Soluzioni periodiche per sistemi Newtoniani con potenziali singolari di tipo Kepleriano

$$\begin{cases} \ddot{x} = \nabla_x U(t,x) \\ x(t+T) = x(t) \end{cases}$$

U è un potenziale singolare nell'origine e T-periodico in t: $\boxed{U(t+T,x) = U(t,x)}$ $\forall t, \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

Metodo variazionale - Funzionale di azione Lagrangiana

$$\mathcal{A}_T(x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(t,x)\right) dt$$

$H^1_{T\text{-per}} = \{ x \in H^1([0,T]) : x(0) = x(T) \}$ munito della norma $H^1([0,T])$

$$H^1 \hookrightarrow C^{0,1/2}([0,T]; \mathbb{R}^N)$$

$H^1_{T\text{-per}}$ è un sottospazio chiuso $\Rightarrow$ è uno sp. di Hilbert

prodotto scalare: $(x,y) = \int_0^T (\dot{x}\cdot\dot{y} + x\cdot y)\, dt$

$\boxed{\Lambda = \{ x \in H^1_{T\text{-per}} : x(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T] \}}$ è un aperto in $H^1_{T\text{-per}}$ ed è il dominio naturale di $\mathcal{A}$.

Sotto opportune ipotesi, $\mathcal{A} \in C^1(\Lambda)$

$$U(t,x) \simeq \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad U \in C^1([0,T]\times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$$

Punti critici per $\mathcal{A}$ in Λ.

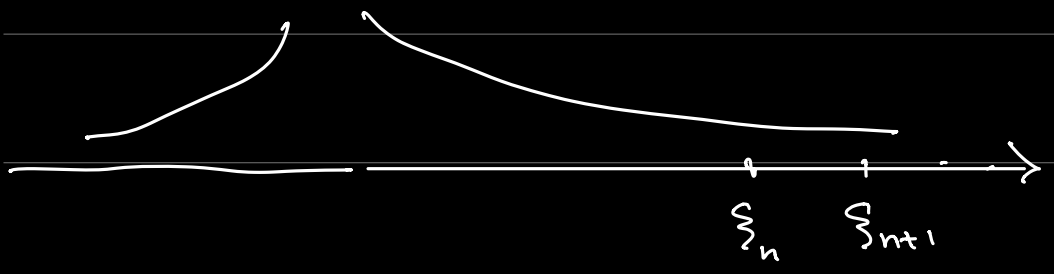
PROBLEMA DI MANCANZA DI COMPATTEZZA:

oss: Se $U > 0$ e $\lim_{|x|\to+\infty} U(t,x) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\inf_{\Lambda} \mathcal{A}_T = 0}$$ e non è raggiunto.

Successione minimizzante $x_n(t) = \xi_n$, con $|\xi_n| \to +\infty$.

$$\mathcal{A}_T > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_T(x_n) = 0$$



È un problema di mancanza di coercività ($\lim_{\|x\|\to+\infty} E(x) = +\infty$ allora E è detta coerciva).

Possibile interazione con la singolarità del potenziale. Una ipotetica successione minimizzante in Λ (o di $(PS)_c$ in Λ) potrebbe convergere (per esempio debolmente) verso $\bar{x} \in \partial\Lambda$

$$\boxed{\partial\Lambda = \{x \in \underset{T\text{-per}}{H^1} : \exists\, t_0,\ x(t_0) = 0\}}$$ traiettorie di collisione

DECOMPOSIZIONE ORTOGONALE DELLO SPAZIO:

$$H^1_{T\text{-per}} = \tilde{H} \oplus \mathbb{R}^n \leftarrow \text{medie}$$

↑ funzioni a media nulla

$x \in H^1_{T\text{-per}}$ $\quad x = w + \xi$, dove $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\xi = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$

e $\int_0^T w = 0$.

In $\tilde{H}$ abbiamo la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger

$$\int_0^T |\dot{w}|^2 \geq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^T |w|^2 \qquad \forall w \in \tilde{H}$$

che implica che $\left(\int_0^T |\dot{w}|^2\right)^{1/2}$ sia una norma equivalente in $\tilde{H}$.

$$\mathcal{A}(w,\xi) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{w}|^2 + U(t, \xi + w(t))$$

e ξ fissato è coercivo su $\tilde{H}$.

CARATTERE DELLE SUCCESSIONI DI PALAIS-SMALE IN $\mathcal{A}$

- $U(t,x) > 0$
- $\lim_{|x| \to +\infty} U(t,x) + |\nabla U(t,x)| = 0$

PROPOSIZIONE: Se $(x_n)_n$ è una successione di $(PS)_c$ in $\mathcal{A}$, allora $(x_n)_n$ è limitata in $\mathcal{A}$

se e soltanto se $c>0$.

Dimostrazione: Prendiamo una successione di $(P.S)_c$.

e $x_n = w_n + \xi_n \in \tilde{H} \oplus \mathbb{R}^N$. Come prima cosa osserviamo che $\|w_n\|_{\tilde{H}} \leq$ cost.

$$\frac{1}{2}\|w_n\|^2_{\tilde{H}} \leq \mathcal{A}_T(x_n) = c_n \to c \quad \text{è limitata}$$

quindi è nec. & suff. provare la limitatezza delle medie ξ_n. Supponiamo che $|\xi_n| \to +\infty$.

$$\ddot{x}_n = \nabla U(t, x_n) + h_m \quad \text{in} \quad H^{-1} = (H^1_{T\text{-per}})'$$

$$\boxed{\ddot{w}_n = \nabla U(t, w_n(t) + \xi_n) + h_m}$$

OSSERVAZIONE CHIAVE: $\|w_n\|_{H^1} \leq c \Rightarrow (w_n)_n$ è precompatta in $C^0([0,T])$ ($(w_n)_n$ è limitata in $C^{0,1/2}([0,T])$ che per il teorema di Ascoli-Arzelà implica la precompattezza in $C^0([0,T])$).

Possiamo estrarre una sottosuccessione $(w_{n_k})_k$ convergente uniformemente ad un certo $\bar{w}$ (e anche debolmente in $H^1_{T\text{-per}}$).

Deduco che $\lim_{k\to+\infty} \min_{t\in[0,T]} |w_n(t)+\xi_n| = +\infty$

$\Vdash$

$|\xi_n| - |w_n(t)|$

$\geq |\xi_n| - \|w_n\|_{L^\infty([0,T])} = +\infty.$

$\Rightarrow \|\nabla_x U(t, x_k(\cdot))\|_{L^\infty([0,T])} \to 0$

$H^1_{T\text{-per}} \hookrightarrow L^2([0,T]) \qquad L^\infty([0,T]) \hookrightarrow H^{-1}$

$\Rightarrow \|\nabla_x U(\cdot, x_{n_k}(\cdot))\|_{H^{-1}} \to 0 \qquad h_n \to 0 \text{ in } H^{-1}$

$\ddot{w}_{n_k} \to 0 \quad \text{in } H^{-1}$

$\Rightarrow w_{n_k} \to 0 \quad \text{in } H^1_{T\text{-per}}$ - In particolare usiamo $(w_{n_k})_k$ come funzioni test:

limitata

$$\int_0^T |\dot{w}_{n_k}|^2 = o(\|w_{n_k}\|_{H^1_{T\text{-per}}}) = o(1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_T(x_{n_k}) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{w}_{n_k}|^2 + U(t, w_{n_k}(t)+\xi_{n_k})$$

$$= c_{n_k} \to 0 \quad \text{per } k\to+\infty$$

Morale, abbiamo provato che la successione è limitata

se e solo se $\lim_{n\to+\infty} c_n = c > 0$. ☒

OSSERVAZIONE: sono esclusi potenziali del tipo:

$$U(t,x) = \frac{1}{|x|^\alpha} + h(t)\cdot x$$

Si possono trattare casi simili, imponendo che

$$\int_0^T h(t)\,dt = 0$$

e $|\nabla_x U(t,x)| \le C$ -

In questo caso si può dimostrare

PROPOSIZIONE: $\exists\, c_0 > 0$ t.c. vale la condizione di $(PS)_c$ $\forall\, c > c_0$.

Dim (per esercizio).

Secondo problema: collisioni

DEFINIZIONE: Diciamo che x è una soluzione generalizzata di $\ddot{x} = \nabla_x U(t,x)$

se $x \in H^1_{T\text{-per}}$ e

(i) $A_T(x) < +\infty \Rightarrow \mu(x^{-1}(0)) = 0$

(ii) se $(a,b) \cap x^{-1}(0) = \phi \Rightarrow \ddot{x} = \nabla_x U(t,x)$ in senso debole in (a,b), $\forall y \in H_0^1((a,b))$

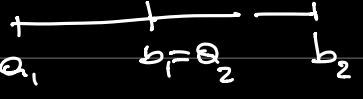
$$\int_a^b (\dot{x}\cdot\dot{y} + \nabla_x U(t,x(t))\cdot y(t))\,dt = 0$$

OSSERVAZIONE: Supponiamo che U non dipenda da t

$$\ddot{x} = \nabla U(x)$$

è associata la conservazione dell'energia totale: $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - U(x) = h$ costante.





$$x(a_1) = x(b_1) = x(a_2) = x(b_2) = 0$$

$\exists\, h_1, h_2$: $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - U(x) = h_1$ su $I_1 = (a_1, b_1)$

e $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - U(x) = h_2$ su $I_2 (a_2, b_2)$

In generale, $h_1 \neq h_2$. Sarebbe opportuno chiedere una legge di conservazione globale $\Rightarrow \exists\, h \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - U(x(t)) = h \quad \text{per q.o. } t \in [0,T]$$

PROPOSIZIONE: Se $(x_n)_n$ successione di $(P\text{-}S)_c$ ed è limitata, allora $\exists$ sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente

debolmente ad un $\bar{x} \in H^1_{T\text{-per}}$, soluzione generalizzata.

Dim: $\exists\ x_{n_k} \to \bar{x}$ unif e debolmente in $H^1_{T\text{-per}}$.

Se $[a,b] \cap \bar{x}^{-1}(0) = \emptyset \Rightarrow$ siamo lontani dalle collisioni e possiamo ragionare come se $U, \nabla U$ fossero funzioni continue. Si conclude facilmente.

PROPOSIZIONE: Se

$$U(t,x) > 0$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} U(t,x) + |\nabla U(t,x)| = 0$$

Allora, $\forall\ c > 0$, le successioni di $(PS)_c$ ammettono sottosuccessioni convergenti (debolmente e uniformemente) a soluzioni generalizzate.

APPROFONDIMENTO SUL PROBLEMA DELLE COLLISIONI

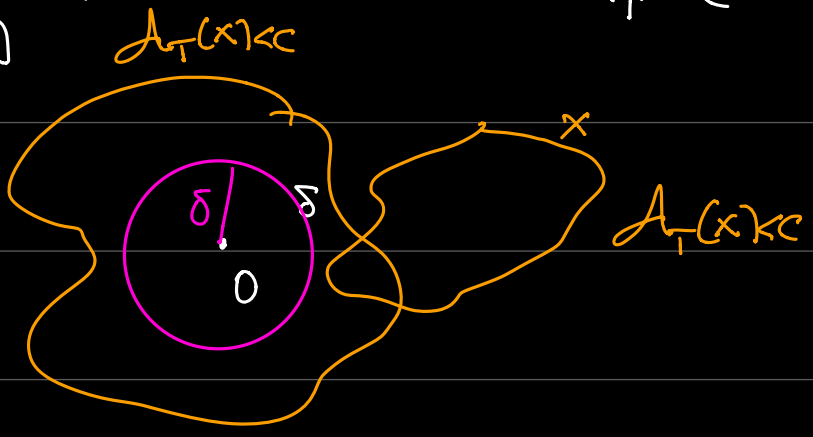
IPOTESI DI STRONG FORCE (W. Gordon 1976, Poincaré 1895)

(SF) $\exists\ V: \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, C^1 t.c.

- $\lim_{x \to 0} V(x) = +\infty$
- $U(t,x) \geq |\nabla V(x)|^2$ in un intorno di 0 $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\forall\ t \in [0,T]$

LEMMA: Se vale (SF) $\Rightarrow$ $\forall c>0$, $\exists \delta>0$:

$$\min_{t\in[0,T]} |x(t)| \geq \delta \qquad \forall\ x \in \mathcal{A}_T^c \ \left(\Leftrightarrow \mathcal{A}_T(x)<c\right)$$



Dimostrazione: $0\leq t_0<t_1\leq T \qquad [t_0,t_1]\cap x^{-1}(0)=\emptyset$

$$V(x(t_1))-V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \nabla V(x(t))\cdot \dot{x}(t)\,dt$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_1} |\nabla V(x(t))|\,|\dot{x}(t)|\,dt \leq \left(\int_0^T |\nabla V(x(t))|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^T |\dot{x}|^2\right)^{1/2}$$

$$a^{1/2}\cdot b^{1/2} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^T 2V(t,x(t))\right)^{1/2}\left(\int_0^T |\dot{x}|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + V(t,x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_T(x)$$

$$\Rightarrow \quad V(x(t_1)) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_T(x) + V(x(t_0))$$

Possiamo fermarci con $x\in\Lambda$ e passare per densità ad ogni $x\in H^1_{T\text{-per}}$

So che per molti t_0 (almeno uno, $V(x(t_0))$ deve essere limitato (perché d è limitato)

$\Rightarrow$ $V(x(t_1))$ deve rimanere limitato. $\forall t_1 \in [0,T]$.

$\Rightarrow$ $|x(t_1)| \geq \delta > 0$. ∎

Quindi posso lavorare nei sottolivelli dell'azione rimanendo lontano dalle singolarità e comportarmi come se il funzionale fosse regolare.

OSSERVAZIONE $\quad V(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$

Purtroppo (SF) $\Leftrightarrow \alpha \geq 2$ - Il potenziale kepleriano $V(x) = \frac{1}{|x|}$ è escluso.

$$V(x) = \frac{1}{\beta |x|^\beta} \qquad |\nabla V(x)|^2 = \frac{1}{|x|^{2(\beta+1)}} \qquad \begin{matrix} 2(\beta+1) = d \\ \Updownarrow \\ d > 2 \end{matrix}$$

$$V(x) = -\log|x| \Rightarrow |\nabla V(x)|^2 = \frac{1}{|x|^2}$$

Se $d < 2$ la proposizione è falsa, cioè ci sono collisioni a livello finito di azione

$x(t) = k t^{\gamma}$ $\quad 0 < \gamma < 1$ $\quad \ddot{x} = k\gamma(\gamma-1) t^{\gamma-2}$

$$\ddot{x} = -\alpha \frac{x}{|x|^{\alpha+2}}$$

$$(\alpha+1)\gamma = 2 - \gamma \qquad \gamma = \frac{2}{2+\alpha}$$

$$k\gamma(\gamma-1) = \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}}$$

$$|\dot{x}|^2 \simeq \frac{1}{|x|^{\alpha}} \simeq \frac{1}{t^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}} \qquad \frac{2\alpha}{2+\alpha} < 1 \iff \alpha < 2$$

