REFERENZA.

Libro A. Ambrosetti & V. Coti-Zelati, Periodic Solutions of Singular Lagrangian Systems, Progress in nonlin. diff. eq., Springer – pp. 31-56.

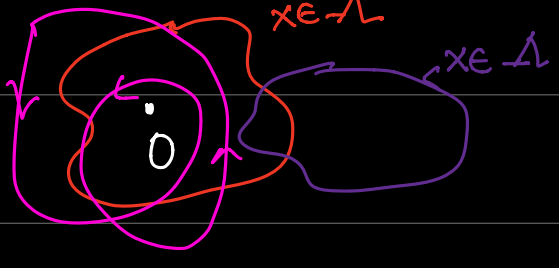
- $U(t,x) > 0 \qquad \forall t, x \neq 0$
- $\lim_{|x| \to +\infty} U(t,x) + |\nabla U(t,x)| = 0$
- Strong Force

Metodo della categoria di Lusternik e Schnirelman in $-\Lambda$ (orbite non collisionali). Infatti, grazie all'ipotesi di (SF) ogni sottolivello $\mathcal{A}_T^c = \{ x \in -\Lambda : \mathcal{A}_T(x) < c \}$ è discosto dalla singolarità e invariante per il flusso del lemma di deformazione.

Problemi: i) mancanza di $(PS)_c$ per $c = 0$

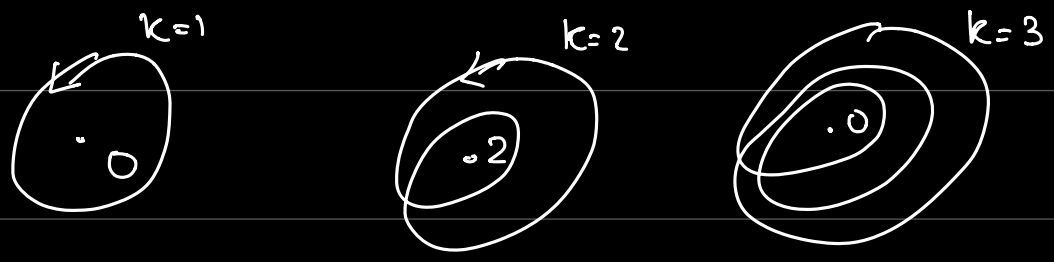
ii) categoria di L-S?

CASO PIANO: $N = 2$



$$\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^k \quad , \quad \text{dove}$$

$$\Lambda^k = \{ x \in \Lambda : \ ind_x(0) = k \}$$

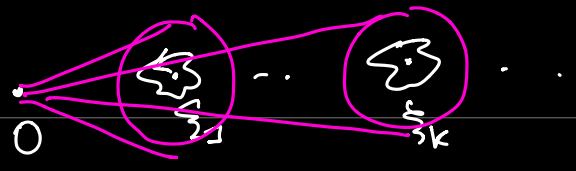


$$ind_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} \qquad \text{formula "di Cauchy"}$$

Λ ha infinite componenti connesse

$$c_k = \inf_{x \in \Lambda^k} \mathcal{A}_\tau(x)$$

$\inf_\Lambda \mathcal{A}_\tau = 0$ e non è raggiunto



$\mathcal{A}_\tau(x_n) \to 0$. Osserviamo che se $x_n = w_n + \xi_n \in \tilde{H} \oplus \mathbb{R}^N$

$\mathcal{A}_\tau(x_n) \leq cost$ e $|\xi_n| \to +\infty$

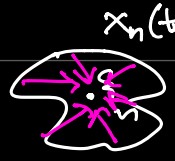
$\Rightarrow \quad ind_{x_n}(0) = 0$

Osserviamo che $\|w_n\|_{L^\infty} \leq cost$, mentre $|\xi_n| \to +\infty$

Faccio un'omotopia $\xi_n + (1-s) w_n = \eta(x_n, s)$

$$|\eta(x_n, s)(t)| = |\xi_n + s w_n(t)| \geq |\xi_n| - (1-s)\|w_n\|_{L^\infty} > 0$$

$\forall\, s \in [0,1] \quad \forall t \in [0,\bar{T}]$, $\forall\, n$ suff. grande





Quindi l'unica classe Λ^k in cui si verifica la mancanza di limitatezza delle successioni minimizzanti è/è di (PS) è Λ^0 $(k=0)$

$$c_k = \inf_{\Lambda^k} \mathcal{A}_1$$

$c_0 = 0$ non è raggiunto

$c_k > 0$ sono raggiunti.

Morale, ho infite soluzioni periodiche dell'equazione

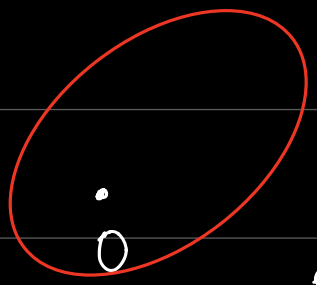
$$\ddot{x} = \nabla U(t,x)$$

W. Gordon '76 – Purtroppo non si può applicare al caso del potenziale kepleriano $U(x) = \frac{1}{|x|}$ e le sue perturbazioni.

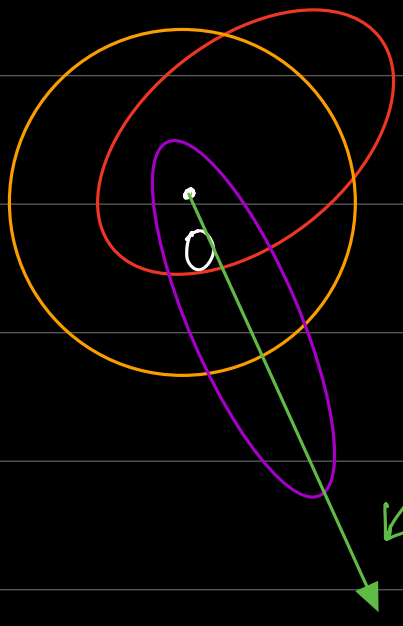
INCISO SUL LAVORO DI GORDON:

Applichiamo questo metodo al caso kepleriano $\frac{1}{|x|}$

Le soluzioni periodiche sono note



ellissi kepleriane, il sole occupa uno dei fuochi e il periodo T soddisfa una relazione funzionale coi parametri dell'ellisse. Il periodo è proporzionale ad una potenza $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$? dell'energia.



Uguale periodo ed energia e eccentricità e momento angolare diverse.

ellisse degenere $e = 1$

soluzione generalizzata.

L'azione è costante su tutta la famiglia di ellissi kepleriane di uguale periodo (indip. da $e \in [0,1)$).

Osservazione $U_\delta(x) = \frac{1}{|x|} + \frac{\eta(|x|/\delta)}{|x|^2}$ η cut-off

Facciamo la minimizzazione su Λ^1 (indice avv. = 1)

e poi $\delta \to 0$, chiamiamo x_δ il minimo

Ci sono due possibilità → $\min_{t\in[0,T]} |x_\delta(t)| \geq \delta$ ①

→ $\min_{t\in[0,T]} |x_\delta(t)| \leq \delta$ ②

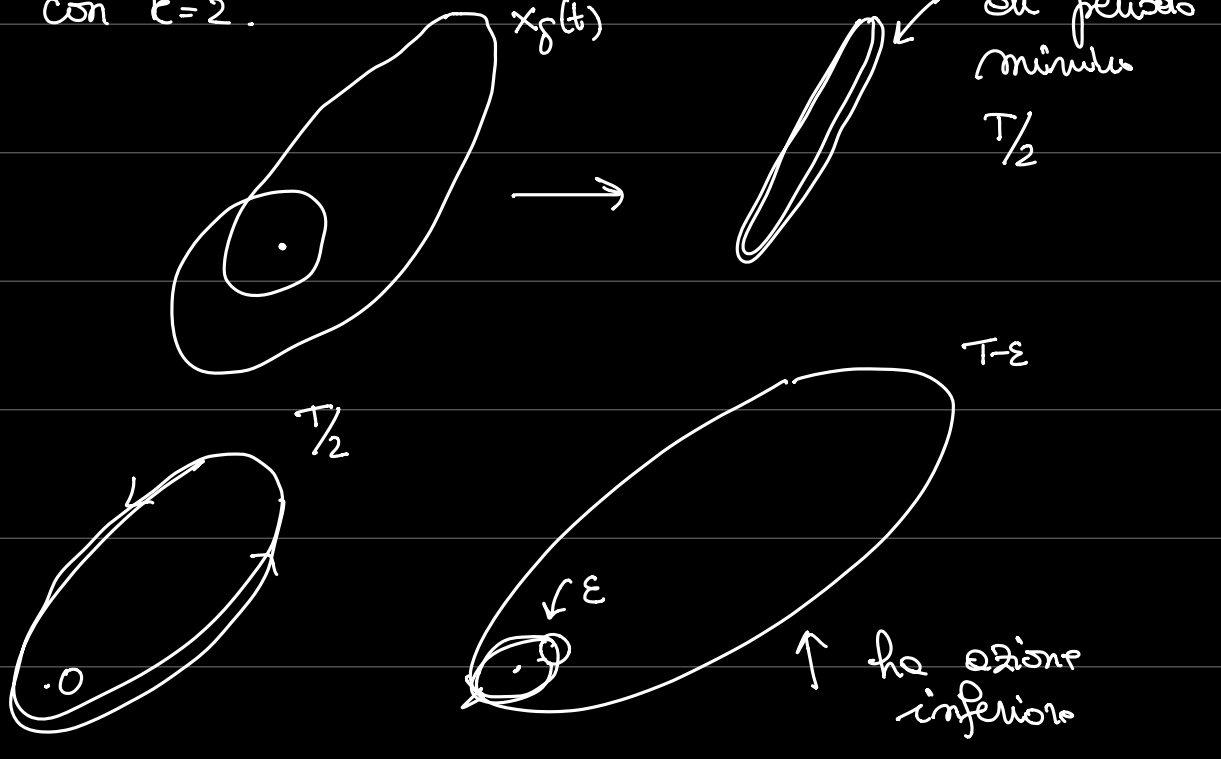
② è allora, per $\delta \to 0$ otteniamo un'ellisse degenere

In entrambi i casi, il livello dell'azione è lo stesso: è il livello comune di tutte le ellissi kepleriane.

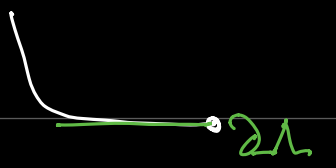
Morale: le ellissi kepleriane minimizzano l'azione in Λ^1. (Λ^{-1}) Caratterizzazione variazionale delle ellissi

Questo argomento funziona solo quando $k \in \{1, -1\}$.

Proviamo con $k=2$.



$k \in \{1,-1\}$ $\quad -\Lambda$

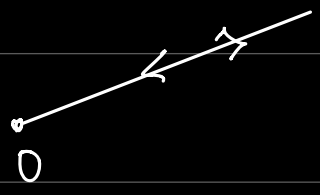


$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,-1,1\} \Rightarrow$ il minimo è sempre raggiunto sul bordo di Λ.

OSSERVAZIONE

$$c_0 = \inf_{x \in \partial\Lambda} A_\tau(x) > 0$$ è sempre assunto.

↖ comunini di collisione

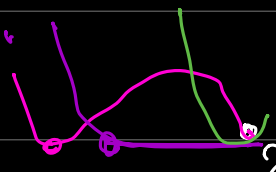


$$c_k = \inf_{x \in -\Lambda^k} A_\tau(x)$$

Se $c_k < c_0 \Rightarrow$ minimo è assunto nell'interno di $-\Lambda^k$

Se $c_k = c_0 \Rightarrow$ → il minimo è assunto sotto su $\partial\Lambda$

↘ caso dubbio



potenzialmente strutturalmente instabile.

Cosa succede quando $N \geq 3$. $-\Lambda$ è connesso.

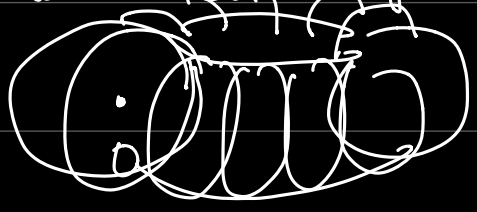
OSSERVAZIONE: $N \geq 3$ $-\Lambda$ è connesso



ogni cammino chiuso è contrattile in Λ.

$N=3$ Λ non è semplicemente connesso - Cioè ci sono degli S^1 in Λ che non sono contrattili

In $\mathbb{R}^3$ considero un toro che tenga 0 nel suo interno



Posso pensare che il toro sia foliato in $S^1(\times S^1)$ ognuno dei quali sia un cammino in Λ - Questo rappresenta una curva $\gamma : S^1 \to \Lambda$ che non è contrattile.

CATEGORIA DI LUSTERNIK-SCHNIRELMAN

TEOREMA (Fadell-Husseini) $\operatorname{cat}_{\Lambda} \Lambda = +\infty$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists A \subseteq \Lambda$ compatto, $\operatorname{cat}_{\Lambda} A = k$.

Dimostrazione non banale.

Sappiamo che

$$c_k = \inf_{\substack{\operatorname{cat}(A) \geq k \\ A \text{ compatto}}} \max_{A} \mathcal{A}$$

sono livelli asintoticamente critici, e sono critici se vale la condizione di $(P\text{-}S)_{c_k}$.

Sappiamo che $(P\text{-}S)_c$ vale $\Leftrightarrow c > 0$.

PROPOSIZIONE: $c_3 > 0$ - (Mentre $c_1 = c_2 = 0$)

Dimostrazione

$c_1 = c_2 = 0$

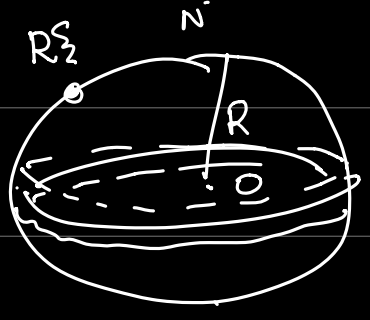
$c_1 = \inf_{\Lambda} d_T = 0$ (perché i punti hanno categoria uno)

$c_2 = \inf_{\text{cat}(A) \geq 2} \max_{A} d_T = 0$

$=$

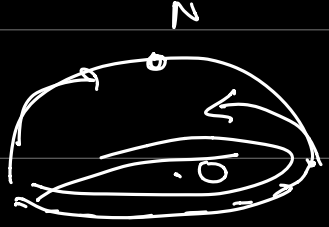
$A_R = \Phi_R(\mathbb{S}^{N-1})$, $\Phi_R(\xi) = R\xi$ ← funzione costante

$\Phi_R : \mathbb{S}^{N-1} \to \Lambda$



$\mathbb{S}^{N-1} = S^+ \cup S^-$

allargamenti delle semisfere superiore e inferiore



sono contraibili in sé (e in Λ) nei poli nord e sud rispettivamente.

$A_R = \Phi_R(S^{N-1})$ ha categoria ≤ 2 in Λ_L)

(ha categoria $= 2$, perché non è contraibile)

$$\max_{A_R} \mathcal{A}_T = \max_{x \in A_R} \int_0^T U(t,x) \to 0 \quad \text{per } R \to +\infty$$

$c_1 = c_2 = 0$

Che vogliamo dimostrare che

$c_3 > 0$

Ragioniamo per assurdo, supponendo che $c_3 = 0$.

Vogliamo capire com'è la topologia di $\mathcal{A}_T^\varepsilon$.

$x \in \mathcal{A}^\varepsilon \Rightarrow x = w + \xi \quad \frac{1}{2}\|w\|^2 < \varepsilon \quad (\Rightarrow \|w\|_{L^\infty} \leq C\sqrt{\varepsilon})$

e, se $U(t,x) > 0$, sappiamo $\exists R = R_\varepsilon$ t.c.

$|\xi| \geq R$



Se ε è molto piccolo, possiamo fare una deformazione che schiaccia x su ξ: $\eta(x,s)(t) = \xi + (1-s)w(t)$

di modo che $\eta(x,0) = \mathbb{1}$, $\eta(x,1) = \xi$

Quindi $\eta : \mathcal{A}^{\varepsilon} \times [0,1] \to \mathcal{A}^{\varepsilon'}$ ε' un pochino più grande di ε

$\eta(\mathcal{A}^{\varepsilon}, 1) \subseteq RS^{N-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ (vista come sottoinsieme di Λ)

e abbiamo già osservato che

$$cat(RS^{N-1}) = 2$$

Per la proprietà di sopravvivenza delle categorie,

$$cat_{\Lambda}(\mathcal{A}^{\varepsilon}) \leq cat(RS^{N-1}) \leq 2$$

Questo mi dice che non ci sono compatti di categoria ≥ 3 dentro il sottolivello $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ per ε sufficientemente piccolo.

$\Rightarrow c_3 > 0$.

Quindi c_k è critico $\forall\, k \geq 3$.

TEOREMA: Sotto le ipotesi di sopra il funzionale A_T ha infiniti punti critici in Λ.

ESERCIZIO: Estendere il teorema

$$\begin{cases} \ddot{x} = \nabla U(t,x) + f(t) \\ x(t+T) = x(t) \end{cases}$$

Con $f(t+T) = f(t)$ a media nulla $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ sotto le ipotesi di prima su U, PU.

Non neutro? perché nel teo. precedente $\tilde{U}(t,x) = U(t,x) + f(t)\cdot x$

$\nabla\tilde{U}(t,x) = \nabla U(t,x) + f(t) -$

PROBLEMA PERIODICO DEGLI N-CORPI