Foglio esercizi, n. 2

$$S_1 : \quad x^2 + y^2 z^2 = 1$$

$$S_2 : \quad x^2 + y^4 + z^6 = 1$$

- S_1, S_2 sup. regolari
- S_1 non compatta, S_2 compatta.

S_1: $F(x,y,z) = x^2 + y^2 z^2$

1 è valore regolare $\Rightarrow S_1 = F^{-1}(1)$ sup reg.

$$\begin{cases} F_x = 2x = 0 \\ F_y = 2yz^2 = 0 \\ F_z = 2zy^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ yz = 0 \end{matrix}$$

punti critici: $\{ (0,y,0), (0,0,z) \mid y,z \in \mathbb{R} \}$

valori critici: $F(0,y,0) = 0$
$F(0,0,z) = 0$

$\Rightarrow$ 0 è l'unico valore critico

S_2: stessa cosa: $F_x = 2x, \ldots$
0 unico valore critico

Compattezza $\iff$ chiuso + limitato (2)

S_1, S_2 chiuse perché controimmagini di $\{1\}$ chiuso in $\mathbb{R}$

S_2 limitata: $x^2 + y^4 + z^6 = 1$

$$\Rightarrow \quad 0 \le x^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le x \le 1$$
$$0 \le y^4 \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le y \le 1$$
$$0 \le z^6 \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le z \le 1$$

quindi S_2 limitata.

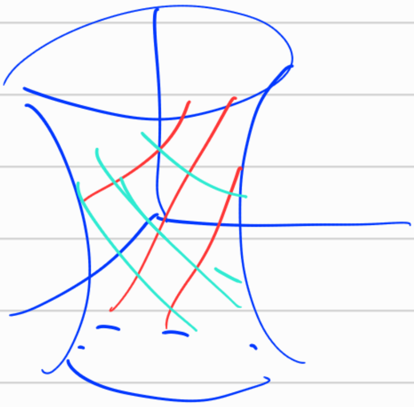
S_1 non limitata: $x^2 + y^2 z^2 = 1$

per esempio S_1 contiene i punti del tipo
$$(0, t, 1/t) \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

non limitato perché per $t \to \infty$ ci sono punti su S_1 che tendono all'∞

Esercizio 1 del foglio

$S: \ x^2+y^2-z^2=1$



ℓ_t di eq. cartesiane date

per vedere $\ell_t \subseteq S$ basta mettere ℓ_t in forma param e sostituire dentro l'eq di S

ℓ_t in forma parametrica $\quad \ell_t : P + s\,\underline{v}$

$\underline{v} = (\cos 2t, \ \operatorname{sen} 2t, \ 1)$

= prodotto vettoriale dei vettori $\perp$ ai piani che danno la retta

$P = (\operatorname{sen} 2t, \ -\cos 2t, \ 0)$

$$\ell_t : \begin{cases} x = \operatorname{sen} 2t + s \cdot \cos 2t \\ y = -\cos 2t + s \cdot \operatorname{sen} 2t \\ z = s \end{cases}$$

Basta sostituire nell' eq di S

punto 2: $S = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \ell_t$

il punto 1 dice $\bigcup \ell_t \subseteq S$

a. $S \subseteq \bigcup \ell_t$

b. ogni pto sta su una sola retta

a. sia $(x_0, y_0, z_0) \in S$

$$x_0^2 - z_0^2 = 1 - y_0^2$$

$$(x_0 - z_0)(x_0 + z_0) = (1 - y_0)(1 + y_0)$$

$$\frac{x_0 - z_0}{1 - y_0} = \frac{1 + y_0}{x_0 + z_0} = \lambda = \tan t_0 = \frac{\sin t_0}{\cos t_0}$$

è facile vedere che $(x_0, y_0, z_0) \in \ell_{t_0}$

mancano i casi in cui un fattore (e quindi 2) è nullo $\longrightarrow t_0 = 0, \pi/2$

si discute i vari casi.

b. unicità: basta far vedere che le rette sono disgiunte a 2 a 2

per esempio, scrivere il sistema 4 eq, 3 incognite di rette diverse e vedere che è incompat.

punto 3 : param. di S

$$\underline{X}(t,s): \begin{cases} x = \sin 2t + s\cos 2t \\ y = -\cos 2t + s\sin 2t \\ z = s \end{cases}$$

per iniettiva: $(t,s) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}$

$\underline{X}$ è C^∞, rk $d\underline{X} = 2 \to$ calcolo

si calcola $\underline{X}_t$, $\underline{X}_s$, $\underline{X}_t \wedge \underline{X}_s$

$$\underline{X}_t \wedge \underline{X}_s = \big(2(\sin 2t + s\cos 2t), \; 2(-\cos 2t + s\sin 2t), \; -2s \big)$$

$s \neq 0 \to$ OK

$s = 0 \to \underline{X}_t \wedge \underline{X}_s = (2\sin 2t, -2\cos 2t, 0)$

$\neq 0$ perché sin, cos non sono nulli contemporaneamente.

S è sup. regolare perché 1 è valore regolare di $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

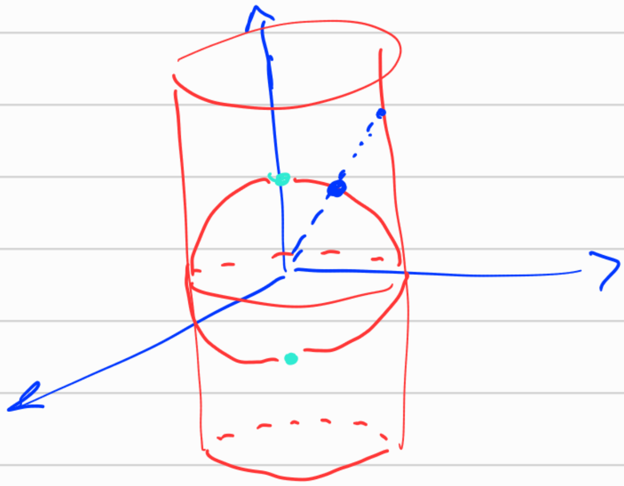
$\blacksquare$

Esercizio 3 diffeomorfismo fra

6

$$S = \text{cilindro} = \{x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

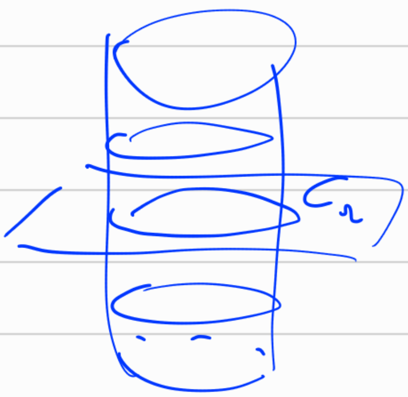
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

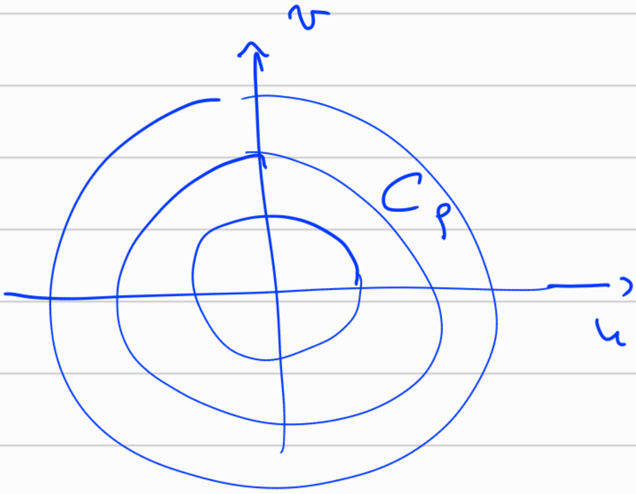


$$f: S \longrightarrow S^2$$

$$(x,y,z) \longrightarrow \frac{(x,y,z)}{\|\quad\|}$$

poi proiez. stereo.





$$C_r \longrightarrow C_\rho$$

raggio 1
sul piano $z = r$

raggio ρ

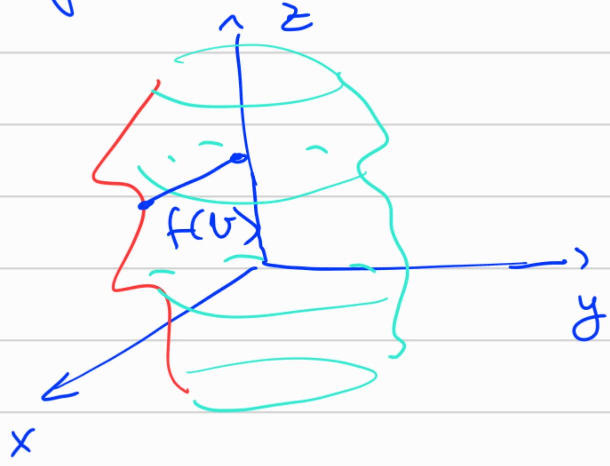
$$r = \log \rho \qquad \rho = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$f(u,v) = \left(\frac{u}{\rho}, \frac{v}{\rho}, \log \rho\right)$$

$$g(x,y,z) = (x e^z, y e^z)$$

Esempi

- Superfici di rotazione



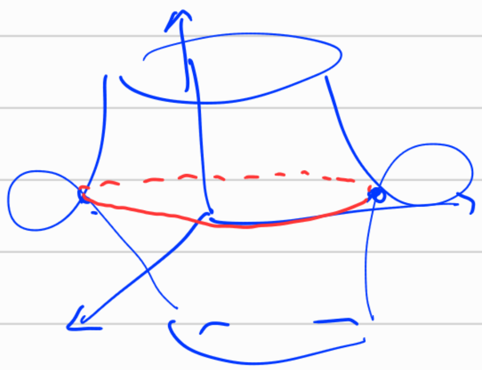
C = curva nel piano (x,z) ruotiamo intorno all'asse z

C regolare : $C: \begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}$

tale che $f(v) > 0 \longrightarrow$ non incontra l'asse z

$\alpha(v) = (f(v), g(v))$

<u>iniettiva</u>



tutti pti singolari

ruotando, ogni pto di C descrive una circonferenza di centro $(0,0,g(v))$ di raggio $f(v)$

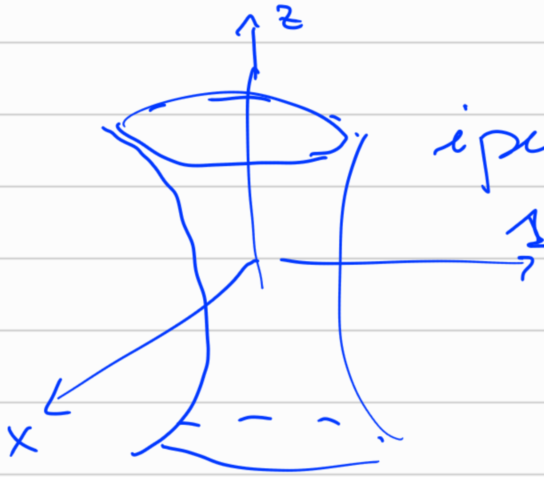
Quindi la sup. è data da:

$$\underline{X}(u,v): \begin{cases} x = f(v)\cos u \\ y = f(v)\,\text{sen}\, u \\ z = g(v) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u \in (0, 2\pi) \\ a < v < b \end{array}$$

linee cordinate: curve su S date da
$u =$ costante, $v =$ costante

$v =$ costante $\longrightarrow$ circonferenza orizzontale "paralleli"

$u =$ costante $\longrightarrow$ rotazione della curva C "meridiani"



iperboloide 1 falda

$x^2 - z^2 = 1 \longrightarrow$ parametrizzare

$$\begin{cases} x = \cosh v \\ z = \sinh v \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \cosh v \cdot \cos u \\ y = \cosh v \cdot \text{sen}\, u \\ z = \sinh v \end{cases}$$

param è regolare?

1. funzioni C^∞ → OK

3.
$$dx = \begin{bmatrix} -f(v)\sin u & f'(v)\cos u \\ f(v)\cos u & f'(v)\sin u \\ 0 & g'(v) \end{bmatrix}$$

i minori sono:

$$-f(v)f'(v), \quad -f(v)g'(v)\sin u,$$
$$f(v)g'(v)\cos u$$

poiché $f(v) > 0$

$$\longrightarrow \quad f'(v) \quad g'(v)\sin u \quad -g'(v)\cos u$$

→ $f'(v) \neq 0$ OK

$f'(v) = 0 \Longrightarrow g'(v) \neq 0$ perché C è regol.

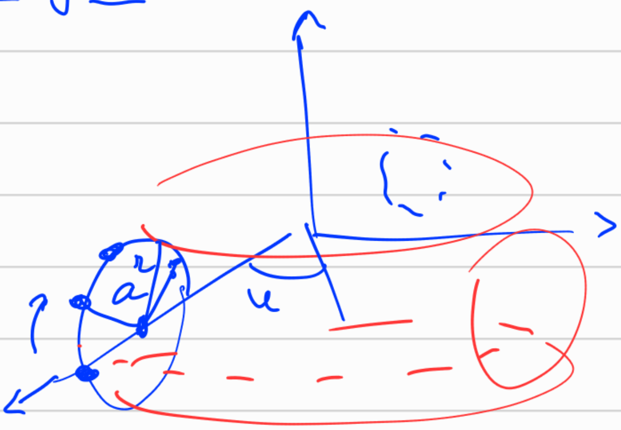
⟹ uno dei due det è $\neq 0$ perché sen e cos non si annullano contemp.

Inversa è continua: leggere le dispense

per coprire S ci vogliono 2 param.

quella data, una seconda con dominio $(-\pi, \pi)$

Esempio: toro



ruotiamo una circonf. di centro $(a, 0, 0)$ raggio $0 < r < a$

$$C : \begin{cases} x = a + r\cos v \\ z = r \sin v \end{cases}$$

$$T : \begin{cases} x = (a + r\cos v) \cdot \cos u \\ y = (a + r\cos v) \cdot \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$$

meridiani: $u =$ costante $=$ circonf "verticali"

paralleli: $v =$ costante $=$ circonf. orizzontali interne oppure esterne.

quante param servono per coprire il toro?

il dominio $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ copre il toro tranne 1 meridiano e 1 parall.

servono 4 param.

(11)

- Leggere capitolo 3.4
  Esempi di superfici regolari
- Leggere capitolo 3.5
  Esercizi dal do Carmo