Condizione di Palais-Smale

(f_3) superlinearità A-R $\quad f(x,s)s \geq \beta F(x,s) - C \quad$ con $\beta > 2$

(f_2) condizione di crescita subcritica

$$|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^p) \qquad 1 < p < \frac{N+2}{N-2} \quad N \geq 3$$

$$p < +\infty \quad N = 2$$

OSSERVAZIONE: Dimostrazione alternativa della Proposizione 2

(se $(u_n)_n$ succ. di $(PS)_c$ è limitata $\Rightarrow$ è precompatta)

$(u_n)_k$

- $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$ in $H_0^1(\Omega)$
- $u_{n_k} \to \bar{u}$ in $L^q(\Omega)$ con $1 \leq q < \begin{cases} +\infty & N = 2 \\ \frac{2N}{N-2} & N \geq 3 \end{cases}$
- $u_{n_k} \to \bar{u} \in L^{p+1}$ $\quad 1 < p+1 < 2^*$

$\Rightarrow f(x, u_{n_k}) \to f(x, \bar{u})$ in $L^{\frac{p+1}{p}}$

(va provato sempre col solito "reciproco" del teorema di convergenza dominata. Voglio dimostrare che la convergenza è forte in $H_0^1(\Omega)$

$$0 \leq (u_{n_k} - \bar{u}, u_{n_k} - \bar{u})_a = (u_{n_k}, u_{n_k} - \bar{u})_a - (\bar{u}, u_{n_k} - \bar{u})$$

$\to 0$ per conv. debole in $H_0^1(\Omega)$

$\|u_{n_k}\| \to 0$

$$= \int_\Omega \bar{f} u_{n_k}(u_{n_k} - \bar{u}) + f(x, u_{n_k})(u_{n_k} - \bar{u}) + \rho_{n_k}[u_{n_k} - \bar{u}]$$

$$\lesssim \bar{f} \|u_{n_k}\|_{(p+1)'} \|u_{n_k} - \bar{u}\|_{p+1} + \|f(x, u_{n_k})\|_{(p+1)'} \|u_{n_k} - \bar{u}\|_{p+1}$$

$$+ \|\rho_{n_k}\|_{H^{-1}} \|u_{n_k} - \bar{u}\|_{H^1_0(\Omega)} \longrightarrow 0$$

$(p+1)' \leq 2^*$ $\qquad (p+1)' = \frac{p+1}{p}$

In definitive, $\|u_{n_k} - \bar{u}\|_{H^1_0(\Omega)} \to 0 \quad k \to +\infty$

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x) u = f(x,u) \\ u \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

$a \in L^s(\Omega)$ $\quad s > 1$ se $N = 2$ $\quad \frac{N}{2}$ se $N \geq 3$ + ipotesi viste ieri.

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{a u^2}{2} - F(x, u(x))$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{F(x,s)}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{2s} = 0$$

$F(x,s) \geq d|s|^\beta - C$ $\qquad$ con $\beta > 2$ quando $|s| \to +\infty$

$$Q_a(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + a(x) u^2$$

TEOREMA 1: Supponiamo che $Q_{\bar{a}}(u) > 0$ su $H_0^1(\Omega)$. Allora E ammette un pto critico a livello positivo.

OSSERVAZIONE: $u \equiv 0$ è soluzione del problema, ed è un minimo locale stretto per E.

Dimostrazione

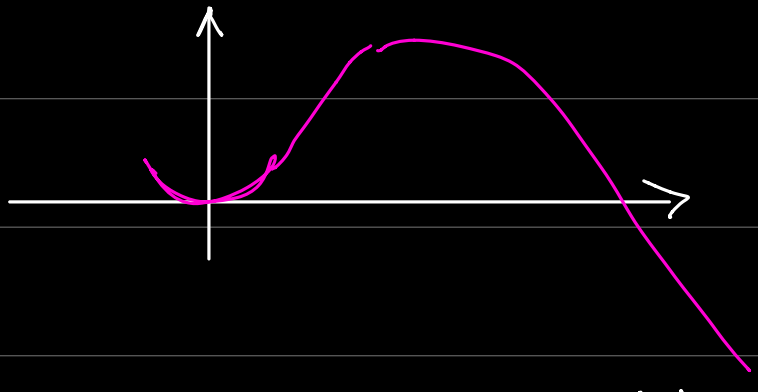
i) $E(0) = 0$

ii) $\forall u_1 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, $\lambda > 0$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda u_1) \leq \lim_{\lambda \to +\infty} \int_\Omega \lambda^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_1|^2 + \frac{a(x)}{2} u_1^2 \right) - d\lambda^\beta |u_1|^\beta + C$$

$d > 0$

$\beta > 1$



$= -\infty$, comunque sia stata fissata u_1.

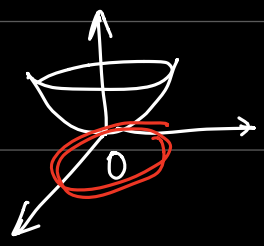
OSSERVAZIONE: u_1 è fissato, $u_1 \not\equiv 0$. Ma la stessa proprietà vale se u_1 varia in sottospazio di dimensione finita di $H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{\substack{\|u\| \to +\infty \\ u \in F \subseteq H_0^1(\Omega) \\ \dim(F) < +\infty}} E(u) = -\infty$$

Dato F, $\forall M > 0$ $\exists R > 0$: $\forall u \in F$, $\|u\| \geq R$

$E(u) < -M$.

iii)



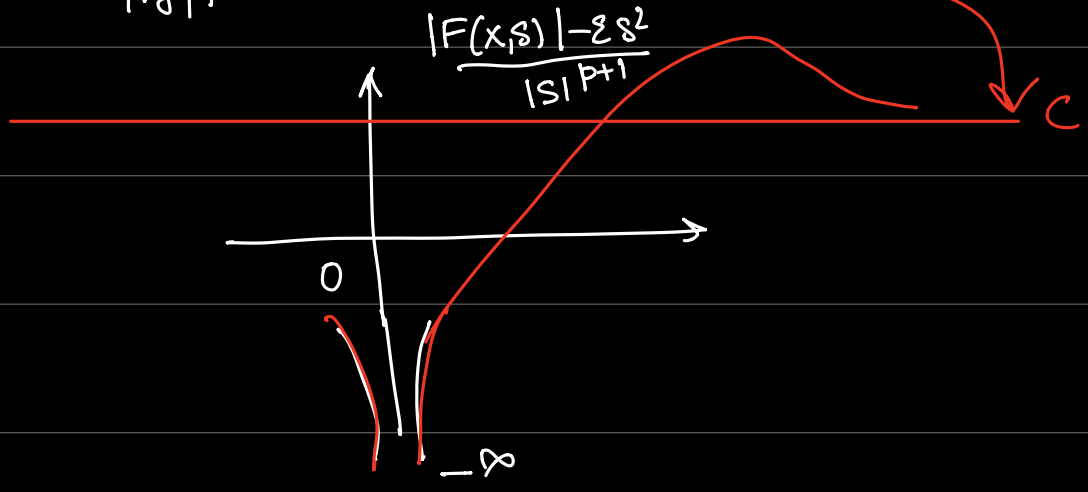
Lemma: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$ $\quad |F(x,s)| \leq \varepsilon s^2 + C_\varepsilon |s|^{p+1}$

$\forall x, \forall s$.

Mettiamo insieme due informazioni:

$$\lim_{s \to 0} \frac{F(x,s)}{s^2} = 0 \qquad |F(x,s)| \leq C\left(1 + |s|^{p+1}\right)$$

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{|F(x,s)| - \varepsilon s^2}{|s|^{p+1}} =: C_\varepsilon^1 < +\infty$$



Dato per buono il Lemma, lo usiamo per minorare il nostro funzionale

uso le immersioni di Sobolev

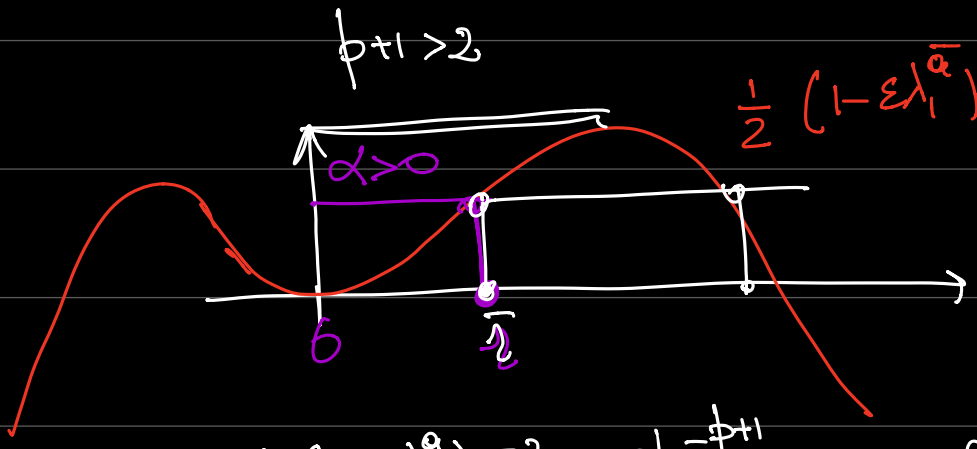
$$E(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_\varepsilon \|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \varepsilon \underbrace{\lambda_1^{-1}}_{\uparrow \frac{1}{2}} \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - C'_\varepsilon \|u\|^{p+1}_{H^1_0(\Omega)}$$

disuguaglianza di Poincaré

Avrò preso ε sufficientemente piccolo perché $\varepsilon\lambda_1^a < 1$

$$\geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon\lambda_1^{\bar a})\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C_\varepsilon^1 \|u\|^{p+1}_{H_0^1(\Omega)}$$



$\frac{1}{2}(1-\varepsilon\lambda_1^{\bar a})\bar s^2 - C_\varepsilon^1 \bar s^{p+1} = \alpha > 0$ ha una unica sol. positiva piccola

Quindi abbiamo trovato un $\bar r > 0$: $\inf_{\|u\|=\bar r} E(u) \geq \alpha > 0$

TEOREMA 2: Caso in cui la forma quadratica

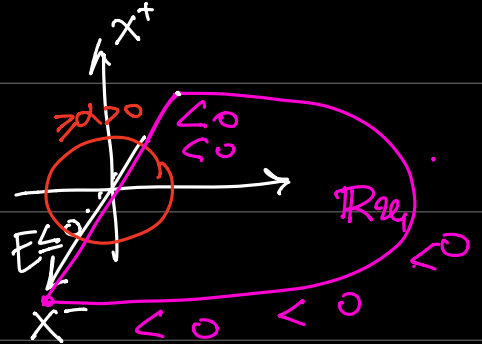
$$Q_a(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + a(x)u^2$$

non è definita positiva. In questo caso, supponiamo che

$$F(x,s) \geq 0 \qquad \forall x, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Tesi: E ha almeno un punto critico a livello strettamente positivo.

Dim:

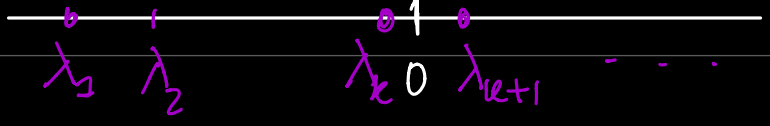


Trovare

Pb: $X^- \oplus X^+ = H_0^1(\Omega)$ in modo che siano verificate le ipotesi del linking.

Consideriamo lo spettro dell'operatore l'operatore

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$



Abbiamo una successione di autovalori definitivamente positivi

$$X^- = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \quad \text{con} \quad \lambda_k \le 0 < \lambda_{k+1}$$

$$X^+ = \overline{\text{span}\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \dots\}}^{H_0^1(\Omega)}$$

X^- e X^+ sono ortogonali in L^2 e anche in $H_0^1(\Omega)$ rispetto al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_{\bar a}$ $(\bar a = a + \bar t)$ con $\bar t > -\lambda_1$

$$H_0^1(\Omega) = X^- \oplus X^+$$

i) $E(u) \le 0 \quad \forall x \in X^-$

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{a}{2}u^2 - F(x,u) \le \frac{1}{2} Q_a(u)$$

ii) $\forall u_1 \in X^+$ fissata, $F = X^- \oplus \mathbb{R}u_1$, abbiamo

$$\lim E(u) = -\infty$$

$\|u\| \to +\infty$
$u \in F$

iii) Su X^+ $\exists\, \bar{r} > 0 : \exists \alpha > 0 : \inf_{\substack{u \in X^+ \\ \|u\| = \bar{r}}} E(u) \geq \alpha > 0$

su E^+ la forma quadratica Q_0 é definita positiva e questo ci permette di applicare le stesse considerazioni che abbiamo fatto nel teorema precedente

$\exists$ pto critico a livello $c \geq \alpha > 0$.

OSSERVAZIONE: 0 é sempre punto critico di E ma ha indici di Morse diversi nei due casi (nel primo $= 0$, nel secondo > 0). Si può dimostrare che il pto critico a livello positivo ha indice di Morse "=" 1 nel passo montano
"=" $k+1$ " caso del Linking

(uguaglianza davvero se $0 \notin$ spettro $(-\Delta + a)$).

ESEMPIO: Onde stazionarie per l'equazione di Schrödinger nonlineare

$$\text{(NSE)} \qquad i\hbar \psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - g(|\psi|^2)\psi$$

$\hbar$ costante di Planck ridotto
m massa
V é il potenziale esterno
$g(|\psi|^2)\psi$ rappresenta delle autointerazioni della funzione

dove $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$

Cerchiamo le onde stazionarie: $\boxed{\psi(x,t) = e^{i\omega t} u(x)}$

dato un n° complesso $w = \rho e^{i\theta}$ (θ: argomento o fase, ρ: modulo), $\omega \in \mathbb{R}$ assegnato

$$-\hbar\omega u e^{i\omega t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x u\, e^{i\omega t} + V(x) u e^{i\omega t} - g(u^2) u e^{i\omega t}$$

($-\hbar\omega u e^{i\omega t} = i\hbar\psi_t$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + (V(x) - \omega\hbar) u = g(u^2) u$$

$$-\Delta u + a(x) u = f(u)$$

$$a(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - \omega\hbar\right)$$

$$f(u) = \frac{2m}{\hbar^2} g(u^2) u$$

$V \in L^{N/2}(\Omega) + L^s(\Omega)$ $s > 1$

Esempio: V potenziale gravitazionale $V(x) = \frac{M_0}{|x|}$

se Ω limitato: $N = 2$, $N \geq 3$ } sì

fisicamente rilevante

c'è un caso rilevante: $g(s) = s$ — Eq. di Schrödinger cubica

$g(u^2) u = u^3 = f(u)$

$|f(s)| \leq c(1 + |s|^p)$ con $p < \frac{N+2}{N-2}$

in dim $N = 2$ O.K. In dimensione maggiore $N \geq 3$

$3 < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow N = 3$.

$N=4$ è critico

$N \geq 5$ è supercritico.

Possiamo applicare i nostri teoremi su ogni Ω di misura finita, purché siano verificate le nostre ipotesi

(se $f(u) = u^3$ sono sempre verificate)

Problema: estendere quanto possibile la teoria al caso $\Omega = \mathbb{R}^N$

almeno per potenziali di rilevanza fisica.