V = sp. vettoriale reale ($\dim V = n$) 1

V^* = sp. vett. duale di V

$\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ base di V $\longrightarrow$ si ottiene la

base duale di V^* $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$

con la proprietà $e_i^*(\underline{e}_j) = \delta_{ij}$

$\Lambda^k V^* = \{$forme multilineari $f : V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ alternanti$\}$

$$f(\underline{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \underline{v}_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$$

si ha:

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$$

abbiamo definito il prodotto wedge di forme lineari

$$(h_1 \wedge \ldots \wedge h_k)(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) =$$

$$= \det\left(h_i(\underline{v}_j)\right)$$

$$h_1 \wedge \ldots \wedge h_k \in \Lambda^k V^*$$

$\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$, $\Lambda^1 V^* = V^*$, ... (2)

$$\Lambda^* V^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V^* =$$

$$= \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \Lambda^2 V^* \oplus \cdots \oplus \Lambda^n V^*$$

$\Lambda^* V^*$ è una $\mathbb{R}$-algebra, che significa:

① $\Lambda^* V^*$ è uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$

② $\Lambda^* V^*$ è un anello

③ $\mathbb{R} \subseteq$ centro di $\Lambda^* V^*$

④ la moltiplicazione scalare è la stessa di quella dell'anello.

Esempio: $M_n(\mathbb{R})$ = matrici $n \times n$ su $\mathbb{R}$

le matrici scalari $\lambda I_n \subseteq$ centro

$$\lambda \cdot A = (\lambda I_n) A$$

Esempio polinomi a coeff. reali

($\mathbb{R}$ = polinomi costanti)

Esempio $\Lambda^* V^*$

definiamo la moltiplicazione

$\omega, \eta \in \Lambda^* V^*$ sono somme di elementi in gradi differenti

$\omega \in \Lambda^k V^*$, $\eta \in \Lambda^s V^*$

$$\omega = \sum{}' a_I \, e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* = \sum_{|I|=k}{}' a_I e_I^*$$

multiindici $I = (i_1, \dots, i_k)$

$$e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

$|I|$ = lunghezza di un multindice $= k$

$$\eta = \sum_{|J|=s}{}' b_J e_J^*$$

Definizione:

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J}{}' a_I b_J (e_I^* \wedge e_J^*)$$

esempio: $\dim V = 5$

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + 2 e_3^* \wedge e_4^*$$

$$\eta = e_2^* \wedge e_3^* + 3 e_4^* \wedge e_5^*$$

$$\omega \wedge \eta = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \longrightarrow 0$$

$$+3\left(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_4^* \wedge e_5^*\right)$$

$$+2\left(e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*\right) \longrightarrow 0$$

$$+6\left(e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_4^* \wedge e_5^*\right) \longrightarrow 0$$

$$= 3\left(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_4^* \wedge e_5^*\right)$$

<u>Proposizione</u>: $\omega \in \Lambda^k V^*$, $\eta \in \Lambda^s V^*$, $\theta \in \Lambda^r V^*$

① $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$

② $\omega \wedge \eta = (-1)^{ks}\, \eta \wedge \omega$

dim ② basta farlo su una base

$$\left.\begin{aligned} \omega &= e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \\ \eta &= e_J^* = e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^* \end{aligned}\right\} \; I, J \text{ in ordine crescente}$$

$$\omega \wedge \eta = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^*$$

$$\eta \wedge \omega = e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_s}^* \wedge e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

s scambi   s scambi   s scambi

in totale sk scambi $\to (-1)^{ks}$ (15)

Si dice che:

$\Lambda^* V^*$ è una $\mathbb{R}$-algebra graduata (anti)-commutativa

— o —

Forme differenziali su $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n_a$ = sp. affine sullo sp. vettoriale $\mathbb{R}^n_v$

$T_p \mathbb{R}^n_a = \mathbb{R}^n_v$ sempre uguale

$T\mathbb{R}^n_a$ = fibrato tangente è banale $= \mathbb{R}^n_a \times \mathbb{R}^n_v$

$\mathbb{R}^n_v$ = fissiamo la base canonica

$\underline{e}_1 = (1,0,\dots,0), \dots, \underline{e}_n = (0,0,\dots,1)$

sia $p \in \mathbb{R}^n_a$

$V = T_p \mathbb{R}^n_a = \mathbb{R}^n_v$ con base fissata cosa è $V^* = ?$ Si chiama

spazio cotangente

Ricordiamo $T_p \mathbb{R}^n_a$ = vettori tg in p

= vettori tg alle curve in $\mathbb{R}^n_a$ passanti per p

$\gamma_i = p + t \underline{e}_i$ = retta per p parallela all'asse i

$\gamma_i'(0) = \underline{e}_i \in T_p \mathbb{R}^n_a$

base di $T_p \mathbb{R}^n_a = \{ (p, \underline{e}_1), \dots, (p, \underline{e}_n) \}$

Chi è $(T_p \mathbb{R}^n_a)^* = ??$

sp. cotangente $= T_p^* \mathbb{R}^n_a$

= forme lineari su $T_p \mathbb{R}^n_a$ =

$= \{ f : T_p \mathbb{R}^n_a \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineare} \}$

Cioè: $f \in T_p^* \mathbb{R}^n_a$ vuol dire una

funzione che a ogni vettore tg associa

un numero (in modo lineare)

Esempio: sia $f : \mathbb{R}^n_a \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile. Allora

$$df_p : T_p \mathbb{R}^n_a \longrightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

funzione lineare $\Longrightarrow df_p \in T_p^* \mathbb{R}^n_a$

base di $T_p^* \mathbb{R}^n_a$

Osservazione: parametrizziamo $\mathbb{R}^n_a$:

$$q = p + x_1 \underline{e}_1 + \cdots + x_n \underline{e}_n$$

$(x_1, \dots, x_n)$ = coordinate di q

abbiamo funzioni $x_i : \mathbb{R}^n_a \longrightarrow \mathbb{R}$

funz. coordinate

$$\gamma_j(t) = p + t\,\underline{e}_j = (p_1, p_2, \dots, p_j + t, \dots p_n)$$

$$\gamma_j'(0) = \underline{e}_j$$

$$dx_{i,p}(\underline{e}_j) = dx_{i,p}(\gamma_j'(0)) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{x_i \circ \gamma}\Big)_{t=0} = \delta_{ij}$$

I differenziali delle funzioni coord. (8)

sono la base duale di $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ in p.

Torniamo allo sp. tangente:

Definizione un campo vettoriale (tangente) definito su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n_a$ è una famiglia di vettori $X_p \in T_p\mathbb{R}^n_a$ che varia differenziabilmente in p

cioè:

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\, \underline{e}_{i,p}$$

"varia differenziabilmente" = le funzioni f_i sono differenziabili

Esempio $U = \mathbb{R}^n$ con coord $(x_1, \dots, x_n)$

in ogni sp. tangente uso la base $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot \underline{e}_i$$

posso pensare X come una funzione

$$X : \mathbb{R}^n_a \longrightarrow \mathbb{R}^n_v$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

Per essere precisi:

$$X : \mathbb{R}^n_a \longrightarrow T\mathbb{R}^n_a$$

con la proprietà $X(p) \in T_p\mathbb{R}^n_a \quad \forall p$

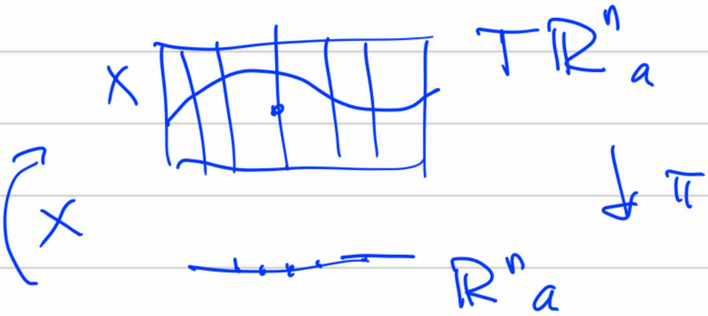
ricordiamo la proiezione canonica:

$$\pi : T\mathbb{R}^n_a \longrightarrow \mathbb{R}^n_a \qquad \pi = \text{"punto di applicazione"}$$

$$(p, \underline{v}) \longrightarrow p$$

allora:

$$\boxed{\pi \circ X = id_{\mathbb{R}^n_a}}$$



si dice:

X (campo vettoriale)

è una sezione del fibrato tangente

Allo stesso modo una 1-forma differenziale è una sezione del fibrato cotangente

$$T^*\mathbb{R}^n_a = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n_a} T_p^*\mathbb{R}^n_a$$

$$= \mathbb{R}^n_a \times (\mathbb{R}^n_v)^*$$

In termini espliciti, una 1-forma diff. è una famiglia di forme lineari sugli sp. tangenti e quindi si scrive come:

$$\boxed{\omega = \sum_{i=1}^n g_i(x)\, dx_i}$$

$dx_i = dx_{i,p}$ = diff. delle coordinate centrate in p

Esempio (quelli che conoscete dall'Analisi)

$$\omega_1 = x_1\, dx_1 + x_2 x_4\, dx_2 - \operatorname{sen} x_3\, dx_3$$

$$\omega_2 = x_2 x_3\, dx_1 + x_1 x_3\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3$$

$\vdots$

Osservazione: $\omega_2 = d(x_1 x_2 x_3)$

ma ω_1 non è il diff. di nessuna funzione.

Usiamo l'algebra per definire le k-forme

è una famiglia di elementi delle potenze esterne dello spazio tangente:

$$\omega = \sum_{|I|=k} g_I(x) \cdot dx_I$$

dove $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

Esempio:

$$\omega = x_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + \sin x_2 \, dx_1 \wedge dx_3$$

$\vdots$

Esempio: sia ω una 4-forma differenziale su $\mathbb{R}^3$.

Allora: $\omega = 0$

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$\Omega^k(U) = \{$ k-forme differenziali definite su $U \}$

$= \{ \omega = \sum_{|I|=k} g_I(x)\, dx_I \mid g_I : U \to \mathbb{R}$ differenziabili $\}$

Esempio: $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3$$

$\omega \in \Omega^1(U)$

però $\omega \notin \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ perché in 0 non è definita

Oss. è chiaro che $U \subseteq V$, allora

$\Omega^k(V) \subseteq \Omega^k(U)$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto:

$$\Omega^*(U) = \Omega^0(U) \oplus \Omega^1(U) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(U)$$

cosa è $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ = funzioni diff. su U

$\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^s(U)$

$$\omega = \sum_I{}' g_I(x)\, dx_I, \quad \eta = \sum_J{}' h_J(x)\, dx_J$$

$$\boxed{\omega \wedge \eta = \sum_{I,J}{}' g_I(x) \cdot h_J(x) \; dx_I \wedge dx_J}$$

Si ha, come prima

- $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{ks} \eta \wedge \omega$