Cominciamo a fare "geometria" 1

→ misurare le distanze su una superficie

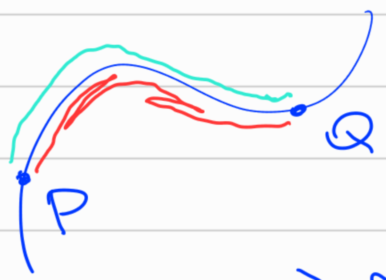
Poiché $S \subseteq \mathbb{R}^3$ (che è uno sp. metrico)

anche S diventa sp. metrico

però vogliamo rimanere "sulla superficie"

Nel piano euclideo la distanza fra due punti è "la lunghezza del cammino più breve che li unisce"

Se usiamo qs definizione su una curva cosa otteniamo?



Il cammino più breve è la curva stessa

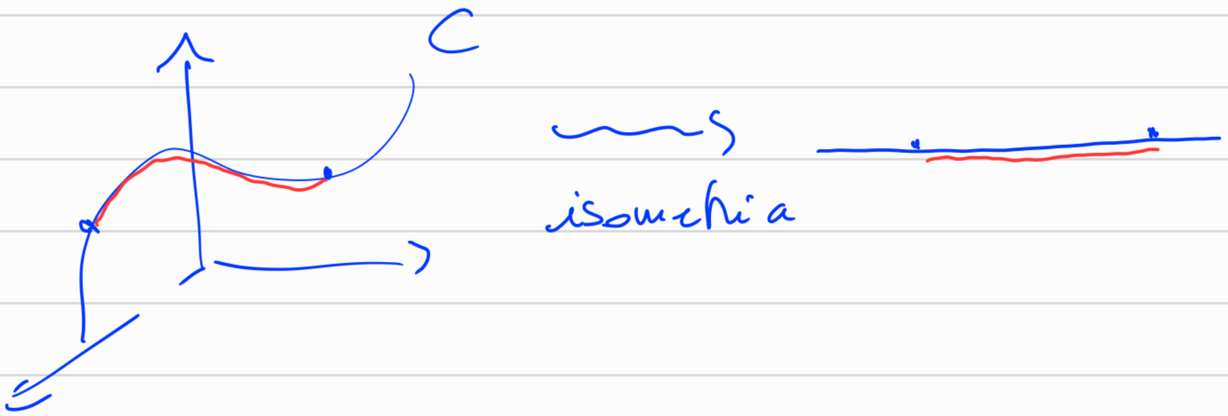
$\to d(P,Q) =$ lunghezza dell'arco di curva

Quindi: se $\alpha : I \to C \subseteq \mathbb{R}^3$ è una param x arcolunghezza

$$d(a,b) = d(\alpha(a), \alpha(b))$$

sull'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ — sulla curva

Conclusione: tutte le curve (regolari) $\mathbb{R}^2$ sono isometriche ad un segmento di $\mathbb{R}$



C = filo di ferro

isometria = raddrizzare il filo

Conclusione: "le curve non hanno geometria intrinseca"

Gauss scopre: le superfici hanno geometria intrinseca

Esempio: se S sappiamo misurare le distanze

→ possiamo definire le "circonferenze"

$$C = \{ q \in S \mid d(p, q) = r \}$$

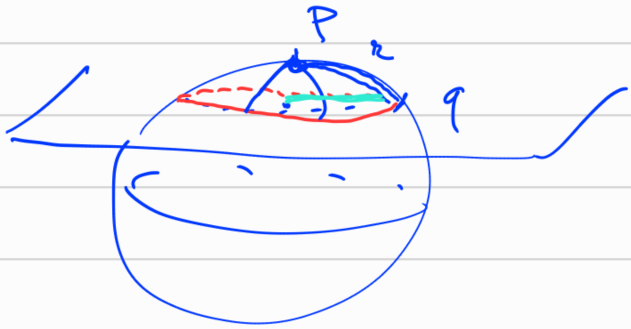
centro p, raggio r

quanto vale $\ell(C) = ?$

- S = piano euclideo

$$\ell(C) = 2\pi r$$

- S = sfera



$$\ell(C) \neq 2\pi r$$

Iniziamo dal concetto di lunghezza

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3_a$$

$$L(\alpha) = \text{lunghezza di } \alpha$$

$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

$$\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} S$$

dobbiamo conoscere la lunghezza di certi vettori in certi spazi vettoriali

$\longrightarrow$ dobbiamo avere prodotti scalari su qs. spazi

se $p \in S$, $\quad \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in T_p S \subseteq T_p \mathbb{R}^3_a = \mathbb{R}^3_v$

definisco

$$\langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle_p = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle_{\mathbb{R}^3_v}$$

$\langle -, - \rangle_p$ è una forma bil. simmetrica (def positiva) su T_pS

$\longrightarrow$ è associata una forma quadratica

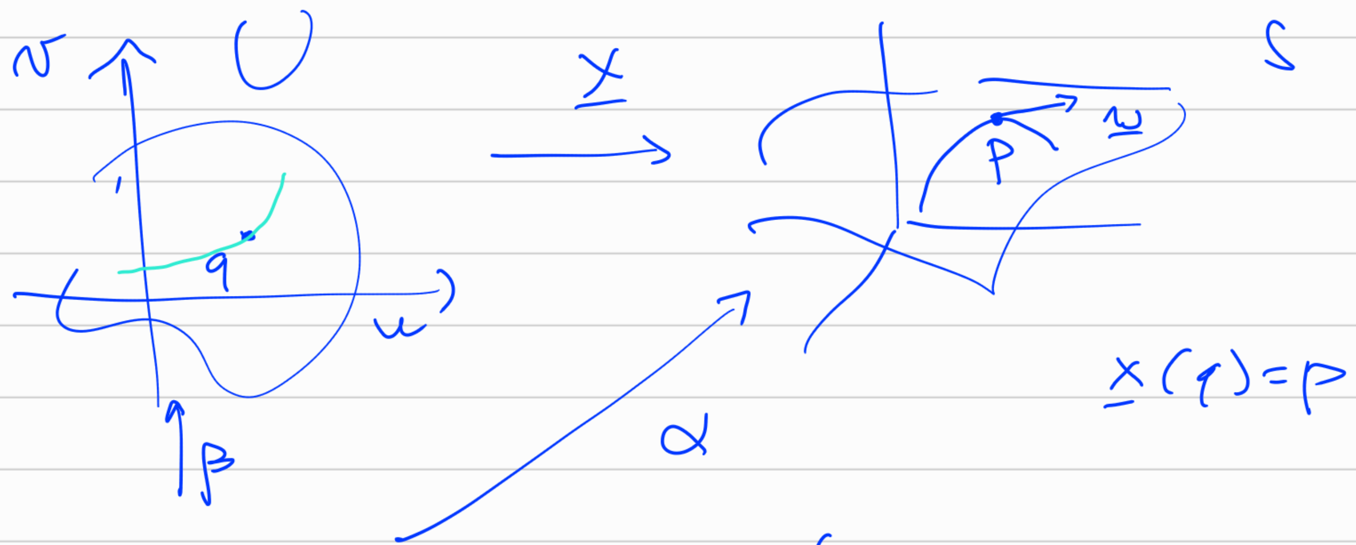
$$I_p(\underline{w}) = \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle_p = \| \underline{w} \|^2$$

si chiama: prima forma fondamentale della superficie S in p

Punto fondamentale: per calcolare I_p basta conoscere la parametrizzazione di S

sia $\underline{w} \in T_pS \longrightarrow$ per definizione,

$\underline{w} = \alpha'(0)$ per una curva $\alpha \subseteq S$
$\alpha(0) = p$



$\beta(t) = (u(t), v(t))$

$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$

$\beta(t) = (u(t), v(t))$ = espressione locale della curva α (5)

$\underline{w} \in T_pS$, base di T_pS : $\{\underline{x}_u(q), \underline{x}_v(q)\}$

$$\underline{w} = \alpha'(0) = u'(0) \cdot \underline{x}_u + v'(0) \cdot \underline{x}_v$$

$$\langle \underline{w}, \underline{w} \rangle_p = I_p(\underline{w})$$

$$= \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle \, u'(0)^2$$

$$+ 2 \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle \, u'(0) \, v'(0)$$

$$+ \langle \underline{x}_v, \underline{x}_v \rangle \, v'(0)^2$$

Notazione: poniamo $q = (u_0, v_0)$

$$E(u_0, v_0) = \langle \underline{x}_u(q), \underline{x}_u(q) \rangle$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \underline{x}_v, \underline{x}_v \rangle$$

se $\underline{w} = a \underline{x}_u + b \underline{x}_v \in T_pS$

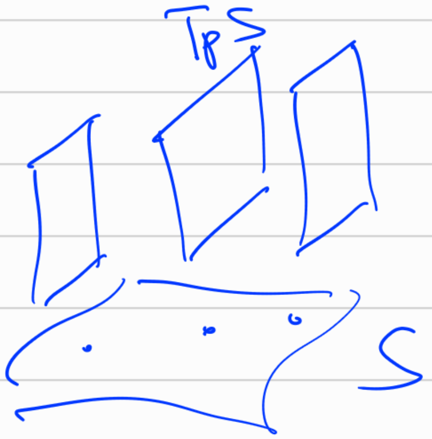
$$I_p(\underline{w}) = [a \quad b] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

cioè: E, F, G sono gli elementi della matrice di I_p nella base $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$

Possiamo interpretare I_p in due modi: 6

1. al variare di p, abbiamo una famiglia di forme quadratiche su uno sp. vettoriale fissato

2. al variare di p, una forma quadratica su uno sp. vettoriale variabile, T_pS



In generale, le due interpr. coincidono quando il fibrato tangente è banale.
Quella giusta è la 2

Localmente su S, il fibrato tg è banale, quindi se usiamo una sola param., possiamo pensare alla 1

Notazione: si scriva anche:

$$E = g_{11} \qquad F = g_{12} = g_{21} \qquad G = g_{22}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = (g_{ij}) = \text{tensore metrico}$$

7

Esempio: S = piano passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, generato dai vettori $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2$ ortonormali

$$\underline{X}(u,v) = P_0 + u\,\underline{w}_1 + v\,\underline{w}_2$$

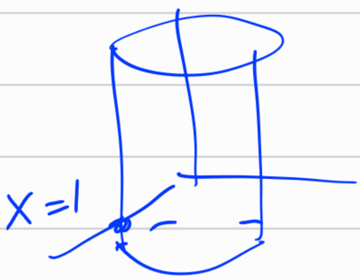
$$E \equiv \langle \underline{X}_u, \underline{X}_u \rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle = 1$$

$$F \equiv 0 \quad , \quad G \equiv 1$$

se $\underline{w} = a\,\underline{X}_u + b\,\underline{X}_v$ allora:

$$I_p(\underline{w}) = \|\underline{w}\|^2 = a^2 + b^2$$

Esempio: cilindro



$$\underline{X}(u,v) = \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

$$\underline{X}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\underline{X}_v = (0, 0, 1)$$

$\to$ $E \equiv 1$, $F \equiv 0$, $G \equiv 1$

come per il piano!

In effetti piano e cilindro sono (localmente) isometrici.

Eravamo partiti da: (8)

$$\alpha(t) = \underline{X}(u(t), v(t)) \subseteq S$$

$$\alpha'(t) = u'(t)\,\underline{X}_u + v'(t)\,\underline{X}_v$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = E\,(u')^2 + 2F\,u'v' + G\,(v')^2$$

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E\cdot(u')^2 + 2F\,u'v' + G\,(v')^2}\,dt$$

$$s(t) = \int_a^t \underbrace{\sqrt{E\cdot(u')^2 + 2F\,u'v' + G\cdot(v')^2}\,d\tau}_{= ds}$$

$$= \int_a^t ds$$

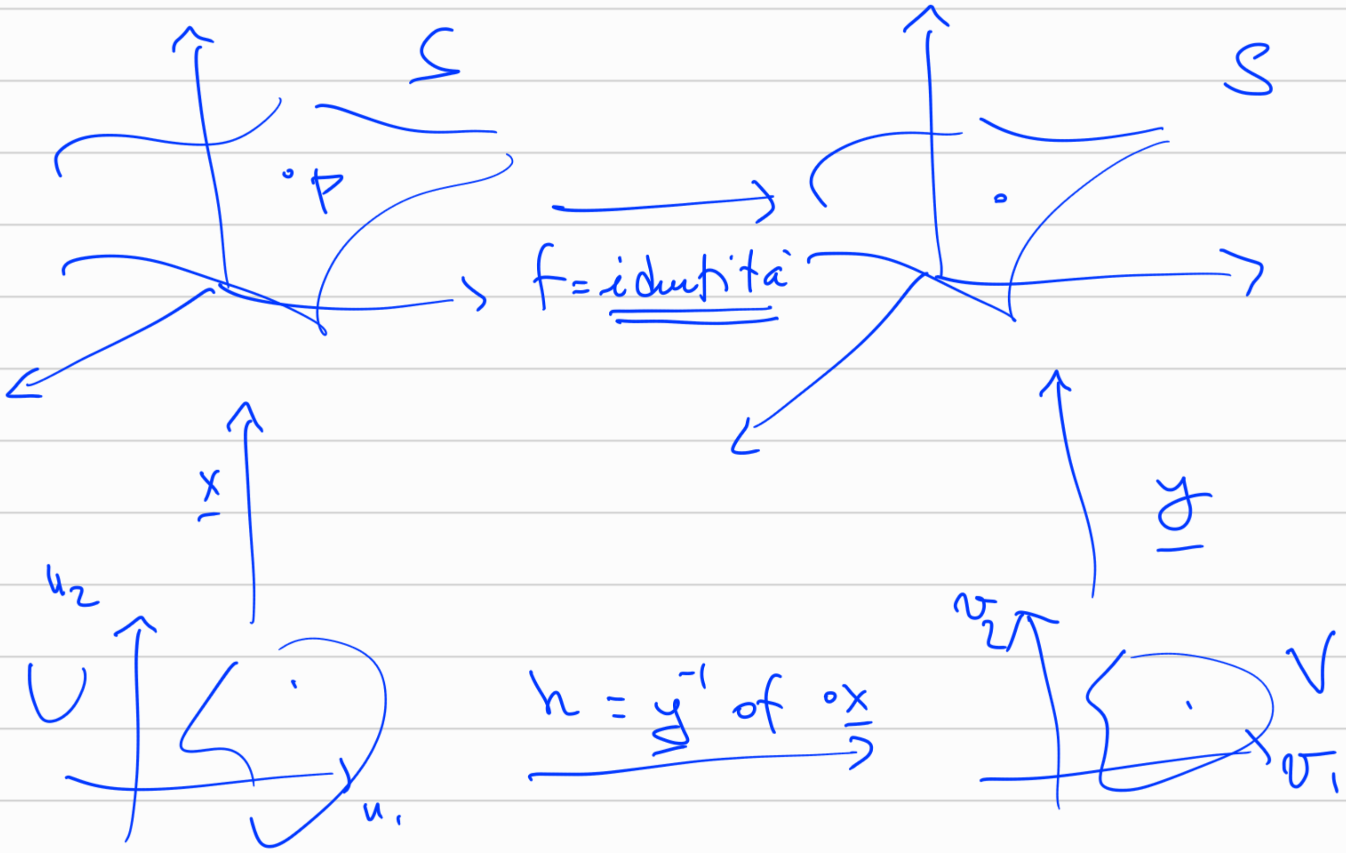
ds = differenziale di $s(t)$

Si scrive

$$\boxed{ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

Se "divido per dt^2" ottengo:

$$\boxed{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$



abbiamo visto che df_p è data dalla matrice Jacobiana di h.

Se prendo $f = id \longrightarrow df_p : T_pS \to T_pS$

df_p = identità

$\Longrightarrow$ la Jacobiana del camb di coord $\underline{y}^{-1} \circ \underline{x}$

è la matrice del camb. di base dello sp. tang

$\underline{w} \in T_pS$

$$\underline{w} = a_1 \underline{x}_{u_1} + a_2 \underline{x}_{u_2}$$

$$= b_1 \underline{y}_{v_1} + b_2 \underline{y}_{v_2}$$

$df_p(\underline{w}) = \underline{w}$ perché f = identità

10

$$df_p(\underline{w}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Oss: $\underline{w} = a_1 \underline{x}_{u_1} + a_2 \underline{x}_{u_2}$

$= \underline{x}_{u_1} du_1 + \underline{x}_{u_2} du_2$

$= \underline{y}_{v_1} dv_1 + \underline{y}_{v_2} dv_2$

in coord locali, il camb. di coord è:

$$\begin{cases} v_1 = v_1(u_1, u_2) \\ v_2 = v_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} du_2$$

$$dv_2 = \underline{\hspace{6cm}}$$

e si ottiene $\begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$