Situazione

S = sup. regolare orientabile

$\underline{N} : S \longrightarrow S^2$ mappa di Gauss

se $p \in S$ si ha $dN_p : T_pS \longrightarrow T_pS$

differenziale della mappa di Gauss

dN_p = endomorfismo simmetrico

Sappiamo che: (Teorema Spettrale)

- dN_p diagonalizzabile
- ha una base ortonormale di autovettori

Forma bilineare simmetrica associata a dN_p

$$\varphi : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \langle dN_p(\underline{v}), \underline{w} \rangle$$

$\rightsquigarrow$ forma quadratica:

$$Q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$$

Definizione la seconda forma (quadratica) fondamentale è:

$$\mathrm{II}_p(\underline{v}) = -Q(\underline{v}) = \langle -dN_p(\underline{v}), \underline{v} \rangle$$

"famiglia" di forme: II_p è definita su T_pS

Osservazione: S_1, S_2 (loc.) isometriche $\Longrightarrow$ $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2$

non è vero per II

esempio: piano — cilindro

$\mathrm{II}_p(\underline{v}) \equiv 0$ $\qquad$ $\mathrm{II}_p(\underline{v}) \not\equiv 0$

Vedremo che II_p è legata all'immersione di $S \subseteq \mathbb{R}^3$

— o —

Torniamo alla geometria: curvatura di una superficie

S superficie

$p \in S$ fissato

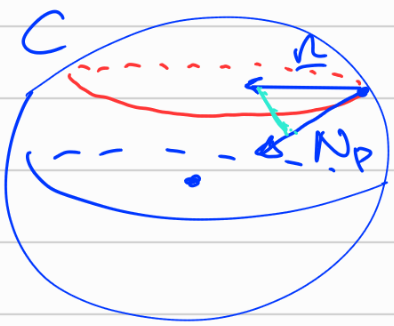
C = curva su S per p

In p possiamo considerare:

- $\underline{N}_p$ = normale alla superficie
- $\underline{t}$ = tangente a C in p
- $\underline{n}$ = normale a C in p
- k = curvatura di C in p

$C \subseteq S \implies \underline{t} \in T_pS \implies \underline{t} \perp \underline{N}_p$

$\underline{N}_p$ e $\underline{n}$ non sono necessariamente paralleli



$\underline{n}$ sta sul piano della circonferenza

$\underline{N}_p$ punta verso il centro della sfera

Sia θ = angolo fra $\underline{n}$ e $\underline{N}$ o meglio

$$\cos\theta = \langle \underline{n}, \underline{N}_p \rangle$$

Definizione La curvatura normale della curva C nel punto p è il numero:

$$k_n = k \cdot \cos\theta = k \cdot \langle \underline{n}, \underline{N}_p \rangle = \langle \underline{t}', \underline{N}_p \rangle$$

Fisicamente: $\underline{t}' =$ accelerazione

in p, c'è il piano tangente T_pS e il vettore normale N_p:

$$\mathbb{R}^3 = T_pS \oplus \mathbb{R}\cdot \underline{N}_p$$

$$\underline{t}' = \underbrace{\underline{t}'_g}_{\text{tangenziale}} + \underbrace{\underline{t}'_n}_{\text{normale}}$$

$\underline{t}'_n =$ accelerazione normale $=$ reazione vincolare

curvatura normale $=$ porzione di curvatura "spiegata" dal fatto che $C \subseteq S$.

C'è una relazione stretta fra curvatura normale e seconda forma

Proposizione sia S sup. regolare, sia $p \in S$

sia $\underline{v} \in T_pS$ tale che $\|\underline{v}\| = 1$.

Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva tale che
- param. x arclength.
- $\alpha(0) = p$
- $\alpha'(0) = \underline{v}$

Allora: $\boxed{k_n = \mathrm{II}_p(\underline{v})}$

dove k_n = curv. normale di α in p (5)

dimostrazione

α contenuta in S

$$\underline{N}(s) = \underline{N}(\alpha(s))$$

cioè campo normale ristretto alla curva

si ha: $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)} S$ è $\perp$ a $\underline{N}(s)$

cioè: $\langle \underline{N}(s), \alpha'(s) \rangle \equiv 0 \quad \forall s \in I$

derivando si ha: $\forall s \in I$

$$\boxed{\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = - \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_p(\underline{v}) &= \mathrm{II}_p(\alpha'(0)) \\
&= - \langle d\underline{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\
&= - \langle \underline{N}'(0), \alpha'(0) \rangle \\
&= \langle \underline{N}(0), \alpha''(0) \rangle \\
&= \langle \underline{N}(0), k\, \underline{n} \rangle \\
&= k_n \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

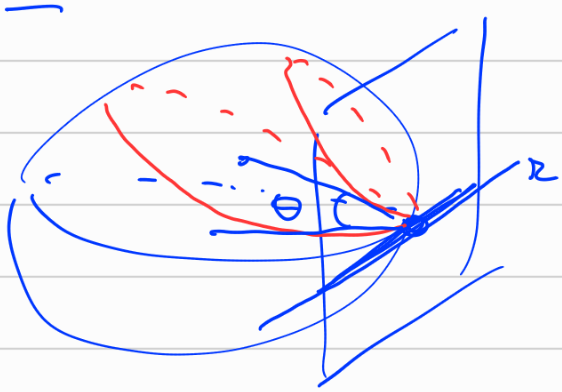
Quindi k_n dipende solo dal vettore tangente a C (6)

poichè $\mathrm{II}_p(-\underline{v}) = (-1)^2 \mathrm{II}_p(\underline{v}) = \mathrm{II}_p(\underline{v})$

$\longrightarrow$ dipende solo dalla <u>direzione</u> tangente

<u>Teorema di Meusnier</u> Tutte le curve tracciate su S con la stessa retta tangente in p hanno la stessa curvatura normale.

<u>Esempio</u>: sfera : fissiamo la retta r



fascio di piani di asse r
$\longrightarrow$ otteniamo tante circonferenze tutte tangenti ad r

hanno tutte la stessa curvatura normale

<u>Osservazione</u>: $k_n : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

S^1 = circonferenza unitaria nel piano tangente

Studiamo la funzione k_n, al variare di $\underline{v} \in S^1 \subseteq T_pS$ (7)

torniamo all'algebra

$$dN_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$

<u>definizione</u>: consideriamo $-dN_p$

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ base di autovettori di $-dN_p$ <u>ortonormale</u>

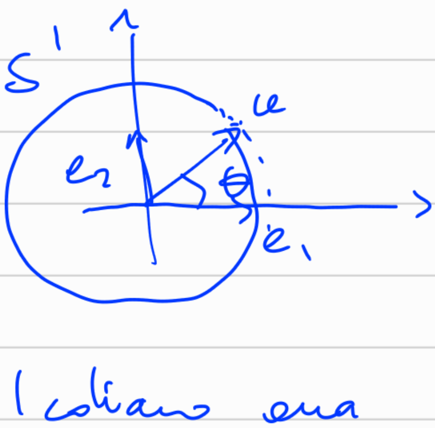
$\{k_1, k_2\}$ autovalori corrispondenti

$$\left.\begin{aligned} -dN_p(\underline{e}_1) &= k_1 \underline{e}_1 \\ -dN_p(\underline{e}_2) &= k_2 \underline{e}_2 \end{aligned}\right\} \text{ autovett}$$

<u>se</u>: $\underline{u} \in T_pS$, $\|\underline{u}\| = 1$

posso scrivere $\underline{u} = \cos\theta \cdot \underline{e}_1 + \sin\theta \cdot \underline{e}_2$

T_pS



Calcoliamo ora $k_n(\underline{u})$

$$k_n(\underline{u}) = II_p(\underline{u})$$

$$= -\langle d\underline{N}_p(\underline{u}), \underline{u} \rangle$$

$$= \langle -d\underline{N}_p(\cos\theta\, \underline{e}_1 + \sin\theta\, \underline{e}_2), \cos\theta\, \underline{e}_1 + \sin\theta\, \underline{e}_2 \rangle$$

$$= \langle k_1 \cos\theta\, \underline{e}_1 + k_2 \sin\theta\, \underline{e}_2, \cos\theta\, \underline{e}_1 + \sin\theta\, \underline{e}_2 \rangle$$

$$\boxed{k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta}$$

Formula di Eulero

Ricordiamo: $k_n : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

k_n continua, S^1 compatto $\Longrightarrow$ esistono max e min

basta calcolare max e min di k_n con $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\longrightarrow$ max e min $= k_1, k_2$

punti di max, min : $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

Conclusione

k_1, k_2, che hanno una definizione **algebrica** (sono gli autoval di $-dN_p$)

hanno un significato **geometrico** (sono il max e min della curvatura normale)

Inoltre, le **direzioni** in cui si ha curvatura normale max e minima sono **ortogonali** fra loro.

Vocabolario

- k_1, k_2 si dicono **curvature principali**
- $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ si dicono **direzioni principali di curvatura**
- $K = k_1 \cdot k_2 = \det(-dN_p)$

  si dice **curvatura Gaussiana**
- $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(-dN_p))$

  si dice **curvatura media**

Il punto $p \in S$ è detto:

- ellittico se $K > 0$
- iperbolico se $K < 0$
- parabolico se $K = 0$, $dN_p \not\equiv 0$
- planare se $dN_p \equiv 0$
- ombelicale se $k_1 = k_2$

Teorema sia S sup. regolare tale che tutti i punti sono ombelicali. Allora S è una porzione di piano oppure di sfera.