theta}{\theta} = -d\nabla\log(\theta)$

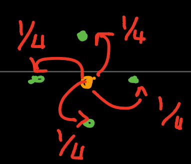


LA PASSEGGIATA ALEATORIA

Prendiamo un reticolo bidimensionale R di passo h



Nei siti del reticolo è distribuita una popolazione. Sia $u(t,x,y)$ la densità (il numero di individui) della popolazione al tempo t nel sito $(x,y$ del reticolo. Supponiamo che dopo un tempo Δt, vi sia una probabilità $\frac{1}{4}$ che un elemento si sia spostato in uno dei 4 siti vicini:



Al tempo $t+\Delta t$ avrò che

$$u(t+\Delta t, x,y) = \frac{1}{4}\Big[u(t,x+h,y) + u(t,x-h,y) + u(t,x,y+h) + u(t,x,y-h)\Big]$$

Di conseguenza,

$$\frac{u(t+\Delta t,x,y) - u(t,x,y)}{\Delta t} = \frac{1}{4}\frac{h^2}{\Delta t}\Big[\frac{u(t,x+h,y)+u(t,x-h,y)-2u(t,x,y)}{h^2} + \frac{u(t,x,y+h)+u(t,x,y-h)-2u(t,x,y)}{h^2}\Big]$$

Ora, immaginiamo che $\boxed{\Delta t \to 0, \quad h = \Delta x \to 0}$, con $\boxed{\dfrac{h^2}{\Delta t} \to k}$ e supponiamo che u sia la restrizione al reticolo R di una funzione di classe C^2: abbiamo

- $$\frac{u(t+\Delta t, x, y) - u(t,x,y)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y)$$

- $$\frac{u(t, x+h, y) + u(t, x-h, y) - 2u(t,x,y)}{h^2} = \frac{\left[u(t,x+h,y) - u(t,x,y) + u(t,x-h,y) - u(t,x,y)\right]}{h^2}$$

$$\overset{\text{Taylor al 2° ordine}}{=} \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cancel{h} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}(-h)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2\right]}{h^2} + \frac{o(h^2)}{h^2} \xrightarrow{h \to 0} \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y)}$$

Quindi, l'equazione per la densità della popolazione è

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0}$$

Si tratta dell'equazione del calore che abbiamo già incontrato. È un'equazione alle derivate parziali del second'ordine il cui simbolo è $\tau - k|\xi|^2$. Si tratta di un'equazione parabolica.

Varianti: (a) oltre al fenomeno di diffusione vi sono nascite e morti. Siano ν e μ rispettivamente i tassi di mortalità e natalità per unità di tempo e popolazione. Inoltre, non tutti gli elementi della popolazione sono inclini allo spostamento: una porzione di questi, s, rimane ferma nel modo:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = (\nu - \mu + s)\, u = mu}$$

Notiamo che, attraverso la trasformazione $u(t,x) = e^{mt} v(t,x)$ ci riconduciamo all'equazione del calore per $v = e^{-mt} u$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -mue^{-mt} + \frac{\partial u}{\partial t} e^{-mt} = \cancel{-mue^{-mt}} + (k\Delta u + \cancel{mu)e^{-mt}} = ke^{-mt}$$

$$= k\Delta v$$

Se vogliamo stimare la crescita nel tempo della popolazione complessiva, calcoleremo, tenendo presente che u è una densità,

$$N(t) = \int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\,dx$$

$$\frac{d}{dt} N(t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx}_{\uparrow} = \int_{\mathbb{R}^2} (k\, \overbrace{\mathrm{div}(\nabla u)}^{\Delta u} + mu)\, dx =$$

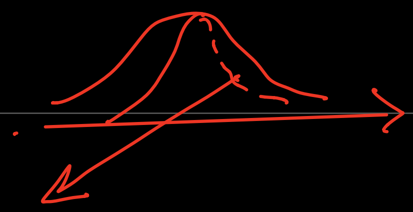
derivazione sotto segno di integrale

$\downarrow$ teorema della divergenza in B_R

$$= k \lim_{R\to+\infty} \int_{\partial B_R} \underbrace{\nabla u \cdot \nu_{ext}\, d\sigma}_{=0} + m\, N(t) = m\, N(t)$$

se supponiamo che $\boxed{\lim_{x\to+\infty} |x|\, |\nabla u(x)| = 0}$

$$N'(t) = m\, N(t)$$



$$N(t) = N(t_0)\, e^{mt}$$

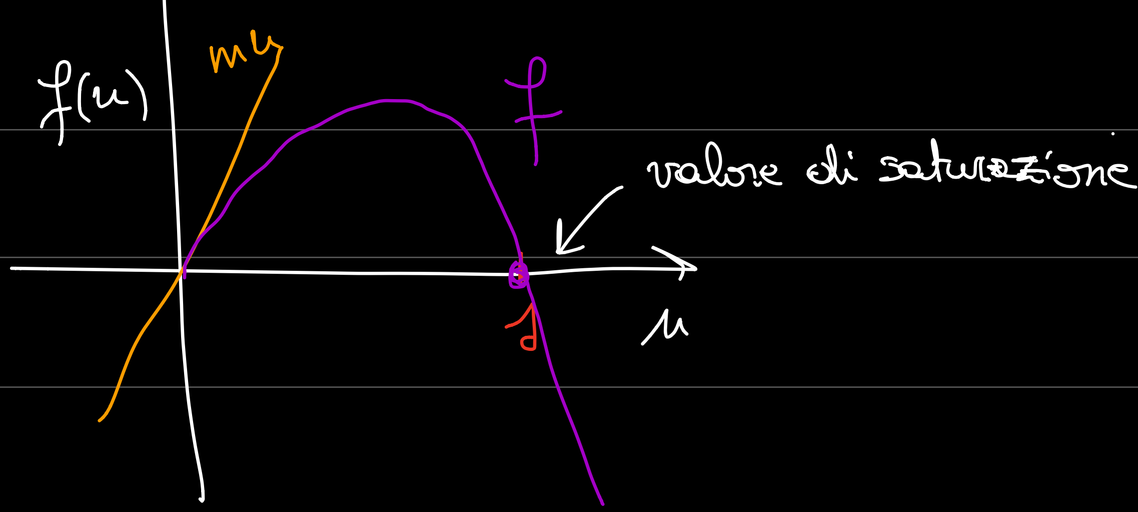
La popolazione complessiva aumenta (se $m>0$) (o diminuisce se $m<0$) progressivamente nel tempo come e^{mt}. Tempo di raddoppio: $N(\tau) = 2N(0) \iff e^{m\tau} = 2 \iff \tau = \frac{\log 2}{m}$

(b) Se le potenzialità di crescita non sono illimitate (per esempio per la limitatezza delle risorse disponibili), allora intervengono fattori non lineari. Un modello largamente utilizzato in ecologia é quello logistico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = m u \left(1 - \frac{u}{s}\right) = f(u)$$

valore di saturazione

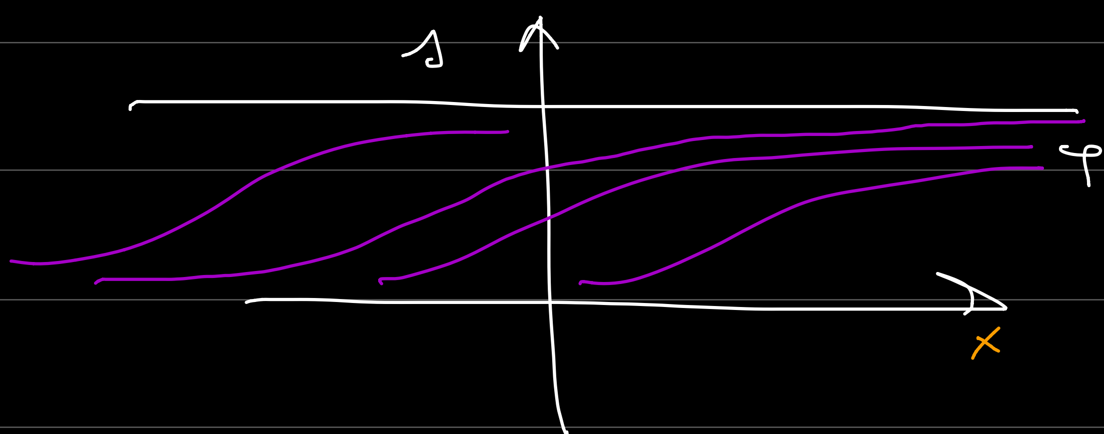
dove s rappresenta il valore di saturazione, oltre al quale la popolazione non può più crescere:



(FKPP)

Modello Fisher, Kolmogorov-Petroskii-Piscounov.

Nei modelli non lineari ci sono soluzioni particolari, le onde viaggianti, che sono utilissime per descrivere i fenomeni di invasione territoriale:

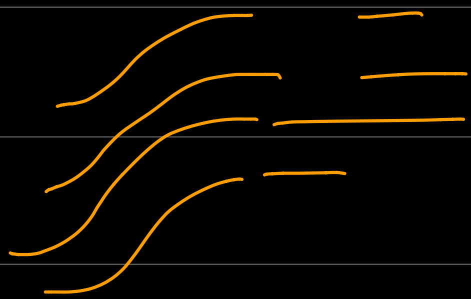


$\boxed{u(t,x) = \varphi(x - ct)}$ c è la velocità di propagazione dell'onda.

L'equazione per φ è non lineare del secondo ordine:

$$\begin{cases} \boxed{-c\varphi' - k\varphi'' = f(\varphi)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1\end{cases}$$

$\varphi=\varphi(x)$



(c) Supponiamo che la probabilità di spostarsi a destra sia leggermente superiore $\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$ di quella di spostarsi a sinistra $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$. All'equazione aggiungiamo un termine

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left[\frac{u(t,x+h,y)-u(t,x-h,y)}{h}\right]}$$

Se supponiamo che $\frac{h\varepsilon}{\Delta t}\to\frac{b}{2}$ otteniamo un termine aggiuntivo del tipo $b\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$. In definitiva,

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u}_{\text{+ diffusione}}+\vec{b}\cdot\nabla u=0}$$

$\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.

Equazione di diffusione-trasporto.