Iniziamo l'ultima parte del corso (1)

"Forme differenziali"

Oggi facciamo algebra (multi)-lineare

Spazi vettoriali duali

V = sp. vettoriale reale, $\dim V$ = finita

V^* = duale di V

$= \{ f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ lineare} \}$

gli elementi di V^* si chiamano

funzionali lineari / forme lineari

a valori scalari

E' immediato: V^* = spazio vettoriale

- $(f+g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v})$
- $(\lambda f)(\underline{v}) = \lambda \cdot f(\underline{v})$

Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V (2)

definiamo degli elementi particolari di V^*

in qs modo:

$$f_i : V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\underline{v}_j \longrightarrow f_i(\underline{v}_j) = \delta_{ij}$$ = delta di Kronecker

f_i = funzioni coordinate rispetto alla base assegnata

infatti se $\underline{v} \in V \rightarrow \underline{v} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n$

$$f_i(\underline{v}) = f_i(a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n) =$$

$$= a_1 f_i(\underline{v}_1) + a_2 f_i(\underline{v}_2) + \dots + a_n f_i(\underline{v}_n)$$

$$= a_i$$

<u>Proposizione</u> $\{f_1, \dots, f_n\}$ base di V^*.

Conseguenze:

(1) $\dim V^* = n \quad (= \dim V)$

attenzione: falso per $\dim V$ = infinito

② V e V^* sono isomorfi

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v}_1 \longrightarrow f_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \longrightarrow f_n \end{array}\right\} \text{ isomorfismo}$$

__Definizione__ una __forma k-lineare__ è una funzione

$$f : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che è lineare in ogni variabile

cioè:

$$f(\dots, a\underline{v}_i + b\underline{v}_i', \dots) =$$

$$= a\, f(\dots, \underline{v}_i, \dots) + b\, f(\dots, \underline{v}_i', \dots)$$

__Esempio__: • prodotti scalari sono forme bilineari

__Esempio__ $V = \mathbb{R}^2$, (x, y) coord su $\mathbb{R}^2$ risp. base canonica

$$f : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 - 2 y_1 y_2 x_3$$

4

$f(\underline{v}_1 + \underline{v}_1', v_2, v_3) =$

$= (x_1 + x_1')x_2 y_3 + (x_1 + x_1')y_2 x_3$

$- 2(y_1 + y_1')y_2 x_3$

$= x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 - 2 y_1 y_3 x_3$

$+ x_1' x_2 y_3 + x_1' y_2 x_3 - 2 y_1' y_2 x_3$

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$ . . .

$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(v_1, v_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2$

non lineare rispetto alla 1ª variabile.

Ci interessano forme antisimmetriche o alternante

$f : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ k-lineare è alternante se: $\forall\ i = 1, 2, \dots, k-1$ si ha:

$f(\dots, \underline{v}_i, \underline{v}_{i+1}, \dots) = - f(\dots, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_i, \dots)$

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$ f : bilineare

$f(v, w) = f(w, v) \longrightarrow$ simmetrico

$f(v,w) = -f(w,v) \to$ alternante

$f(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ simmetrica

$g(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2$ alternante

$g(\underline{v}_2, \underline{v}_1) = x_2 y_1 - x_1 y_2$

Fatto: • le trasposizioni generano il gruppo di tutte le permutazioni

• ogni trasposizione è prodotto di trasposizioni consecutive

$(i\,j) = (i\ \ i{+}1)(i{+}1\ \ i{+}2) \ldots (j{-}1\ \ j)(j{-}2\ \ j{-}1) \ldots (i\ \ i{+}1)$

$i<j$

per esempio

$(3\,6) = (3\,4)(4\,5)(5\,6)(4\,5)(3\,4)$

$\Longrightarrow$ f alternante vuol dire:

$\forall \sigma \in S_k$ (per ogni permutazione)

$f(\underline{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \underline{v}_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$

dove $(-1)^\sigma$ = segno di σ

<u>Definizione</u> l'insieme

$$\Lambda^k V^* = \left\{ f : V \times \dots \times V \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ } k\text{-lineare} \\ \text{alternante} \end{array} \right\}$$

si dice <u>k-esima potenza esterna di V^*</u>

si legge "lambda k V star"

è uno <u>spazio vettoriale</u>.

<u>Esempio</u>: di funzione k-lineare alternante

$V = \mathbb{R}^k$, base canonica

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \to$ li scrivo in <u>colonna</u>

$$f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = \det \left[\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \cdots \ \underline{v}_k \right]$$

<u>Esempio</u>: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad (n = 3)$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ $\qquad v_1 = (a_1, a_2, a_3)$

$\qquad v_2 = (b_1, b_2, b_3)$

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

osserviamo: se chiamiamo

x_i = coordinata i-esima

$a_i = x_i(\underline{v}_1)$, $b_i = x_i(\underline{v}_2)$

$\varphi_{ij} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ | oss. $x_i \in V^*$

$\varphi_{ij} = x_i \wedge x_j$ e cioè:

$$\varphi_{ij}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \det \begin{bmatrix} x_i(\underline{v}_1) & x_i(\underline{v}_2) \\ x_j(\underline{v}_1) & x_j(\underline{v}_2) \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix}$$

quante funzioni φ_{ij} trovo?

solo φ_{12}, φ_{13}, φ_{23}

questa costruzione si può fare in generale

- V = sp. vettoriale di dimensione n
- $h_1, h_2, \dots, h_k \in V^*$

$h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k \in \Lambda^k V^*$ è definita da:

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_k)(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) =$$

$$= \det \left[h_i(\underline{v}_j) \right]$$

$h_1 \wedge \dots \wedge h_k$ si chiama

prodotto wedge di forme lineari

e appartiene alla potenza esterna di V^*.

Osservazione: se $k > n$ allora

$\forall h_1, \dots, h_k \in V^*$ si ha $h_1 \wedge \dots \wedge h_k \equiv 0$

Cerchiamo una base per $\Lambda^k V^*$:

sia V sp. vett e sia $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ base di V

sia $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale di V^*

cioè $e_i^*(\underline{e}_j) = \delta_{ij}$

Proposizione Sia $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$
$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k$

Allora:

$$(e_{\alpha_1}^* \wedge e_{\alpha_2}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_k}^*)(\underline{e}_{\beta_1}, \underline{e}_{\beta_2}, \dots, \underline{e}_{\beta_k})$$

$$= \delta_{\alpha_1 \beta_1} \cdot \delta_{\alpha_2 \beta_2} \cdot \dots \cdot \delta_{\alpha_k \beta_k}$$

<u>dimostrazione</u> scriviamo i vettori <u>in colonna</u> e formiamo la matrice A

$$A = \begin{array}{c c} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \cdots \\ & 1 & \\ & & \\ 0 & & \end{bmatrix}}_{k \text{ colonne}} & \begin{array}{l} \\ - \beta_1 \\ - \beta_2 \\ \\ \\ \end{array} \\ e_{\beta_1} \quad e_{\beta_2} & \end{array} \qquad \underline{n \text{ righe}}$$

per calcolare $(e^*_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e^*_{\alpha_k})(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_k})$ devo prendere la sottomatrice di A formata dalle righe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

- se esiste i: $\alpha_i \neq \beta_i$ la riga α_i è tutta nulla $\rightarrow \det = 0$
- se $\forall i$ $\alpha_i = \beta_i$ $\rightarrow$ la sottomatrice è $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \det = 1$$

<u>Proposizione</u>: sia $\dim V = n$

$\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ base di V

$\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ base duale di V^*.

<u>Allora</u>: l'insieme:

$$\left\{ e^*_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e^*_{\alpha_k} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1 < \alpha_2 < \dots \alpha_k \\ \alpha_i \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right\}$$

è una base di $\Lambda^k V^*$.

Quindi $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$

<u>dim</u>

- <u>indipendenti</u>: supponiamo

$$0 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} (e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k})$$

selezioniamo $j_1 < \dots < j_k$ e calcoliamo:

$$\sum a_{i_1 \dots i_k} \cdot (e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k})(\underline{e}_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

$$= a_{j_1 \dots j_k} = 0 \rightarrow \text{tutti i coeff. nulli}$$

<u>generatori</u> sia $f \in \Lambda^k V^*$

per ogni $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ poniamo:

$$\beta_{j_1 \dots j_k} = f(\underline{e}_{j_1}, \dots, \underline{e}_{j_k})$$

<u>allora</u>:

$$f = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \beta_{i_1 \dots i_k} (e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k})$$

per multilinearità basta verificarlo sui vettori $(\underline{e}_{j_1}, \dots, \underline{e}_{j_k})$

e per il risultato precedente sono uguali ∎

V di dimensione n, si pone per definizione

$$\Lambda^0 V = \mathbb{R} \quad , \quad \Lambda^1 V = V^*$$

$$\Lambda^* V^* = \Lambda^0 V \oplus \Lambda^1 V^* \oplus \Lambda^2 V^* \oplus \dots\dots$$

$$= \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \Lambda^2 V^* \oplus \dots \oplus \Lambda^n V^*$$

<u>algebra esterna di V^*</u>