Ricordiamo $f : M \to N$ <u>diffeo</u>

è isometria se $\forall\, c \subseteq M$ $\quad \ell(c) = \ell(f(c))$

Consideriamo un diffeomorfismo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
D \arrow[u, "\underline{x}"] \arrow[r, "\bar{f}"'] & E \arrow[u, "\underline{y}"']
\end{tikzcd}$$

$$\bar{f} = \underline{y}^{-1} \circ f \circ \underline{x}$$

coord (u_1, v_1) su D, (u_2, v_2) su E

$$\bar{f}(u_1, v_1) = \big(u_2(u_1, v_1),\, v_2(u_1, v_1)\big)$$

f diffeomorf $\Longrightarrow$ $\bar{f}$ diffeomorfismo

<u>Lemma</u> f diffeomorfismo. Allora esistono param locali su M ed N tali che $\forall p \in \underline{x}(D)$ la matrice di df_p nelle basi corrispondenti è <u>l'identità</u>.

Dim. La matrice di df_p nelle basi $\{\underline{x}_{u_1}, \underline{x}_{v_1}\}$ e $\{\underline{y}_{u_2}, \underline{y}_{v_2}\}$ è la matrice di $d\bar{f}_q$ nelle basi canoniche

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
 & E \arrow[u, "\underline{y}"'] \\
\underline{\underline{D}} \arrow[uu, "\underline{x}"] \arrow[r, "id_D"] & \underline{\underline{D}} \arrow[u, "\bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

sia $\underline{y}' = \underline{y} \circ \bar{f}$

$\bar{f}$ diffeo $\Longrightarrow$ $\bar{y}' =$ param locale nelle coord locali $\underline{x}$, $\underline{y}'$ la rappresentazione di f è id_D

$\Longrightarrow$ in qs coord la matrice del differenziale è l'identità ■

<u>Osservazione</u>: quando si cambia base in uno sp. vettoriale le matrici cambiano

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot Q$$

Nel caso visto: $P = B$, $Q = id$ (3)

Sappiamo che T_pM, $T_{f(p)}N$ sono sp. vett euclidei, con il prod scalare dato dalle prime forme.

$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ <u>isomorfismo</u>

è anche <u>isometria</u> di sp. <u>vettoriali</u>?

sia $\underline{v} \in T_pM$ $\quad \underline{v} = a\,\underline{x}_{u_1} + b\,\underline{x}_{v_1}$

$df_p(\underline{v}) \in T_{f(p)}N \quad df_p(\underline{v}) = c\,\underline{y}_{u_2} + d\,\underline{y}_{v_2}$

scegliamo $\underline{x}, \underline{y}$ param locali su M, N tali che df_p sia dato dalla matrice identità.

$\Longrightarrow \quad a = c, \quad b = d$

$$\|\underline{v}\|^2 = E_1 a^2 + 2F_1 ab + G_1 b^2$$

$$\|df_p(\underline{v})\|^2 = E_2 c^2 + 2F_2 cd + G_2 d^2$$

dunque ponendo $a = c$, $b = d$ si ha:

$$\boxed{\begin{array}{l} \|\underline{v}\|^2 = \|df_p(\underline{v})\|^2 \quad \forall\, \underline{v} \in T_pM \\ \Longleftrightarrow E_1 = E_2, \quad F_1 = F_2, \quad G_1 = G_2 \end{array}}$$

Cioè: **Proposizione**: sia $f: M \to N$ diffeomorfismo. Le appl. lineari (4)

- df_p sono isometrie di sp. vettoriali $\forall p \in M$

$\Longleftrightarrow$

- esistono coord. locali su M ed N tali che

$E_1 = E_2, \ F_1 = F_2, \ G_1 = G_2$ (a meno dei nomi delle variabili)

Si ha:

Teorema $f: M \to N$ diffeomorfismo. Allora

f isometria $\Longleftrightarrow$ df_p isom. di sp. vett. $\forall p \in M$

Dim

$\Longleftarrow$ prendiamo coord. locali tali che

$df_p = Id \quad \forall p$

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{E_1 (u')^2 + 2F_1 u'v' + G_1 (v')^2}\, dt$$

$$\ell(f(C)) = \int_a^b \sqrt{E_2 (u')^2 + 2F_2 u'v' + G_2 (v')^2}\, dt$$

I forme uguali $\Longrightarrow$ integrali uguali

$\Longrightarrow$ vuol dire: integrali uguali $\Rightarrow$ integrandi uguali

ipotesi: $\forall C \subseteq M \quad \ell(C) = \ell(f(C))$

$\forall \dots$
$$\int_a^b \sqrt{E_1 (u')^2 \dots}\, dt =$$
$$\int_a^b \sqrt{E_2 (u')^2 + \dots}\, dt$$

consideriamo b <u>variabile</u> $\rightarrow$ cambio le curve C e $f(C)$ ma le lunghezze rimangono uguali. Quindi, derivando rispetto a b si ottiene:

$$E_1 (u')^2 + 2F_1 u'v' + G_1 (v')^2 =$$
$$= E_2 (u')^2 + 2F_2 u'v' + G_2 (v')^2$$

vera $\forall$ curva. Scelgo C: $u'(0) = 1$
$v'(0) = 0$

$\Longrightarrow E_1 = E_2$

in modo simile $G_1 = G_2$ e poi $F_1 = F_2$ ∎

Conclusione: mettendo insieme tutto si ha: (6)

$$\boxed{\text{M ed N sono (localmente) isometriche se e solo se esistono coord locali tali che le prime forme coincidano}}$$

Esempio: $M =$ catenoide
$N =$ elicoide

$$\underline{x}_M : \begin{cases} x = \cosh v \cos u \\ y = \cosh v \sin u \\ z = v \end{cases}$$

$$\underline{x}_N = \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = u \end{cases}$$

Si ottiene: (7)

$$E_M = \cosh^2 v \,, \quad F_M = 0 \,, \quad G_M = \cosh^2 v$$

$$E_N = 1 + v^2 \,, \quad F_N = 0 \,, \quad G_N = 1$$

cioè:

$$ds^2_M = \cosh^2 v \, (du^2 + dv^2)$$

$$ds^2_N = (1 + v^2) \, du^2 + dv^2$$

cambio di coordinate per l'elicoide:

$$u = u_1 \,, \qquad v = \sinh v_1$$

$$ds^2_N = (1 + \sinh^2 v_1) \, du_1^2 + \cosh^2 v_1 \, dv_1^2$$

$$(dv = \cosh v_1 \, dv_1)$$

$$= \cosh^2 v_1 \, (du_1^2 + dv_1^2)$$

cioè: catenoide ed elicoide sono loc. isometriche –

Superfici orientabili

Ricominciamo alle 9:52

$$\ell(C_b) = \int_a^{b} \Phi(t)\,dt = H(b)$$

$$\ell(f(C_b)) = \int_a^{b} \varphi(t)\,dt = K(b)$$

$$\forall b \quad \ell(C_b) = \ell(f(C_b))$$

significa $H(b) \equiv K(b)$

$$\Rightarrow \quad H'(b) = K'(b)$$

$$\forall b \quad \Phi(b) = \varphi(b)$$

cioè: $\Phi(t) = \varphi(t) \quad \forall t$

Superfici orientabili

Sia V sp. vettoriale reale. Un'orientazione su V è il dato di una base ordinata

$$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

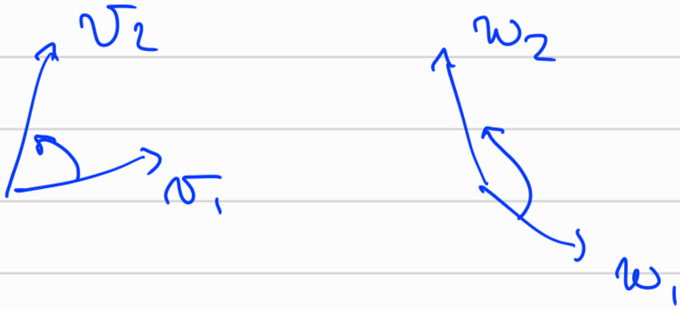
Due basi danno la stessa orientazione se detta P la matrice del camb. di base, si ha

$$\boxed{\det P > 0}$$

Esempi:

$\dim V = 1$ orientazione = verso di percorrenza

$\dim V = 2$ orientazione = verso di rotazione (oraria o antioraria)



$\dim V = 3$ orientazione = regola della mano destra o sinistra sia S superficie, $p \in S$,

$\underline{x} : U \to S$ param locale

$\to \{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ base di T_pS

$\to$ orientazione su T_pS

<u>osservazione</u>: se $\underline{y} : U \to S$

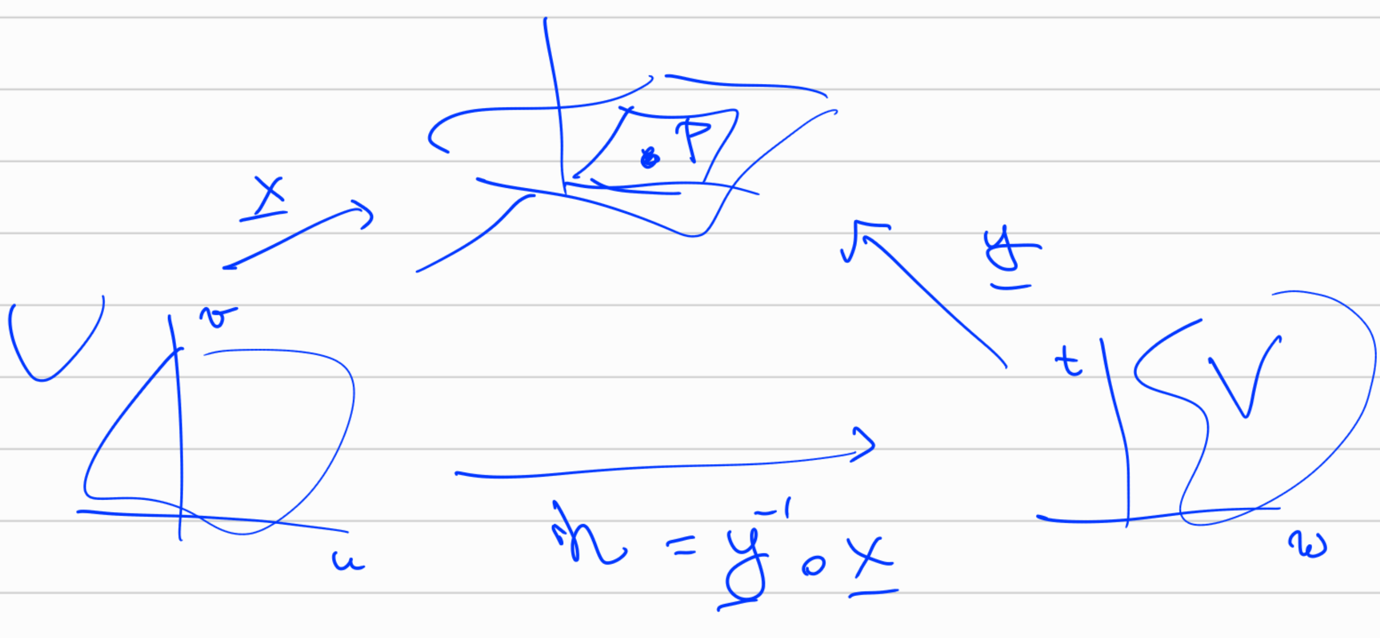
è data da $\underline{y}(u,v) = \underline{x}(v,u)$

base $\{\underline{y}_u, \underline{y}_v\} = \{\underline{x}_v, \underline{x}_u\}$

camb. di base $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det P = -1 < 0$

<u>cioè</u>: $\underline{x}$ e $\underline{y}$ danno orientazioni <u>opposte</u>

Ultima osservazione



so T_pS ha 2 orientazioni:

$$\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\} \quad e \quad \{\underline{y}_w, \underline{y}_t\}$$

le orientazioni sono la stessa $\iff$

$$\det J(h) > 0.$$

Definizione: S superficie regolare.

S si dice orientabile se esiste una famiglia di param locali $\{U_i, \underline{x}_i\}$ tale che:

① $$\bigcup_{i \in I} \underline{x}_i(U_i) = S$$

② $\forall i, j$ $$\det J(\underline{x}_j^{-1} \circ \underline{x}_i) > 0$$

"famiglia di orientazioni compatibile"

Ogni superficie è localmente orientabile, ma non necessariamente orientabile

Esempi: ① S grafico

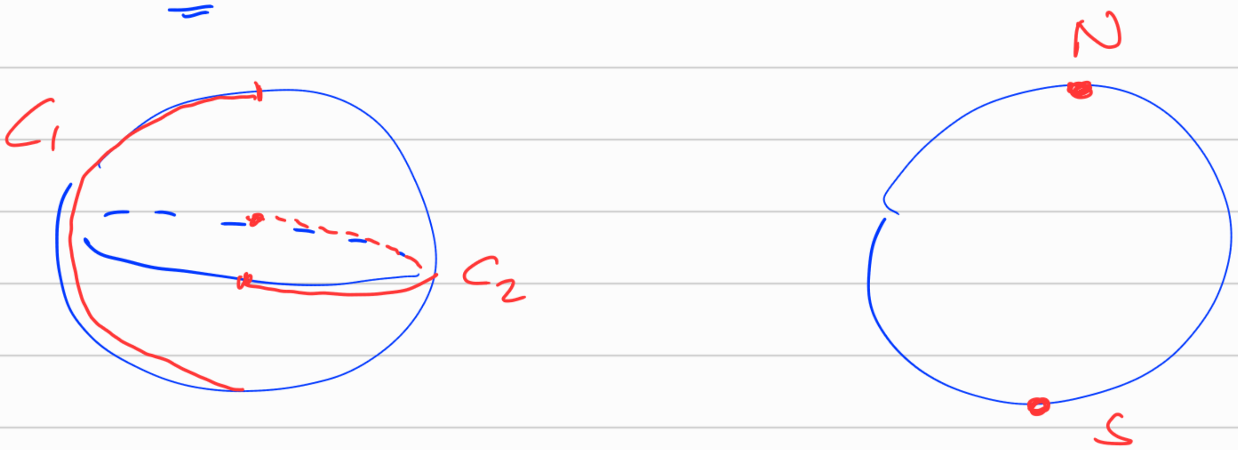
$S = \underline{x}(U)$ dove $\underline{x}(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$\longrightarrow$ 1 sola param $\Rightarrow$ orientabile

② S = sfera

coord polari (anche proiez. stereogr.)

hanno $\underline{\underline{2}}$ carte locali



2 carte $\longrightarrow$ 1 cond di compatibilità da verificare

- $S^2 \setminus \{C_1 \cup C_2\}$ connesso
- $S^2 \setminus \{N, S\}$ connesso

quindi se $\det J(h)$ positivo in un pto

$\Rightarrow$ positivo sempre $\Rightarrow$ OK se $\det J(h)$ negativo in un pto (13)

$\Rightarrow$ negativo sempre $\Rightarrow$ cambio una delle due param $\Rightarrow$ OK

Conclusione:

S ha un atlante formato da 2 carte con intersezione connessa

$\Rightarrow$ S è orientabile.

Teorema S è orientabile $\Leftrightarrow$

esiste su S un campo differenziabile di vettori normali e unitari.

Dimostrazione

$\Rightarrow$ S orientabile $\{\underline{x}_i\}$ atlante comp.

definisco: sia $p \in \underline{x}(U)$

$$\underline{N}(p) = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}$$

chiaro che: differenziabile, normale, unitario devo verificare: ben definito

$p \in \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$

ricordiamo:

$$\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v = (\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t) \cdot \det J$$

$$\Longrightarrow \quad N_{\underline{x}}(p) = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t}{\|\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t\|} \cdot \frac{\det J}{|\det J|} =$$

$$= \frac{\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t}{\|\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t\|} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}.$$

Viceversa:

$\Longleftarrow$ esiste N, devo trovare un atlante compatibile.