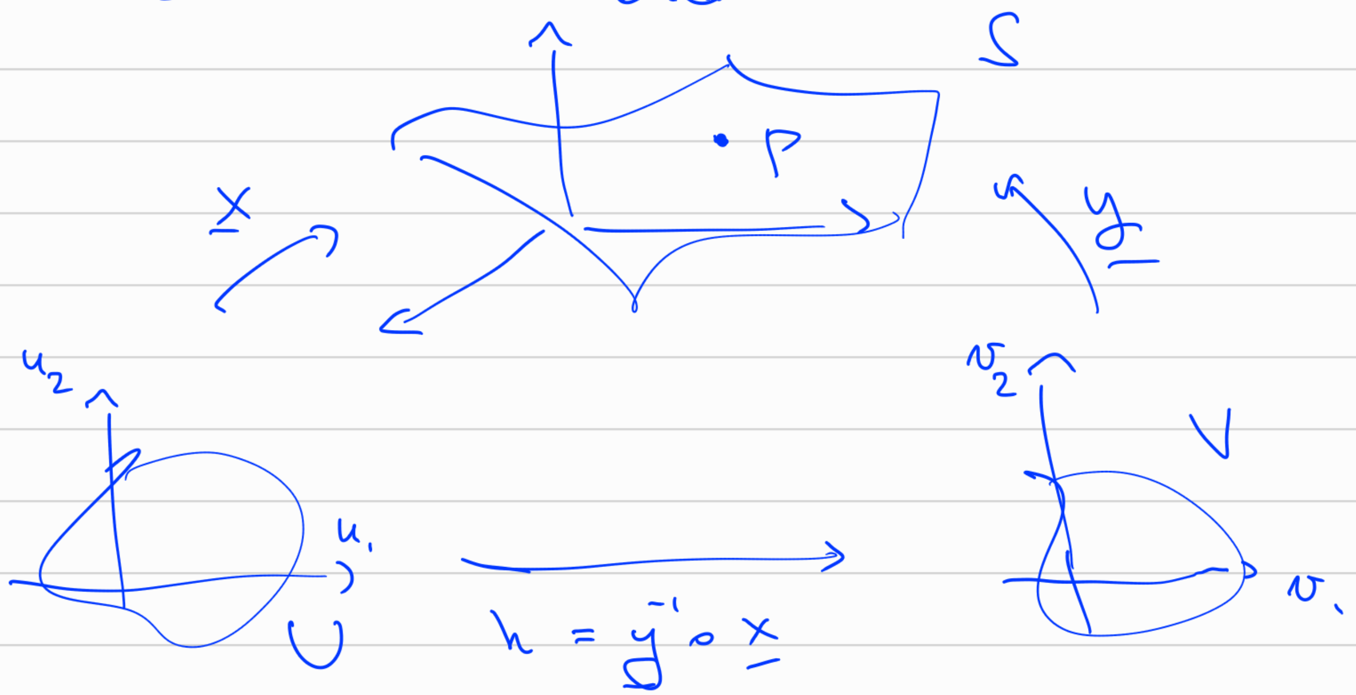
Come cambia il ds^2 quando cambiamo coordinate (1)



La prima forma si scrive, in coordinate

$E_1 = \langle \underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_1} \rangle_p$	$E_2 = \langle \underline{y}_{v_1}, \underline{y}_{v_1} \rangle_p$
$F_1 = \langle \underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2} \rangle_p$	$F_2 = \langle \underline{y}_{v_1}, \underline{y}_{v_2} \rangle_p$
$G_1 = \langle \underline{x}_{u_2}, \underline{x}_{u_2} \rangle_p$	$G_2 = \langle \underline{y}_{v_2}, \underline{y}_{2} \rangle_p$

sono gli elementi delle matrici di I_p su T_pS scritti rispetto alle basi $\{\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{u_2}\}$ oppure $\{\underline{y}_{v_1}, \underline{y}_{v_2}\}$.

La relazione è:

$$I_1 = M^t \cdot I_2 \cdot M$$

con M opportuna matrice

chi è M? risposta: $\boxed{M = J}$

M è legata al camb. di base e quindi è legata a $J = Jac(h)$ (2)

sia $\underline{w} \in T_p S$

$$\underline{w} = \underline{x}_{u_1} du_1 + \underline{x}_{u_2} du_2 = \underline{y}_{v_1} dv_1 + \underline{y}_{v_2} dv_2$$

numeri = coeff. nelle basi scelte

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

quindi:

$$E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 du_2 + G_1 du_2^2 =$$

$$= E_2 dv_1^2 + 2F_2 dv_1 dv_2 + G_2 dv_2^2$$

$$[du_1 \; du_2]\begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = [dv_1 \; dv_2]\begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix}$$

Avevamo visto che $\begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$

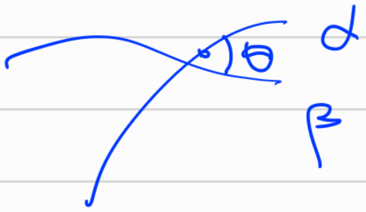
$$(du_1 \; du_2)\begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = [du_1 \; du_2]\, J^t \cdot \begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_1 = J^t \cdot I_2\, J}$$

Usando la prima forma possiamo definire su una superficie i concetti di <u>angolo</u> e <u>area</u>

siano $\alpha, \beta : I \longrightarrow S$ curve <u>regolari</u> su S

tali che $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p$



$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(t_0)\|}$$

la formula dipende solo dalla prima forma

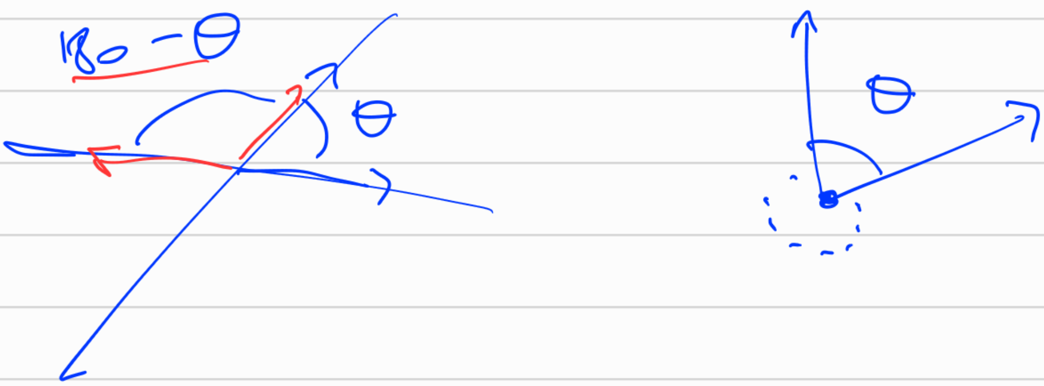
<u>Esempio</u>: linee coordinate
$u =$ costante, $v =$ costante

$\varphi =$ angolo fra le linee coordinate:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \underline{X}_u, \underline{X}_v \rangle}{\|\underline{X}_u\| \cdot \|\underline{X}_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

quindi linee coord perpend $\Longleftrightarrow$ $F = 0$

<u>Esercizio</u>: in una sup. di rotazione meridiani e paralleli sono sempre perpendicolari



Area: se $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vettori

l'area del parallelogramma di lati $\underline{v}, \underline{w}$ vale:

$$\| \underline{v} \wedge \underline{w} \| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$\underline{x} : U \longrightarrow S$ param locale

$$\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \| : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

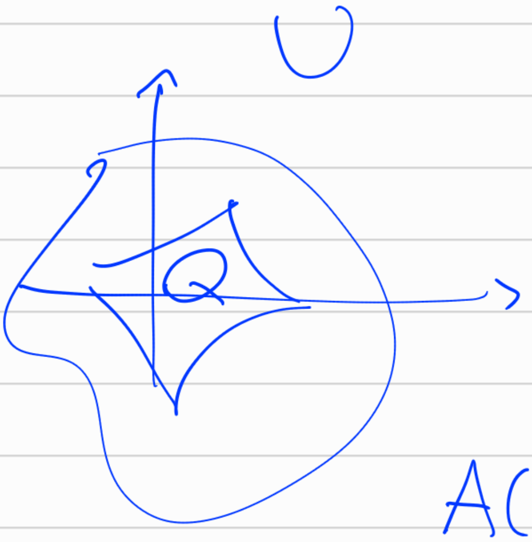
al variare di $q \in U$ misura l'area del parallelogramma di lati $\underline{x}_u, \underline{x}_v$

i vettori a T_pS sono comb. lineari di $\underline{x}_u, \underline{x}_v$

$\underline{x}_u du$, $\underline{x}_v dv$ "vettori infinitesimali"

parall. di lati $\underline{x}_u du$, $\underline{x}_v dv$

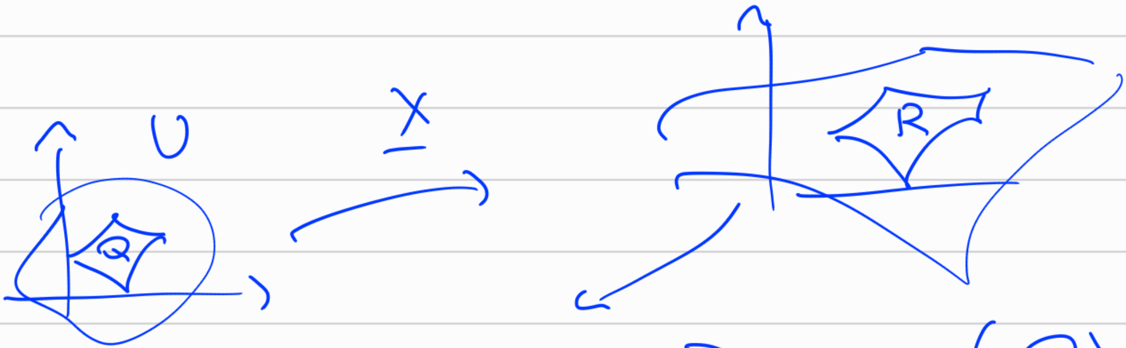
= parall di "area infinitesimale"



$Q \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$

Q limitata nel piano,

$$A(Q) = \iint_Q du\,dv$$



$$R = \underline{X}(Q)$$

Area di R è legata all'area di Q da un fattore di deformazione

per esempio, se $\underline{X}$ è lineare, allora il fatt. di deform è il valore assoluto del determinante

Definizione S superficie, $R \subseteq S$ reg. limitata tale che $R = \underline{X}(Q)$ con $\underline{X} : U \to S$ param

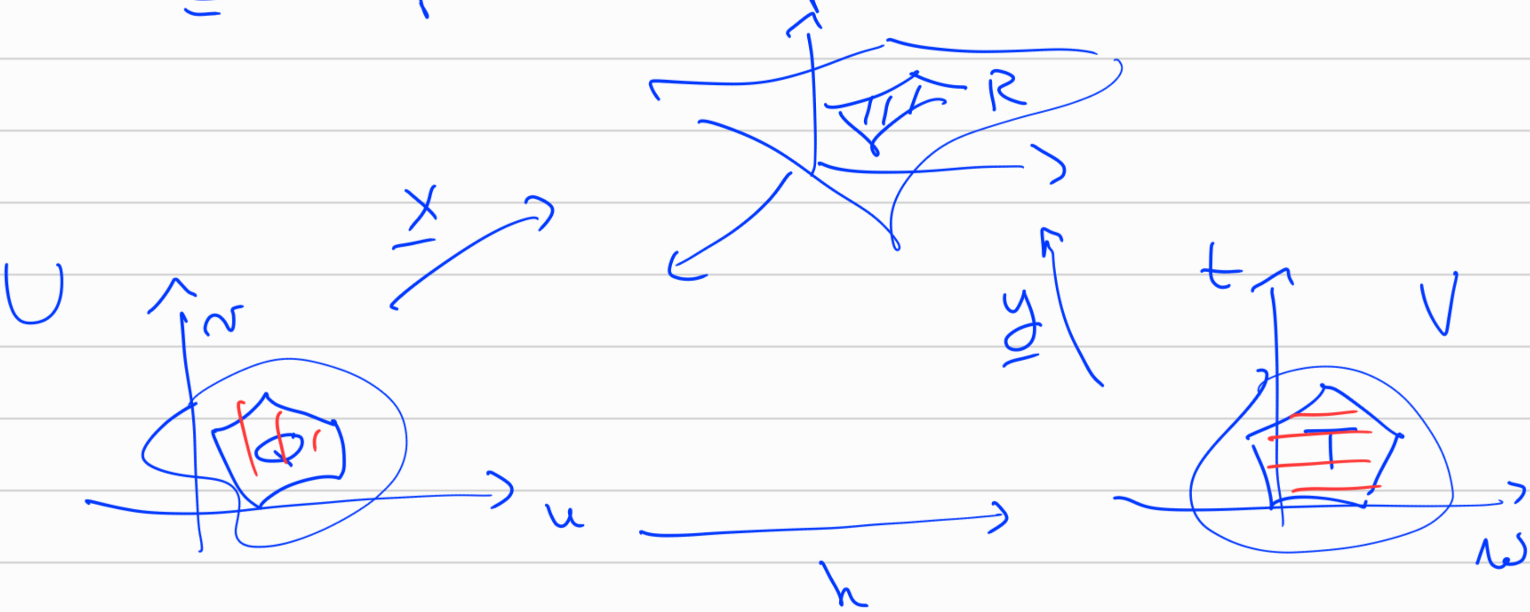
poniamo $$\boxed{A(R) = \iint_Q \|\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v\| \, du\, dv}$$

l'integrando è l'area di un "parallelogramma infinitesimale" 6

Lemma l'integrale

$$\iint_Q \| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \| \, du \, dv$$

non dipende dalla parametrizzazione.



dove: $Q = \underline{x}^{-1}(R)$ $\quad T = \underline{y}^{-1}(R)$

e quindi $R = \underline{x}(Q) = \underline{y}(T)$

$$J = Jac(h) = J(\underline{y}^{-1} \circ \underline{x}) = \frac{\partial(w,t)}{\partial(u,v)}$$

$$\underline{x} = \underline{y} \circ h$$

$$\underline{x}_u = \underline{y}_w \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + \underline{y}_t \cdot \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\underline{x}_v = \underline{y}_w \frac{\partial w}{\partial v} + \underline{y}_t \cdot \frac{\partial t}{\partial v}$$

(7)

$$\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v = \underline{y}_w \wedge \underline{y}_t \left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial u} \right)$$

$$= \underline{y}_w \wedge \underline{y}_t \cdot \det J$$

Integrando:

$$\iint_Q \| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \| \, du \, dv =$$

$$\iint_Q \| y_w \wedge y_t \| \underbrace{|\det J| \, du \, dv}$$

$$= \iint_T \| \underline{y}_w \wedge \underline{y}_t \| \overbrace{dw \, dt}$$

Esercizio: $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vettori

$$\underbrace{\| \underline{v} \wedge \underline{w} \|^2} + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 = \| v \|^2 \cdot \| w \|^2$$

l'integrando dell'area è quindi:

$$\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \| = \sqrt{\| \underline{x}_u \|^2 \cdot \| \underline{x}_v \|^2 - \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle^2}$$

$$= \sqrt{EG - F^2}$$

$$\boxed{A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv}$$

Esercizio: usando le param per (8)

sfera e toro, calcolare area della

sfera e area del toro.

Attenzione: cosa vuol dire "fattore di deformazione"

fattore = fattore di proporzionalità

se: f è lineare allora:

$$A(f(Q)) = |\det f| \cdot A(Q)$$

per ogni Q nel dominio di f

ma se: f non è lineare la

proporzionalità c'è solo a livello

infinitesimale cioè:

gli integrandi sono proporzionali,

e il fattore è $|\det(Jac(f))|$

Isometrie

- distanza intrinseca su S

$$d_S(p,q) = \inf_C \{ \ell(C) \}$$

dove: $p, q \in S$ $\quad$ $\ell(C)$ = lunghezza di C

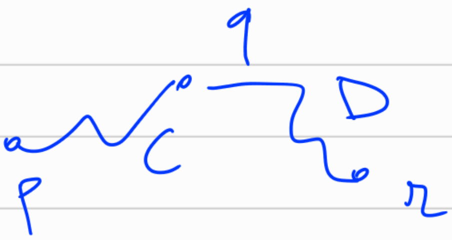
inf è preso sull'insieme delle curve $\subseteq S$ che uniscono p a q e regolari a tratti

Fatto: d_S è una distanza

- simmetrica: $d_S(p,q) = d_S(q,p)$
  chiaro, stesse curve

- $d_S(p,q) \geq \| q - p \| \Rightarrow$ è sempre ≥ 0

  inoltre $d_S(p,q) = 0 \Rightarrow \| q - p \| = 0$
  $\Rightarrow p = q$

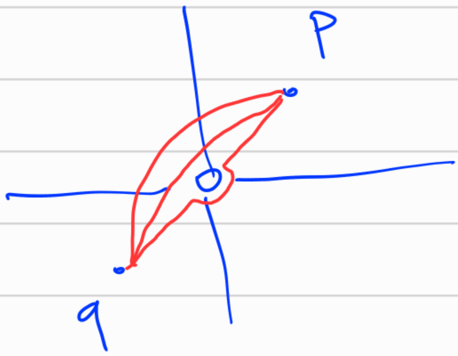
- 

  si ha $C + D$ = curva da p a r

$\{$curve p, r passanti per $q\} \subseteq \{$curve da p a $r\}$

$\Rightarrow d_S(p,r) = \inf \leq d_S(p,q) + d_S(q,r)$

Esempio: $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



$p = (1,1)$

$q = (-1,-1)$

$d(p,q) = 2\sqrt{2}$

anche se il seguente non c'è.

non c'è un cammino di minima distanza.

Definizione: sia $f : M \longrightarrow N$ un diffeomorfismo. f è isometria se per ogni curva $C \subseteq M$ si ha:

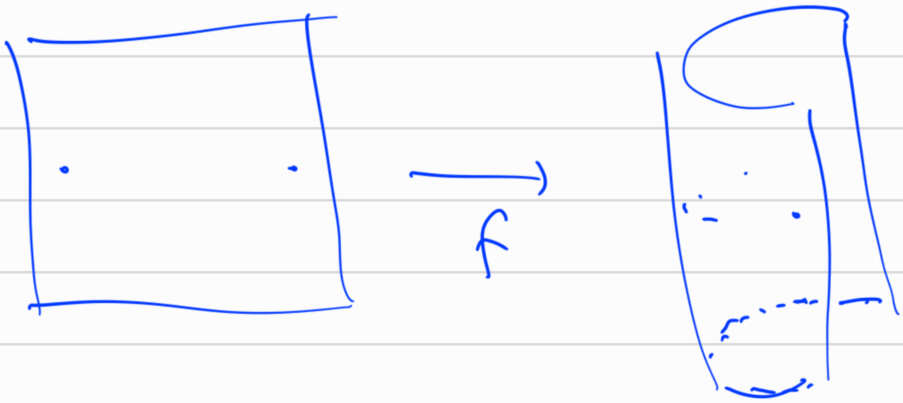
$$\ell(C) = \ell(f(C))$$

diffeo serve ad avere corrisp. biunivoca fra curve reg. a tratti su M e su N

la def data dà immediatamente la disuguaglianza:

$$d_M(p,q) \geq d_N(f(p), f(q))$$

usando f^{-1} si ha $=$


f