Oggi non ci sarà ricevimento (1)

→ domani alle 15:30.

—o—

Foglio di esercizi

$\underline{x}(u,v) = (uv, u^2, u+v)$

$\underline{x}_u = (v, 2u, 1)$

$\underline{x}_v = (u, 0, 1)$

$$\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v & 2u & 1 \\ u & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2u\,\underline{i} + (u-v)\,\underline{j} - 2u^2\,\underline{k}$$

$(2u, u-v, -2u^2) = (0,0,0)$

$\rightarrow u=0 \rightarrow v=0$

- $\underline{x}$ iniettiva

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u^2 \\ z = u+v \end{cases}$$

non iniettiva sulla retta $u+v=0$

i punti $(u,-u)$ e $(-u,u)$

hanno la stessa immagine

Es. 2

$$\underline{x}(u,v) = (u-v,\ u^2,\ v^2)$$

$$\underline{x}_u = (1,\ 2u,\ 0)$$

$$\underline{x}_v = (-1,\ 0,\ 2v)$$

$$\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v = (4uv,\ -2v,\ 2u)$$

$(u,v) \neq (0,0)$

$$\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \| = \sqrt{16u^2v^2 + 4v^2 + 4u^2}$$

$$= 2\sqrt{u^2 + 4u^2v^2 + v^2}$$

$$N = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \|} = \frac{1}{2\sqrt{u^2+4u^2v^2+v^2}} \cdot (4uv,\ -2v,\ 2u)$$

$E = 1 + 4u^2$ $\qquad \| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \| = \sqrt{EG - F^2}$

$F = -1$

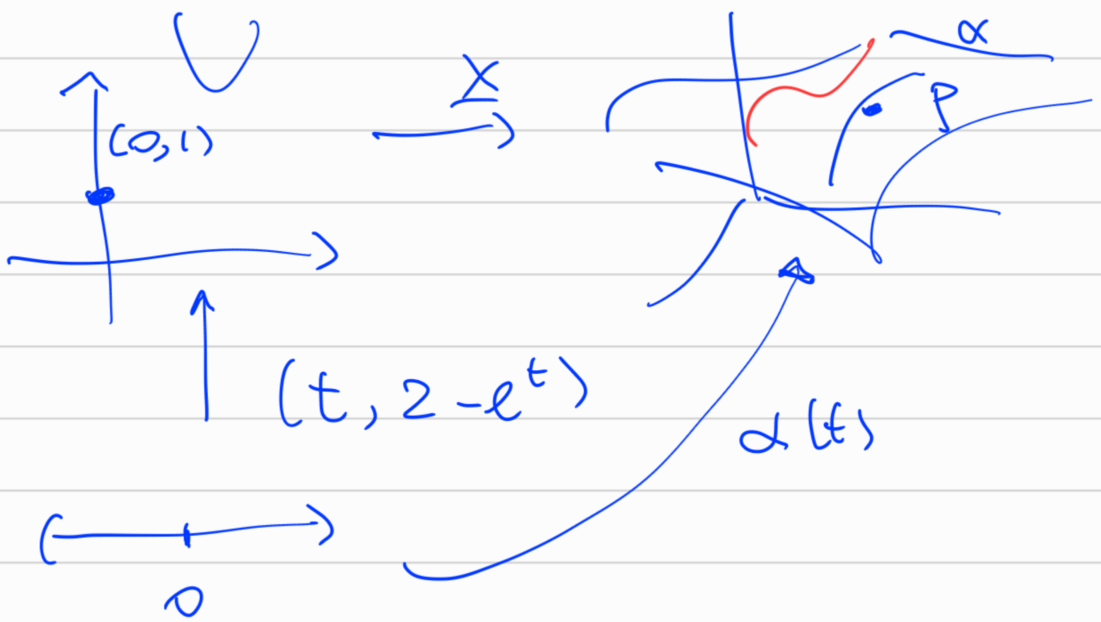
$G = 1 + 4v^2$

$\underline{x}_{uu} = (0,2,0)$ $\quad \underline{x}_{uv} = (0,0,0)$ $\quad \underline{x}_{vv} = (0,0,2)$

Calcolare curv. normale di S nel pto

- $p = \underline{x}(0,1)$
- nella direzione del vett. tg a $\alpha(t) = \underline{x}(t, 2-e^t)$

③



$P = (-1, 0, 1)$

- per quale t si ha $\alpha(t) = P$?

$$(t, 2-e^t) = (0,1) \Rightarrow t = 0$$

$P = \alpha(0) \longrightarrow$ la direz. tg è data da $\underline{\underline{\alpha'(0)}}$

$$\underline{u} = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \text{versore tg}$$

$$k_n = \mathrm{II}(\underline{u})$$

in qs caso: $t=0$, $(u,v) = (0,1)$

$$P = \alpha(0) = \underline{X}(0,1) = (-1,0,1)$$

$$\alpha'(0) = \left(\underline{X}(t, 2-e^t)\right)'(0) =$$

$$= \underline{X}_u \cdot 1 + \underline{X}_v \cdot (-e^t)\Big|_{t=0}$$

$$= \underline{x}_u - \underline{x}_v$$ (4)

$$\boxed{\alpha'(0) = (1, -1) \text{ nella base } \{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}}$$

$\|\alpha'(0)\| =$ posso calcolare in $\mathbb{R}^3$
oppure in T_pS

$$\alpha(t) = \left(t - 2 + e^t,\ t^2,\ (2-e^t)^2 \right)$$

$$\alpha'(t) = \ldots,\quad \alpha'(0) = \ldots$$

$$\alpha'(0) = \underline{x}_u - \underline{x}_v \qquad \underline{x}_u = (1, 0, 0)$$

$$\underline{x}_v = (-1, 0, 2)$$

$\alpha'(0) = (2, 0, -2)$ come vettore in $\mathbb{R}^3$

$$\|\alpha'(0)\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha'(0)\|^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 + 6 = 8.$$

5

$$N_p = \frac{1}{2}(0,-2,0) = (0,-1,0)$$

$$e = \underline{x}_{uu} \cdot N = -2 \quad , \quad f = g = 0$$

$$\mathrm{II} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{u} = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$\mathrm{II}(\underline{u}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \cdot (-2) = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

Domanda: calcolare k_n

svolgimento

① usare la II forma

② usare la formula di Eulero

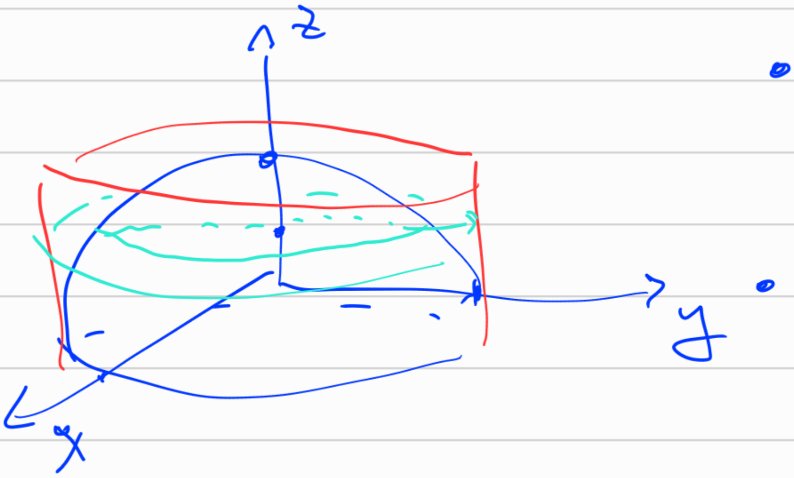
in generale meglio ①

per ② bisogna:
- trovare le curv. princ.
- trovare gli autovettori
- $\underline{u} = \cos\theta\, \underline{e}_1 + \sin\theta\, e_2$

Es. 5 (6)

$S: \quad x^2+y^2+z^2=1 \qquad 0<z<1$

$C: \quad x^2+y^2 \quad =1 \qquad 0<z<1$



• param per S e C facile

$f: S \to C$

$$f(x\,y\,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z \right)$$

provare che è diffeo e scrivere l'inversa.

sia $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{z=1\} \setminus \{z=-1\}$ aperto

f è differenziabile su V

$S \subseteq V \implies f$ diff. su V

è vero che $f(S) \subseteq C$? Sì

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{1-z^2} = 1$$

perché $(x,y,z) \in S$.

funzione inversa $\quad g : C \to S$

$$(xyz) \to (\quad ? \quad)$$

$$x^2+y^2=1,\ z \longrightarrow (\lambda x \ , \lambda y \ , z)$$

$$\lambda = \sqrt{1-z^2}$$

$$g(z) = (x \cdot \sqrt{1-z^2},\ y \cdot \sqrt{1-z^2},\ z)$$

$g(C) \subseteq S$? $\subseteq$

$$(x\sqrt{1-z^2})^2 + (y\sqrt{1-z^2})^2 + z^2 =$$

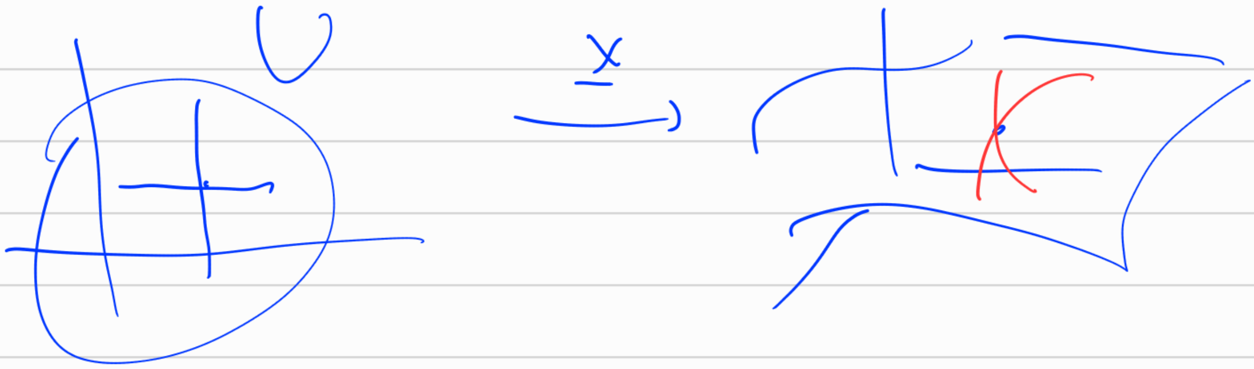
$$= (1-z^2)\underbrace{(x^2+y^2)}_{=1} + z^2 = 1$$

$$g(f(xyz)) = g\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{1-z^2}},\ z\right)$$

$$= (x, y, z)$$

pto 3 : esiste isometria locale fra S e C ? No, per il Th. Egregium : curvature gaussiane diverse.

S superficie $\underline{x}: U \to S$



<u>linee coordinate</u>: immagine su S delle rette verticali e orizzontali

hanno vettori tg $\underline{x}_u$, $\underline{x}_v$

dato un campo vettoriale, le "linee del campo" sono curve per cui in ogni punto il vettore tg è uguale al vettore del campo nel punto.

<u>direzioni principali di curvatura</u>: autovettori di $-dN_p$

<u>linee di curvatura</u> = curve su S per cui in ogni punto hanno vettore tangente una direz. di curvatura

<u>direzioni asintotiche</u>: direzioni in T_pS per cui $k_n = 0$, cioè $\underline{u} \in T_pS$:

$$II(\underline{u}) = 0 \quad \text{(facile da trovare)}$$

<u>linee asintotiche</u>: curve su S tali che il vettore tg è nelle direzioni asintotiche

domanda: trovare le linee asintotiche
DIFFICILE

domanda: data una curva $\alpha(t)$ dire se è una linea asintotica
FACILE