Teorema sia S superficie regolare. (1)

S è orientabile $\Longleftrightarrow$ esiste su S un campo differenziabile normale, unitario e differenziabile

abbiamo già visto $\Longrightarrow$

dimostriamo ora $\Longleftarrow$

sia $\{U_i, \underline{x}_i\}$ un atlante (qualunque) di S

posso supporre che i domini U_i siano tutti connessi.

sia $\underline{N} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ il campo normale, unitario, diff. dato per ipotesi

sia $p_0 \in S$ ci sono 2 vettori normali, unitari

$\underline{N}(p_0)$, $\dfrac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|x_u \wedge x_v\|}(p_0)$

dove $p_0 \in \underline{x}(U)$

dunque $\dfrac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge x_v\|}(p_0) = \pm \underline{N}(p_0)$

uguali $\longrightarrow$ OK

opposti $\longrightarrow$ cambio $\underline{x}(u,v)$ in $\underline{y}(u,v) = \underline{x}(v,u)$

ora: possiamo supporre che:

$$\underline{N}(p_0) = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}(p_0)$$

Consideriamo $g(p) = \underline{N}(p) \cdot \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}(p)$

$g(p)$ vale ± 1, è continua, il dominio è connesso, $g(p_0) = 1$

$$\Longrightarrow \quad g(p) = 1 \quad \forall p \in \underline{x}(U)$$

Si ottiene un atlante $\{U_i, \underline{x}_i\}$ tale che: $\forall p \in S$ se $p \in \underline{x}_i(U_i)$ allora

$$\underline{N}(p) = \frac{\underline{x}_{iu} \wedge \underline{x}_{iv}}{\| \quad — \quad \|}(p).$$

Adesso dimostriamo che qs atlante è compatibile

siano $\underline{x}: U \to S$; $\underline{y}: V \to S$ due param dell'atlante tali che $\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V) \neq \emptyset$ e sia $p \in \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$. Si ha:

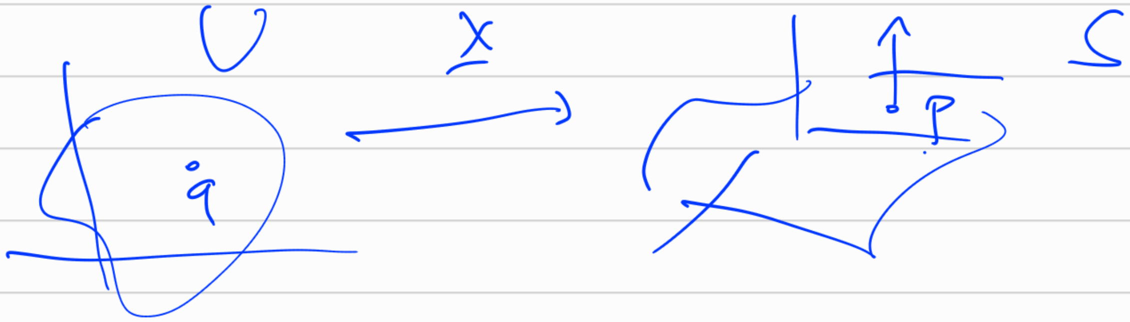
$$\underline{N}(p) = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}(p) \underset{?}{=} \frac{\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t}{\|\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t\|}(p)$$

in generale:

$$\frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t}{\|\underline{y}_w \wedge \underline{y}_t\|} \cdot \frac{\det J}{|\det J|}$$

$$\Longrightarrow \frac{\det J}{|\det J|} = 1 \Longrightarrow \det J > 0$$

e quindi l'atlante è compatibile ∎



$$N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

va bene scrivere $N(p)$

$$\frac{\underline{X}_u \wedge X_v}{\| - \|}(q) = N(\underline{x}(q))$$

Corollario sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile sia $a \in \mathbb{R}$ val. regolare. Allora

$S = f^{-1}\{a\}$ è orientabile.

dim

gradiente di f : $\nabla f(p) = (f_x(p), f_y(p), f_z(p))$

· a val. regolare $\Rightarrow \nabla f(p) \neq 0 \quad \forall p \in S$

·· gradiente $\Rightarrow \nabla f(p) \perp T_pS$

dim di ⊛ : sia $\underline{x}: U \to S$ param con $p \in \underline{x}(U)$. si ha:

$$f(\underline{x}(u,v)) \equiv a \quad \to \text{ il diff. è nullo}$$

se $\underline{v} \in T_pS$, sia $\alpha: I \to S$ curva con $\alpha'(0) = \underline{v}$. Si ha

$$f(\alpha(t)) \equiv a \Longrightarrow \text{derivata nulla}$$

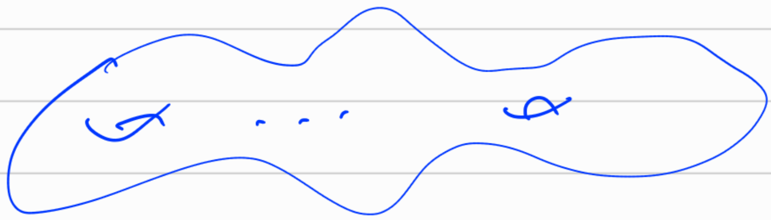
$$f_x(p)\cdot x'(0) + f_y(p)\cdot y'(0) + f_z(p)\cdot z'(0) = 0$$

cioè: $\nabla f(p) \perp \alpha'(0)$.

Dunque $\nabla f(p)$ è normale a S.

$$\underline{N}(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \quad \text{unitario} \quad \blacksquare$$

- Somme connesse di tori sono orientabili



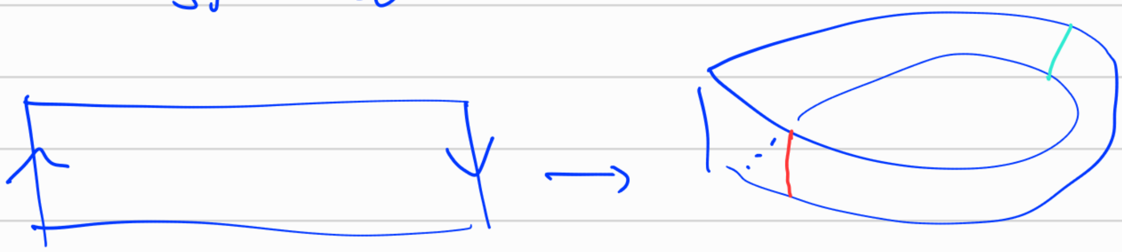
→ trovo una equazione cartesiana.

non è difficile convincersi che posso trovare un'eq della forma:

$$z^2 = f(x,y) : \boxed{\text{trovare } f}$$

• il nastro di Möbius non è orientabile ⑤

→ leggere il do Carmo



l'atlante studiato sul do Carmo ha 2 param. locali ma l'intersezione non è connessa.

— o —

Mappa di Gauss

S superficie orientabile, sia $\underline{N}$ un campo normale, unitario, differenziabile

$\underline{N} : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\underline{N}$ induce un'orientazione su T_pS, $\forall p\, S$ in qs. modo:
sia $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ base di T_pS

$\{\underline{v}, \underline{w}\}$ si dice positiva se

$$\langle \underline{v} \wedge \underline{w}, \underline{N}(p) \rangle > 0$$

pensando i vettori $\underline{N}(p)$ applicati nell'origine, il punto finale di qs vettori è sulla sfera unitaria posso pensare:

$$\boxed{\underline{N} : S \longrightarrow S^2} \subseteq \mathbb{R}^3$$

si chiama mappa di Gauss.

Studiamo il differenziale di $\underline{N}$

sia $p \in S$

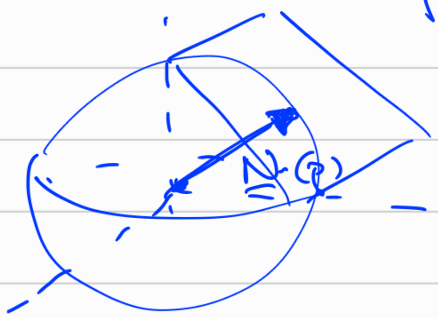
$$d\underline{N}_p : T_pS \longrightarrow T_{N(p)}S^2$$

appl. lineare fra spazi vett. di dim 2

Lemma T_pS e $T_{N(p)}S^2$ coincidono

Dim. • T_pS = sp. vettoriale in $\mathbb{R}^3$ $\perp$ $\underline{N}(p)$

• $T_{\underline{N}(p)}S^2$ = sp. tangente alla sfera in un suo punto =



piano perpendicolare al raggio vettore

= $\perp$ a $\underline{N}(p)$ ∎

dunque

$$d\underline{N}_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$

è un endomorfismo.

Descriviamo dN_p in termini geometrici

$\underline{w} \in T_pS \longrightarrow$ sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$
$\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{w}$

$$d\underline{N}_p(\underline{w}) = \frac{d}{dt}\left[N \circ \alpha\right]\Big|_{t=0} = \underline{N}'(0)$$

= vettore tg alla curva $(N \circ \alpha)(t)$ tracciata alla sfera S^2.

$\underline{N} \circ \alpha$ = campo normale ristretto ad α

$\Longrightarrow d\underline{N}_p(\underline{w})$ = derivata direzionale di $\underline{N}$ in $\underline{w}$

$d\underline{N}_p(\underline{w})$ = derivata nella direzione $\underline{w}$

poiché $\|\underline{N} \circ \alpha\| \equiv 1$

la derivata è $\perp$ a $\underline{N} \circ \alpha$ cioè è $\perp$ a $\underline{N}$ $\Rightarrow$ è tangente.

<u>Esempi</u>:

- piano $S: \quad ax + by + cz = d$

$$\underline{N}(p) = N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot (a, b, c)$$

costante $\Longrightarrow dN_p \equiv 0 \quad \forall p \in S$

- S_R = sfera di raggio R

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$\underline{N}$ = campo normale a S_R = vettore che punta verso l'origine

se $p = (x,y,z) \in S_R$

$$\boxed{\underline{N}(p) = \frac{1}{R}(-x,-y,-z)}$$

se $\underline{w} = \alpha'(0)$ $\quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$d\underline{N}_p(\underline{w}) = (\underline{N}\circ\alpha)'(0) =$$

$$= \frac{1}{R}(-x'(0), -y'(0), -z'(0))$$

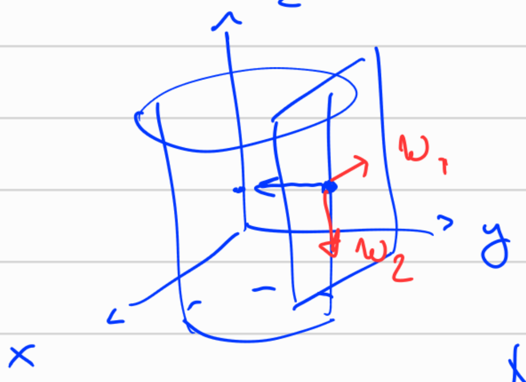
cioè:

$$d\underline{N}_p(\underline{w}) = -\frac{1}{R}\underline{w}$$

cioè: $\quad d\underline{N}_p = -\frac{1}{R} I_{T_pS_R}$

$\longrightarrow$ è diagonalizzabile, ha due autovalori coincidenti pari a $-1/R$

• S = cilindro di raggio R



$$x^2+y^2=R^2$$

se $p=(x,y,z)\in S$

$$\underline{N}(p)=-\frac{1}{R}(x,y,0)$$

$$\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

$$d\underline{N}_p(\alpha'(0))=-\frac{1}{R}(x'(0),y'(0),0)$$

quindi: $\begin{cases} d\underline{N}_p(w_1)=-\frac{1}{R}\underline{w}_1 \\ d\underline{N}_p(w_2)=0 \end{cases}$

due autovalori $-1/R,\ 0$

due autovettori indip $\Longrightarrow$ diagonalizzabile

Proposizione $d\underline{N}_p$ è un endomorfismo autoaggiunto (o simmetrico)

cioè: $\forall\, \underline{v},\underline{w}\in T_pS$ si ha:

$$\boxed{\langle d\underline{N}_p(\underline{v}),\underline{w}\rangle=\langle \underline{v}, d\underline{N}_p(\underline{w})\rangle}$$

<u>dimostrazione</u>

fissiamo una base in T_pS : $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$

dobbiamo verificare: (unica verifica non banale!)

$$< dN_p(\underline{x}_u), \underline{x}_v > = < \underline{x}_u, dN_p(\underline{x}_v) >$$

$$\boxed{dN_p(\underline{x}_u) = \underline{N}_u} \quad , \quad \boxed{dN_p(\underline{x}_v) = \underline{N}_v}$$

prendere $\alpha(t)$ con vettore tg $\alpha'(0) = \underline{x}_u$

e calcolare $(N \circ \alpha)'(0)$

$\alpha(t) = (t, 0)$ (meglio $(t+u_0, v_0)$)

dunque devo dimostrare:

$$< \underline{N}_u, \underline{x}_v > = < \underline{x}_u, \underline{N}_v >$$

$\forall p \in S$: $< N, \underline{x}_u > \equiv 0$ ← derivo rispetto a $\underline{v}$

$< N, \underline{x}_v > \equiv 0$ ← derivo rispetto a $\underline{u}$

$$< \underline{N}_v, \underline{x}_u > + < \underline{N}, \underline{x}_{uv} > \equiv 0$$
$$= \qquad\qquad =$$
$$< \underline{N}_u, \underline{x}_v > + < \underline{N}, \underline{x}_{vu} > \equiv 0$$

perché derivate miste commutano

tesi