EQUAZIONI DI SCHRÖDINGER NON LINEARE

$\psi(t,x) = e^{i\omega t} u(x)$ onde stazionarie (standing waves)

$$-\Delta u + a(x)u = f(u)$$

$\longrightarrow$ coefficiente $a(x) = \dfrac{V(x) - \hbar\omega}{\hbar^2}$

V potenziale della forza esterna $V(x) - \hbar\omega$ è il potenziale effettivo.

interesse verso i potenziali tipo cubico $\rightarrow f(u) = u^3$

$g(s) = s$.

Ω misura finita. Esaminiamo il caso $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Cosa bisogna cambiare in prima battuta

Ambiente naturale $H^1(\mathbb{R}^N)$ munito della norma $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2\right)^{1/2}$.

$a \equiv 1$

Ipotesi di crescita $|f(x,s)| \le c(1 + |s|^p)$

$$|f(x,s)| \le a\,(|s| + |s|^p)$$

$$\Rightarrow \quad |F(x,s)| \le c\,(|s|^2 + |s|^{p+1})$$

$$F(x,u(x)) = F(u)$$

che garantisce $F_* : L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \qquad \begin{matrix} N \geq 3 \\ N=2 \end{matrix} \quad L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^s(\mathbb{R}^N)$$

Ipotesi di Ambrosetti-Rabinowitz

$$f(x,s)s \geq \beta F(x,s) - h(x) \qquad \text{che } L^1(\mathbb{R}^N)$$

PROBLEMA PIÙ DIFFICILE: mancanza di compattezza delle immersioni.

Sono possibili diverse strade: "trapping potentials"

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$$

Ambienteremo l'analisi in un sottospazio di $H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$H^1_V = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) u^2 < +\infty \right\}$$

Norma: $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 + V^+(x) u^2 \right)^{1/2} = \|u\|_V$

è associata al prodotto scalare naturale.

TEOREMA: Se $\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$, allora

$H^1_V \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ con immersione compatta

$\forall \quad q>1 \qquad N=2$

$q \in [2, \frac{2N}{N-2}) \qquad N \geq 3$

Dimostrazione: Cerchiamo di capire qual è l'effetto del potenziale. Supponiamo $V \equiv 0$.

Perché l'immersione di $H^1(\mathbb{R}^N)$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$ non è compatta ($q \in [2, 2^*)$)?

Dovremmo dimostrare che la palla unitaria di $H^1(\mathbb{R}^N)$ è precompatta in $L^q(\mathbb{R}^N)$.

Azione del gruppo non compatto delle traslazioni

$h \in \mathbb{R}^N \qquad (\tau_h u)(x) = u(x+h)$

τ_h sono delle isometrie di $H^1(\mathbb{R}^N)$

$u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad h_n \in \mathbb{R}^N : |h_n| \to +\infty \quad \tau_{h_n} u$

$\| \tau_{h_n} u \|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \| u \|_{H^1(\mathbb{R}^N)} (\leq 1) \ \forall n. \ , \ \| \tau_{h_n} u \|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \| u \|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$

D'altra parte $\tau_{h_n} u \to 0$ q.o. (impedisce conv. forte in $L^q(\mathbb{R}^N)$).

$\to 0$ debolmente

OSSERVAZIONE: fissato $R>0$ $\|\varepsilon_{h_n} u\|_{L^q(B_R)} \to 0$

e se $\varepsilon_{h_n} u \to \bar{w}$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$ il limite dovrebbe essere nullo.

Da qui capiamo il ruolo del potenziale V: rompere l'invarianza per traslazioni.

Vediamo la compattezza dell'immersione di $H^1_V(\mathbb{R}^N)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$

Prendiamo una successione $u_n \in H^1_V$, $\|u_n\|_V \leq 1$.

Possiamo estrarre una sottosuccessione che

- converge q.o. in $\mathbb{R}^N$
- converge fortemente in $L^2(B_R)$ $\forall R>0$.

Usiamo la compattezza di $H^1(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$ (Rellich-Kondrachov) e poi $R_k \to +\infty$ e usiamo un argomento diagonale.

$R_1 = 1$ $\to$ estraiamo (da (u_n)) una prima sottosuccessione $(u^1_n)_n$ che converge fortemente in $L^2(B_{R_1})$

$R_2 \geq 2$ $\longrightarrow$ estraiamo da (u_n^1) una ulteriore sottosucc. $(u_n^2)_n$ che converge fort. in $L^2(B_{R_2})$

$\vdots$

R_k $\longrightarrow$ estraiamo da (u_n^k) una k-esima sottosuccessione $(u_n^k)_n$ che converge fort. in $L^2(B_{R_k})$

$(u_n^k)_n$ converge anche in $L^2(B_{R_j})$ $\forall j=1,\dots,k$

PROCEDIMENTO DIAGONALE

k \ n				
$k=1$	u_1^1	u_2^1	$\dots$	u_n^1 $\dots$
$k=2$	u_1^2	u_2^2	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
k	u_1^k	u_2^k	$\dots$	u_n^k

Considero la successione $(u_j^j)_{j\in\mathbb{N}}$. È una sottosuccessione di tutte le $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall k$. E quindi mantiene

ne le proprietà di convergenza delle $(u_n^k)_n$ in

$L^2(B_{R_j})$ $\forall j = 1, \dots, k$.

Questo argomento sta alla base della dimostrazione del teorema di Tichonoff sulla compattezza dei prodotti cartesiani (anche infiniti) di spazi topologici compatti.

Abbiamo quindi estratto questa sottosuccessione $(u_{n_k})_k$.

Vogliamo dimostrare che è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Dato $\varepsilon > 0$ $\exists R$: $V(x) \geq \frac{4}{\varepsilon}$ $\forall x$, $|x| > R$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^+ u^2 \leq 1 \quad \Rightarrow$$

$$\int_{B_R^C} u_{n_k}^2 = \int_{B_R^C} \frac{V(x) u_{n_k}^2}{V(x)} \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{B_R^C} V u_{n_k}^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

≤ 1

D'altra parte, sappiamo che (u_{n_k}) converge in $L^2(B_R)$

$\Rightarrow$ è di Cauchy e dunque $\exists \bar{k}$: $\forall h, k \geq \bar{k}$

$$\| u_{n_k} - u_{n_h} \|^2_{L^2(B_R)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_{n_k} - u_{n_h}\|^2_{L^2(B_R^c)} \le C\left(\|u_{n_k}\|^2_{L^2(B_R^c)} + \|u_{n_h}\|^2_{L^2(B_R^c)}\right)$$

$$\le C\,\frac{\varepsilon}{2}$$

Sommando i due $\Rightarrow$ è di Cauchy. -

Abbiamo dimostrato la compattezza delle immersioni in $L^2(\mathbb{R}^N)$

Con la disuguaglianza di interpolazione

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \le \|u\|^{\varepsilon}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\varepsilon}_{L^s(\mathbb{R}^N)}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-\varepsilon}{s} = \frac{1}{q}$$

applico la con $s > 0$ se $N = 2$, $s = \frac{2N}{N-2}$ se $N \ge 3$

estendiamo la compattezza fino all'esponente critico escluso.

La compattezza delle immersioni interviene

(a) nella teoria spettrale dell'operatore associato alla forma quadratica:

$$\begin{cases} -\Delta u + \cancel{u} + Vu = \lambda u \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

$\lambda_1 \le \lambda_2 < \dots \longrightarrow +\infty$ corrispondenti

ad autofunzioni $\varphi_1, \dots$ ortonormali in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e

in $H^1_V(\mathbb{R}^N)$

(b) verifica della condizione di $(P\text{-}S)_c$.

ESEMPIO: $V(x) = \kappa^2 |x|^2$ potenziale oscillatore armonico

quantistico.

Teoria dei gase di Bose-Einstein e della loro condensazione.

ORBITE PERIODICHE PER SISTEMI NEWTONIANI

POTENZIALI SINGOLARI ($V(t,x) \simeq \frac{1}{|x|^\alpha}$) DI TIPO

ATTRATTIVO (gravitazionale, ...)

$$ma = F$$

$x(t)$ posizione della particella al tempo t, $m > 0$

è la massa ($= 1$). $\dot{(\,)} = \frac{d}{dt}$

$$\ddot{x}(t) = F(t, x(t)) = \nabla_x V(t, x(t))$$

V è il potenziale della forza e $V \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$

(o centro attrattivo), $U(t+T,x) = U(t,x) \quad \forall t, \forall x \neq 0$

$T>0$ è il periodo.

Cerchiamo soluzioni del problema

$$\begin{cases} \ddot{x} = \nabla_x U(t,x) \\ x(t+T) = x(t) \qquad \forall t \end{cases}$$

Associamo al problema periodico i pti critici del funzionale

$$E(x) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 + U(t,x(t))\right] dt$$

sullo spazio

$$H^1_{T\text{-per}} = \{ x \in H^1([0,T];\mathbb{R}^N) : \; x(0) = x(T) \}$$

è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare di $H^1([0,T])$

$$(x,y)_{H^1_{T\text{-per}}} = \int_0^T (\dot{x}\cdot\dot{y} + x\cdot y)\, dt$$

oss 1: $N=1$, $H^1([0,T]) \hookrightarrow C^0([0,T])$ (teorema del rappresentante continuo)

$$H^1([0,T];\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,1/2}([0,T])$$

$$\forall s>t \quad |x(s)-x(t)| = \left| \int_t^s \dot{x}(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_t^s |\dot{x}(\tau)|\, d\tau \leq \sqrt{s-t} \left(\int_0^T |\dot{x}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x(s)-x(t)|}{\sqrt{s-t}} \leq \|x\|_{H^1([0,T])}$$

$$\|x\|_{L^\infty([0,T])} \leq \|x\|_{H^1([0,T])}$$

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = 2\,x(t)\cdot\dot{x}(t) \leq 2\|x\|_{L^2}\|\dot{x}\|_{L^2} \leq \|x\|^2_{H^1([0,T])}$$

$\uparrow$ $x \in C^1$

Integro

$$s>t \quad |x(s)|^2 - |x(t)|^2 \leq \|x\|^2_{H^1([0,T])}(s-t) \leq T$$

integro in dt e divido per T

$$|x(s)|^2 \leq \frac{1}{T}\|x\|_{L^2([0,T])} + T\|x\|^2_{H^1([0,T])}$$

$H^1([0,T]) \hookrightarrow L^\infty([0,T])$ tutto compatto

$[N=1]$.

$$H^1 = \mathbb{R}^N \oplus \tilde{H}$$

somme ortogonale in H^1

$$\tilde{H} = \left\{ w \in H^1 : \int_0^T w(t)\,dt = 0 \right\}$$

$x \in H^1 \quad x = \xi + w \quad$ dove $\quad \xi = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$

e $\quad w = x - \xi$

DISUGUAGLIANZA DI POINCARÉ WIRTINGER

$$\int_0^T |\dot{w}|^2 \geq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^T w^2 \qquad \forall\, w \in \tilde{H}$$

In questo modo, $\left(\int_0^T |\dot{u}|^2\right)^{1/2}$ è una norma equivalente su $\tilde{H}$.

Applicare il metodo di ortogonalizzazione di Hilbert-Schmidt (versione quozienti di Rayleigh) alla forma

$$\frac{\int_0^T |\dot{x}|^2 + |x|^2}{\int_0^T |x|^2}$$

$$-\ddot{x} + x = \lambda x$$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1 \equiv \text{cost} = \xi$

$\lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \varphi_2 = \xi\, e^{i\frac{2\pi}{T}t}$ (ha media nulla)

$\lambda_k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 k^2 \qquad \varphi_k = \xi\, e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$

$x(t) \neq 0 \quad \forall\, t$

$\Lambda = \{x \in H^1_{T\text{-per}} : x(t) \neq 0 \ \forall t \in [0,T]\}$ è un aperto di $H^1_{T\text{-per}}$, perché $H^1_{T\text{-per}} \hookrightarrow C^0$

$$E(u) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(t,x)$$

Pb: $E \in C^1(\Lambda)$

Proposizione: Supponiamo che $U(t,x)$ sia differenziabile in $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ per q.o. $t \in [0,T]$ e che $\nabla_x U(t,x)$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ soddisfi le ipotesi di Carathéodory. In più

$$\forall K \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ compatto}, \ \exists \Phi_K \in L^1([0,T]) \text{ t.c.}$$

$$\max_{x \in K} |\nabla_x U(t,x)| \leq \Phi_K(t)$$

Allora $E \in C^1(\Lambda)$,

Dimostrazione: (per esercizio)

$$\mathcal{U}(x) = \int_0^T U(t, x(t))\, dt \quad \text{- Dico che}$$

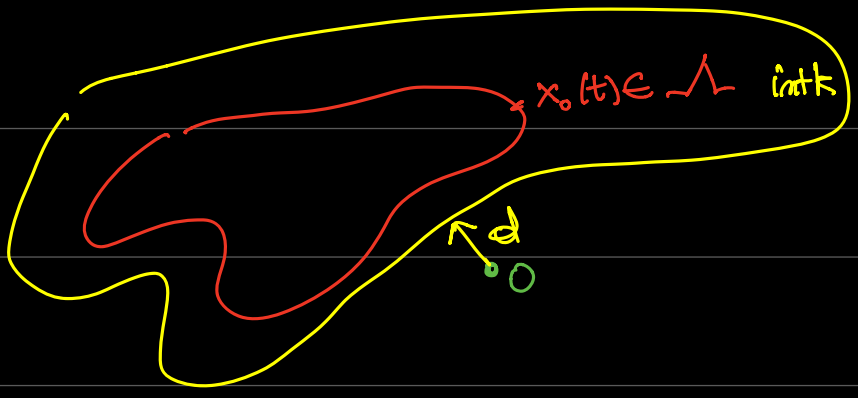
$$d_x \mathcal{U}[v] = \int_0^T \nabla_x U(t, x(t)) \cdot v(t)\, dt$$

$$\mathcal{U}(x_0 + h) - \mathcal{U}(x_0) - d_{x_0}\mathcal{U}[h] =$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \left(\nabla_x U(t, x_0(t) + s h(t)) - \nabla_x U(t, x_0(t)) \right) \cdot h(t)\, ds\, dt$$

. . . . .

utilizzare le norme opportune per concludere che il secondo membro è $o(\|h\|_{H^1_{T\text{-per}}})$ quando $\|h\|_{H^1_{T\text{-per}}} \to 0$



Quindi $E \in C^1(\Lambda)$. Ora cerchiamo i punti critici di E utilizzando la teoria di Lusternik-Schnirelmann

IPOTESI

$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}^N}} U(t,x) + |\nabla U(t,x)| = 0 \quad , \quad U(t,x) > 0$$

$$E(x) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(t,x)$$

$$\Rightarrow \quad \inf_{\Lambda} E = 0 \quad \text{e} \quad \underline{\text{non è raggiunto}}$$

$$x_n(t) \equiv \xi_n \in \mathbb{R}^N \qquad |\xi_n| \to +\infty$$

$$E(x_n(t)) = \int_0^T U(t, \xi_n)\, dt \to 0 = \inf$$

Il minimo non è raggiunto. $\underline{\text{È un problema non compatto}}$

ARRIVO SUBITO

S.T.

Funzioni circolari

Funzioni speciali