Sia S sup. regolare, $p \in S$ (1)

sia $\underline{x} : U \longrightarrow S$ par. locale : $p \in \underline{x}(U)$

Fissiamo l'orientazione data da

$$\underline{N} = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \|}$$

$\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ base di T_pS

$$d\underline{N}_p(\underline{x}_u) = \underline{N}_u \quad , \quad d\underline{N}_p(\underline{x}_v) = \underline{N}_v$$

poiché $\underline{N}_u, \underline{N}_v \in T_pS$ possiamo scrivere :

$$d\underline{N}_p(\underline{x}_u) = \underline{N}_u = a_{11}\underline{x}_u + a_{21}\underline{x}_v$$

$$d\underline{N}_p(\underline{x}_v) = \underline{N}_v = a_{12}\underline{x}_u + a_{22}\underline{x}_v$$

cioè :

$$d\underline{N}_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

rispetto alla base $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$

Vediamo la seconda forma II_p

sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$, $\alpha(0) = p$

$$\alpha'(0) = \underline{x}_u \cdot u'(0) + \underline{x}_v \cdot v'(0)$$

2

$$II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle$$

$$= -\langle \underline{N}_u \cdot u'(0) + \underline{N}_v \cdot v'(0), \underline{x}_u u'(0) + \underline{x}_v v'(0)\rangle$$

$$= e\cdot(u'(0))^2 + 2f\, u'(0)\cdot v'(0) + g\,(v'(0))^2$$

dove:

$$e = -\langle \underline{N}_u, \underline{x}_u\rangle = \langle \underline{N}, \underline{x}_{uu}\rangle$$

$$f = -\langle \underline{N}_u, \underline{x}_v\rangle = -\langle \underline{N}_v, \underline{x}_u\rangle = \langle \underline{N}, \underline{x}_{uv}\rangle$$

$$g = -\langle \underline{N}_v, \underline{x}_v\rangle = \langle \underline{N}, \underline{x}_{vv}\rangle$$

cioè: la matrice della II_p è

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$ nella base $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$

ricordiamo che la matrice della I_p è:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$$E = \langle \underline{x}_u, \underline{x}_u\rangle$$

$$F = \langle \underline{x}_u, \underline{x}_v\rangle$$

$$G = \langle \underline{x}_v, \underline{x}_v\rangle$$

Gauss scrive
$e = D$
$f = D'$
$g = D''$
notazione non più in uso

Scriviamo adesso la matrice di $d\underline{N}_p$ 3

$$\boxed{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = -\langle d\underline{N}_p(\underline{v}), \underline{w} \rangle = -\langle \underline{v}, d\underline{N}_p(\underline{w}) \rangle}$$

Nella base $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v\}$ scriviamo:

A = matrice della I forma

B = matrice di φ (= matrice di II)

C = matrice di $d\underline{N}_p$

$${}^t\underline{v} \cdot B \cdot \underline{w} = -{}^t\underline{v} \cdot A \cdot (C\underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$$

$$= -{}^t\underline{v} \cdot (AC) \cdot \underline{w} \quad \forall \underline{v}, \underline{w}$$

$$\Rightarrow \quad B = -AC$$

$$\Rightarrow \quad -C = A^{-1} \cdot B$$ uguaglianza matriciale

Dunque in termini di matrici si ha:

$$-d\underline{N}_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad K = \det(-d\underline{N}_p)$$

$$\boxed{K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}}$$

Con un po' di calcoli si ottiene:

$$\boxed{H = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}}$$

Si può ricavare anche k_1, k_2:

$$k_1 \cdot k_2 = K, \qquad k_1 + k_2 = 2H$$

→ radici dell'eq. di 2^ grado:

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$$

<u>Esempio</u>: <u>toro</u>

$$\underline{x}(u,v) = \begin{cases} x = (a + r\cos v) \cdot \cos u \\ y = (a + r\cos v) \cdot \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$$

$$\underline{x}_u = \left(-(a + r\cos v) \cdot \sin u,\ (a + r\cos v)\cos u,\ 0\right)$$

$$\underline{x}_v = \left(-r\sin v \cdot \cos u,\ -r\sin v \cdot \sin u,\ r\cos v\right)$$

$$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = (a + r\cos v)^2$$

$$F = 0, \quad G = r^2$$

5

$$\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \| = \sqrt{EG - F^2} =$$

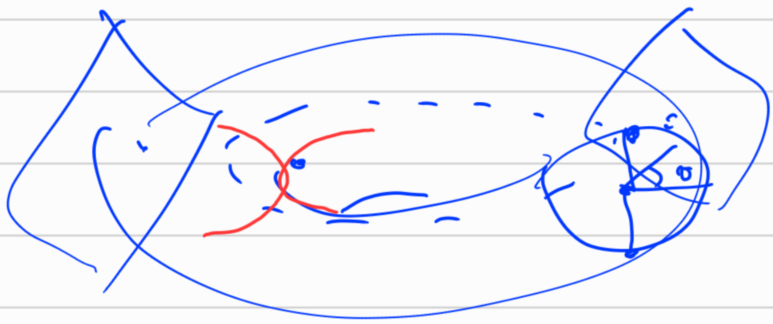
$$= \sqrt{(a + r\cos v)^2 \cdot r^2} =$$

$$= (a + r\cos v) \cdot r$$

$$e = N \cdot \underline{x}_{uu} = \cos v \cdot (a + r\cos v)$$

$$f = 0, \quad g = r$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \boxed{\frac{\cos v}{r \cdot (a + r\cos v)}}$$



- $\cos v > 0$
  esterno del toro

- $\cos v < 0$
  interno del toro

- $\cos v = 0$
  "sopra e sotto"

La curvatura gaussiana K è una funzione scalare che non dipende dalle coord. locali

$$K : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

Scopo: trovare una formula che esprime K usando solo la I forma in termini di E, F, G e loro derivate.

Cominciamo a calcolare:

- Scriviamo la matrice di $d\underline{N}_p$

$$d\underline{N}_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = - \mathrm{I}_p^{-1} \cdot \mathrm{II}_p$$

si ottiene:

$$a_{11} = \frac{Ff - Ge}{EG - F^2}, \quad \ldots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{N}_u = \dfrac{Ff - Ge}{EG - F^2} \underline{x}_u + (\ldots) \underline{x}_v \\ \underline{N}_v = \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

- $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{N}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

$$(\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3_v = T_p \mathbb{R}^3_a)$$

- $$\underline{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \underline{x}_u + \Gamma_{11}^2 \underline{x}_v + e \cdot \underline{N}$$

$$\underline{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \underline{x}_u + \Gamma_{12}^2 \underline{x}_v + f \cdot \underline{N}$$

$$\underline{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \underline{x}_u + \Gamma_{22}^2 \underline{x}_v + g \cdot \underline{N}$$

i Γ_{ij}^k si chiamano <u>simboli di Christoffel</u>

(coefficienti della connessione)

verifichiamo che e, f, g sono corretti

$$\underbrace{\underline{x}_{uu} \cdot \underline{N}}_{} = (\qquad\qquad) \cdot N = e\, N \cdot N = \underbrace{e}_{}$$

? $\underline{\underline{\text{Sì}}}$ (per definizione)

stesso per f, g.

- Determiniamo i Γ_{ij}^k

$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u$ e derivo rispetto a u, v

$$E_u = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_u + \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} = 2\, \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu}$$

$$E_v = 2\, \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uv}$$

Cioè:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{x}_{uu}\cdot\underline{x}_u = \frac{1}{2}E_u, \quad \underline{x}_{uv}\cdot\underline{x}_u = \frac{1}{2}E_v \\ &\underline{x}_{uv}\cdot\underline{x}_v = \frac{1}{2}G_u, \quad \underline{x}_{vv}\cdot\underline{x}_v = \frac{1}{2}G_v \end{aligned}}$$

$F = \underline{x}_u\cdot\underline{x}_v$ derivo risp. a u

$$F_u = \underline{x}_{uu}\cdot\underline{x}_v + \underline{x}_u\cdot\underline{x}_{uv}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\underline{x}_{uu}\cdot\underline{x}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v \\ &\underline{x}_{vv}\cdot\underline{x}_u = F_v - \frac{1}{2}G_u \end{aligned}}$$

moltiplicando scalarmente $\underline{x}_{uu}$ con $\underline{x}_u$ e $\underline{x}_v$, dalla 1ª equazione si ricava

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$

$\rightarrow$ risolvo (con Cramer) e ottengo Γ^1_{11}, Γ^2_{11} in funzione di E, F, G e loro derivate.

Conclusione: tutti i termini

Γ_{ij}^{k} dipendono solo dalla I forma.

Per ottenere le condizioni cercate, si calcola una derivata terza

$$\underline{X}_{uuv} = \alpha \underline{X}_u + \beta \underline{X}_v + \gamma \underline{N}$$

$$\underline{X}_{uuv} = (\underline{X}_{uu})_v = (\underline{X}_{uv})_u$$

calcoliamo nei due modi diversi e ci concentriamo sul termine β.

$$(\underline{X}_{uu})_v = (\Gamma_{11}^{1} \underline{X}_u + \Gamma_{11}^{2} \underline{X}_v + e \underline{N})_v$$

$$= (\Gamma_{11}^{1})_v \cdot \underline{X}_u + \underline{\Gamma_{11}^{1} \underline{X}_{uv}} +$$

$$(\Gamma_{11}^{2})_v \cdot \underline{X}_v + \underline{\Gamma_{11}^{2} \underline{X}_{vv}} +$$

$$e_v N + e N_v$$

non interessa perché non sono multipli di $\underline{X}_v$

è multiplo di $\underline{X}_v$ ma dipende da $\Gamma \rightarrow$ dalla I forma

$$\underline{X}_{uv} = \dots + \Gamma_{12}^{2} \underline{X}_v + \dots$$

$$\underline{X}_{vv} = \dots + \Gamma_{22}^{2} \underline{X}_v + \dots$$

danno contributo a β che dipende

solo da simboli di Christoffel

$\longrightarrow$ solo dalla I forma

$$\beta = (\text{dipende dalla I forma}) + (\text{contributo di } e\,\underline{N}_v)$$

si ha (riguardare le formule all'inizio)

$$e\,\underline{N}_v = e\left[\frac{Fg - Gf}{EG - F^2}\,\underline{X}_u + \underbrace{\frac{Ff - Eg}{EG - F^2}}\,\underline{X}_v\right]$$

Conclusione:

$$\beta = e\,\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} + \left(\begin{array}{c}\text{termini che}\\ \text{dipendono dalla}\\ \text{I forma}\end{array}\right)$$

facendo il calcolo analogo per $(X_{uv})_u$ si ottiene

$$\beta = f\,\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} + \left(\begin{array}{c}\text{termini che dipendono}\\ \text{dalla I forma}\end{array}\right)$$

uguagliando si ottiene

$$e\,\frac{\cancel{Ff} - Eg}{EG - F^2} - f\,\frac{\cancel{Fe} - Ef}{EG - F^2} = \text{dipende solo dalla I forma}$$

$-EK$ = dipende dalla I forma 11

$$\Longrightarrow \quad K = -\frac{1}{E}\Big(\qquad\qquad \Big)$$

dipende solo dalla I forma

ad egregium:

THEOREMA Si superficies curvas in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.